Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL
Autor: André, Michel
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

où $T_i(A, K, K)$ est l'espace vectoriel des éléments indécomposables de $\mathrm{Tor}_i^A(K, K)$. Mais alors l'égalité $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ a lieu si et seulement si π est l'application nulle. Un exemple va montrer que cette propriété n'est pas toujours satisfaite.

L'espace vectoriel $T_3(A, K, K)$, qui concerne la notion d'intersection complète, est un quotient du deuxième module d'homologie à la Koszul. Il est donc possible de remplacer la paire quelconque (A, α), où α appartient à $T_3(A, K, K)$, par une paire générique $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$. La situation se simplifie maintenant: ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ est nul et alors π est toujours nul et δ_{2p+1} est toujours égal à ε_{2p+1}, ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul et alors $\tilde{A}$ fournit l'exemple recherché d'un anneau avec δ_{2p+1} strictement inférieur à ε_{2p+1}. Le calcul montre que l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul. Il faut donc se contenter de la propriété suivante:

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \varepsilon_3 \,.$$

Le cas où ε_3 est nul n'apporte rien de nouveau. En effet l'anneau A est alors une intersection complète, ce qui oblige la déviation ε_{2p+1} et l'invariant δ_{2p+1} à être nuls.

Introduction

Il est possible de résoudre projectivement le A-module K par une A-algèbre simpliciale P qui est libre en chaque degré, comme A-algèbre. Le produit tensoriel $P \otimes_A K$ est alors une K-algèbre simpliciale R qui est libre en chaque degré, comme K-algèbre. L'espace vectoriel $H_n[R]$ est évidemment toujours égal à l'espace vectoriel $\mathrm{Tor}_n^A(K, K)$. De plus la K-algèbre simpliciale R est munie d'une augmentation $\rho \colon R \to K$. Son noyau I est un idéal simplicial de l'anneau simplicial R. Il est utile d'en considérer les puissances successives I^k, calculées degré par degré. En particulier le quotient I/I^2 est un K-module simplicial, dont le complexe correspondant est par définition le complexe cotangent de la A-algèbre K. L'espace vectoriel $H_n[I/I^2]$, qui est l'espace vectoriel $H_n(A, K, K)$ de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives, a une dimension finie δ_n, l'anneau local A étant supposé noethérien.

Dénotons par S^r le foncteur « r-ème produit symétrique » de la catégorie des K-modules et par S leur somme directe, qui est le foncteur « algèbre symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des K-modules simpliciaux. Si M est un K-module simplicial, alors l'homologie $H[SM]$ a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\Sigma\, b_j x^j = (1+x)^{e_1}(1-x^2)^{-e_2}\ldots .$$

Les nombres de Betti b_j sont les dimensions des espaces vectoriels $H_j[SM]$ et les nombres positifs ou nuls e_i peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres e_i se calculent à l'aide des nombres m_i qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_i[M]$. Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part e_i est égal à m_i pour $i \leqslant 2p$ et d'autre part e_{2p+1} est égal à la somme $m_{2p+1} + m_3$.

Comme la K-algèbre augmentée R est libre en chaque degré, il existe pour tout r un isomorphisme de K-modules simpliciaux de $S^r(I/I^2)$ sur I^r/I^{r+1}. Par conséquent l'homologie du K-module simplicial I/I^2 (formée des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$ connus par leurs dimensions δ_i) détermine complètement l'homologie des K-modules simpliciaux I^r/I^{r+1}. Par ailleurs l'homologie du K-module simplicial $I^0 = R$ (formée des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ connus par leurs dimensions β_j données par les déviations ε_i) peut être filtrée par les images de l'homologie des K-modules simpliciaux I^r. Il reste donc à faire le passage de l'homologie du K-module simplicial I^r/I^{r+1} à l'homologie du K-module simplicial I^r. La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a $H_m[I^n]$ nul pour toute paire $m < n$, comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

Les 2p premières déviations

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur F^r, noyau de la transformation naturelle du foncteur $\otimes^r$ sur le foncteur S^r, on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme λ entre des K-modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes $H_k[\lambda]$ pour $k = 0,\ldots,n$, alors il donne des épimorphismes $H_k[S^r\lambda]$ pour $k = 0,\ldots, n+1$ et pour r quelconque, sauf peut-être pour $k = n+1$ et $r = 1$, bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de I sur I/I^2.