

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL  
**Autor:** André, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48929>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA $(2p+1)$ -ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL<sup>1</sup>

par Michel ANDRÉ

Par un argument de résolution minimale ou par un argument d'algèbre de Hopf à puissances divisées, on sait que la série de Poincaré d'un anneau local noethérien  $A$  a la forme suivante

$$P_A(x) = \sum \beta_j x^j = (1+x)^{\varepsilon_1} (1-x^2)^{-\varepsilon_2} \dots$$

Les nombres de Betti  $\beta_j$  sont les dimensions des espaces vectoriels  $\text{Tor}_j^A(K, K)$  sur le corps résiduel  $K$ , et les nombres positifs ou nuls  $\varepsilon_i$  sont appelés les déviations de l'anneau local. Par ailleurs la théorie du complexe cotangent, avec l'homologie qui en découle, fournit d'autres nombres positifs ou nuls  $\delta_i$  qui sont appelés les invariants de l'anneau local et qui sont égaux aux dimensions des espaces vectoriels  $H_i(A, K, K)$ .

Grâce à un théorème de convergence de D. Quillen, on peut appliquer la théorie du produit symétrique et constater que l'on a l'égalité  $\delta_i = \varepsilon_i$  sans restriction en caractéristique nulle et avec la restriction  $i \leq 2p$  en caractéristique positive. Un rappel de la démonstration sera donné ci-dessous. Le premier degré intéressant en caractéristique  $p$  est donc égal à  $2p+1$ . On a alors toujours une inégalité  $\delta_{2p+1} \leq \varepsilon_{2p+1}$ . Il y a même égalité si l'idéal maximal  $M$  est petit dans l'un des deux sens suivants: ou bien l'idéal  $M^p$  est nul ou bien l'idéal  $M$  a  $2p-1$  générateurs. Il se pose le problème de l'égalité en toute généralité.

Une analyse de la situation fait revenir à la théorie de l'homologie des produits symétriques et des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Dans la terminologie de Cartan, c'est le mot  $\sigma\gamma\sigma\sigma$  qui concerne tout spécialement le degré  $2p+1$ . En topologie, il lui correspond l'opération cohomologique

$$P : H^3 \rightarrow H^{2p+1}$$

fortement liée aux puissances  $p$ -èmes des éléments de degré 2 et aux isomorphismes de suspension. De manière analogue, une application canonique va apparaître

$$\pi : T_3(A, K, K) \rightarrow T_{2p+1}(A, K, K)$$

<sup>1)</sup> Présenté au Colloque de Topologie et d'Algèbre, Zurich, avril 1977.

où  $T_i(A, K, K)$  est l'espace vectoriel des éléments indécomposables de  $\text{Tor}_i^A(K, K)$ . Mais alors l'égalité  $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$  a lieu si et seulement si  $\pi$  est l'application nulle. Un exemple va montrer que cette propriété n'est pas toujours satisfaite.

L'espace vectoriel  $T_3(A, K, K)$ , qui concerne la notion d'intersection complète, est un quotient du deuxième module d'homologie à la Koszul. Il est donc possible de remplacer la paire quelconque  $(A, \alpha)$ , où  $\alpha$  appartient à  $T_3(A, K, K)$ , par une paire générique  $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ . La situation se simplifie maintenant: ou bien l'élément  $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$  est nul et alors  $\pi$  est toujours nul et  $\delta_{2p+1}$  est toujours égal à  $\varepsilon_{2p+1}$ , ou bien l'élément  $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$  n'est pas nul et alors  $\tilde{A}$  fournit l'exemple recherché d'un anneau avec  $\delta_{2p+1}$  strictement inférieur à  $\varepsilon_{2p+1}$ . Le calcul montre que l'élément  $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$  n'est pas nul. Il faut donc se contenter de la propriété suivante:

$$\delta_{2p+1} \leq \varepsilon_{2p+1} \leq \delta_{2p+1} + \varepsilon_3.$$

Le cas où  $\varepsilon_3$  est nul n'apporte rien de nouveau. En effet l'anneau  $A$  est alors une intersection complète, ce qui oblige la déviation  $\varepsilon_{2p+1}$  et l'invariant  $\delta_{2p+1}$  à être nuls.

## INTRODUCTION

Il est possible de résoudre projectivement le  $A$ -module  $K$  par une  $A$ -algèbre simpliciale  $P$  qui est libre en chaque degré, comme  $A$ -algèbre. Le produit tensoriel  $P \otimes_A K$  est alors une  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  qui est libre en chaque degré, comme  $K$ -algèbre. L'espace vectoriel  $H_n[R]$  est évidemment toujours égal à l'espace vectoriel  $\text{Tor}_n^A(K, K)$ . De plus la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  est munie d'une augmentation  $\rho: R \rightarrow K$ . Son noyau  $I$  est un idéal simplicial de l'anneau simplicial  $R$ . Il est utile d'en considérer les puissances successives  $I^k$ , calculées degré par degré. En particulier le quotient  $I/I^2$  est un  $K$ -module simplicial, dont le complexe correspondant est par définition le complexe cotangent de la  $A$ -algèbre  $K$ . L'espace vectoriel  $H_n[I/I^2]$ , qui est l'espace vectoriel  $H_n(A, K, K)$  de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives, a une dimension finie  $\delta_n$ , l'anneau local  $A$  étant supposé noethérien.

Dénotons par  $S^r$  le foncteur «  $r$ -ème produit symétrique » de la catégorie des  $K$ -modules et par  $S$  leur somme directe, qui est le foncteur « algèbre

symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des  $K$ -modules simpliciaux. Si  $M$  est un  $K$ -module simplicial, alors l'homologie  $H[SM]$  a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\sum b_j x^j = (1+x)^{e_1} (1-x^2)^{-e_2} \dots .$$

Les nombres de Betti  $b_j$  sont les dimensions des espaces vectoriels  $H_j[SM]$  et les nombres positifs ou nuls  $e_i$  peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres  $e_i$  se calculent à l'aide des nombres  $m_i$  qui sont les dimensions des espaces vectoriels  $H_i[M]$ . Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part  $e_i$  est égal à  $m_i$  pour  $i \leq 2p$  et d'autre part  $e_{2p+1}$  est égal à la somme  $m_{2p+1} + m_3$ .

Comme la  $K$ -algèbre augmentée  $R$  est libre en chaque degré, il existe pour tout  $r$  un isomorphisme de  $K$ -modules simpliciaux de  $S^r(I/I^2)$  sur  $I^r/I^{r+1}$ . Par conséquent l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I/I^2$  (formée des espaces vectoriels  $H_i(A, K, K)$  connus par leurs dimensions  $\delta_i$ ) détermine complètement l'homologie des  $K$ -modules simpliciaux  $I^r/I^{r+1}$ . Par ailleurs l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I^0 = R$  (formée des espaces vectoriels  $\text{Tor}_j^A(K, K)$  connus par leurs dimensions  $\beta_j$  données par les déviations  $\varepsilon_i$ ) peut être filtrée par les images de l'homologie des  $K$ -modules simpliciaux  $I^r$ . Il reste donc à faire le passage de l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I^r/I^{r+1}$  à l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I^r$ . La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a  $H_m[I^r] = 0$  pour toute paire  $m < n$ , comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

## LES 2<sup>e</sup> PREMIÈRES DÉVIATIONS

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur  $F^r$ , noyau de la transformation naturelle du foncteur  $\otimes^r$  sur le foncteur  $S^r$ , on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme  $\lambda$  entre des  $K$ -modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes  $H_k[\lambda]$  pour  $k = 0, \dots, n$ , alors il donne des épimorphismes  $H_k[S^r\lambda]$  pour  $k = 0, \dots, n+1$  et pour  $r$  quelconque, sauf peut-être pour  $k = n+1$  et  $r = 1$ , bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de  $I$  sur  $I/I^2$ .

On va utiliser l'homomorphisme canonique de  $H_n[I]$  dans  $H_n[I/I^2]$ , autrement dit de  $\text{Tor}_n^A(K, K)$  dans  $H_n(A, K, K)$ , pour  $n$  différent de 0. Les produits non-triviaux de  $H[I]$  proviennent de l'image de l'homomorphisme de  $H[I] \otimes H[I]$  dans  $H[I]$ , qui passe au travers de  $H[I^2]$  et les puissances divisées de  $H[I]$  proviennent de l'image de l'application partiellement définie de  $H[I]$  dans  $H[I]$ , qui passe au travers de  $H[I^p]$  donc de  $H[I^2]$ . Cela étant remarqué, on peut donc définir un homomorphisme canonique et utile

$$\eta_n : T_n(A, K, K) \rightarrow H_n(A, K, K)$$

avec l'isomorphisme de définition

$$T_n(A, K, K) \cong \text{Tor}_n^A(K, K) / J_n$$

où  $J_n$  est le sous-espace vectoriel engendré par tous les produits non-triviaux de degré  $n$  et par toutes les puissances divisées de degré  $n$ . Comme ici le degré  $n$  est au plus égal à  $2p+1$ , les puissances divisées interviennent dans le seul degré  $2p$ . Par la théorie des algèbres de Hopf à puissances divisées, il est clair que l'espace vectoriel  $T_n(A, K, K)$  a la dimension  $\varepsilon_n$ . Par suite on a une inégalité  $\delta_n \leq \varepsilon_n$  si  $\eta_n$  est un épimorphisme et une égalité  $\delta_n = \varepsilon_n$  si  $\eta_n$  est un isomorphisme. Appelons  $\Omega_n$  le noyau de l'homomorphisme  $\eta_n$  et  $\omega_n$  la dimension de  $\Omega_n$ .

Considérons la condition  $C_n$  suivante: d'une part  $\eta_k$  est un isomorphisme pour  $k \leq n-1$  et d'autre part  $\eta_n$  est un épimorphisme. On a donc des homomorphismes surjectifs de  $H_k[S^r(I)]$  sur  $H_k[S^r(I/I^2)]$ . Comme ils passent au travers de  $H_k[I^r]$ , on obtient des homomorphismes surjectifs de  $H_k[I^r]$  sur  $H_k[I^r/I^{r+1}]$  pour  $k \leq n+1$  et pour  $r \geq 0$ , sauf peut-être pour  $k = n+1$  et pour  $r = 1$ . Il en découle une suite exacte pour  $r \neq 1$

$$0 \rightarrow H_n[I^{r+1}] \rightarrow H_n[I^r] \rightarrow H_n[I^r/I^{r+1}] \rightarrow 0$$

et pour  $r = 1$  il faut remplacer le 0 de gauche par  $0 \rightarrow \Omega_{n+1}$  pour obtenir encore une suite exacte. Grâce au théorème de convergence, on peut sommer sur  $r$  et obtenir un isomorphisme non-canonical

$$H_n[S(I/I^2)] \cong H_n[R] + \Omega_{n+1}.$$

La dimension du  $H_n$  de droite est donnée par le coefficient de  $x^n$  dans la série

$$(1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2} \dots (1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}$$

et la dimension du  $H_n$  de gauche est donnée par le coefficient de  $x^n$  dans la série

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si  $n$  est au plus  $2p$ . Mais comme  $\delta_k$  et  $\varepsilon_k$  sont égaux pour  $k < n$ , il reste une égalité simple  $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$ . Comme par ailleurs on a une inégalité  $\varepsilon_n \geq \delta_n$  due à la surjectivité de  $\eta_n$ , cela ne se peut que sous la forme  $\delta_n = \varepsilon_n$  (et  $\eta_n$  est un isomorphisme) et  $\omega_{n+1} = 0$  (et  $\eta_{n+1}$  est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition  $C_n$  par induction sur  $n \leq 2p+1$  et les nombres  $\delta_n$  et  $\varepsilon_n$  sont égaux pour  $n \leq 2p$  (ou quelconque en caractéristique nulle).

### LA $2p+1$ -ÈME DÉVIATION

Nous venons de le constater, l'homomorphisme  $\eta_{2p+1}$  est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir  $\varepsilon_{2p+1} \geq \delta_{2p+1}$ . Ce qui a été fait ci-dessus pour  $n \leq 2p$  peut être répété en partie pour  $n = 2p+1$ . Mais alors la dimension du  $n$ -ème module d'homologie de  $S(I/I^2)$  est donné par le coefficient de  $x^{2p+1}$  dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leq \varepsilon_{2p+1} \leq \delta_{2p+1} + \delta_3.$$

En particulier les homomorphismes  $\eta_{2p+1}$  et  $\eta_{2p+2}$  sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant  $\delta_3$  est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local  $A$ , complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations  $\varepsilon_i$  et des invariants  $\delta_i$  pour  $i \geq 3$ . Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités  $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$  et  $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$ , sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $R$  d'idéal d'augmentation connexe  $I$ . On dénote par  $J$  le sous-espace produit  $H[I]$  de  $H[I]$ , les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit  $\bar{K}$  une autre copie de  $K$ , opérant sur  $H[I]$  grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur  $K$  grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile  $\pi$

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3 [I]/J_3 \rightarrow H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} .$$

Pour cela on considère un homomorphisme surjectif  $\sigma: \tilde{R} \rightarrow R$ , la  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $\tilde{R}$  étant supposée acyclique. Un élément  $x$  du quotient  $H_3/J_3$  est représenté par un élément de  $H_3$ , donc par un 3-cycle de  $I$  ou encore par une 3-chaîne de  $\tilde{I}$  notée  $\xi$ . La  $p$ -ème puissance divisée du 2-bord  $d\xi$  de  $\tilde{I}$  est un  $2p$ -cycle de  $\tilde{I}$ , donc un  $2p$ -bord de  $\tilde{I}$

$$\gamma^p(d\xi) = d\eta .$$

Il s'agit là d'un élément du noyau de  $\sigma$ . Par conséquent  $\eta$  représente un  $2p+1$ -cycle de  $I$ , donc un élément de  $H_{2p+1}$  ou encore un élément  $y$  du quotient  $H_{2p+1}/J_{2p+1}$ . Après les vérifications d'usage, on pose la définition  $\pi(1 \otimes x) = y$ . L'homomorphisme  $\pi$  étant défini, on n'oublie pas l'homomorphisme  $\eta_{2p+1}$

$$H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} \rightarrow H_{2p+1} [I/I^2]$$

défini lui aussi en toute généralité.

L'homomorphisme  $\pi$  est nul, lorsque le carré  $I^2$  est nul. Par conséquent l'image de  $\pi$  est contenue dans le noyau de  $\eta_{2p+1}$  dans tous les cas. Parfois on obtient même une égalité. La théorie du produit symétrique montre que c'est bien le cas, lorsque la  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $R$  est égale à  $K$ -algèbre symétrique  $S(L)$  d'un  $K$ -module simplicial connexe  $L$ . Il s'agira aussi d'une égalité dans le cas qui nous intéresse ici.

La  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $R$  est à nouveau celle donnant lieu au complexe cotangent. On sait surjectifs les homomorphismes canoniques de  $H_k [I]$  dans  $H_k [I/I^2]$  pour  $0 \leq k \leq 2p+1$ . On a donc des homomorphismes surjectifs de  $H_{2p+1} [S^r (I)]$  dans  $H_{2p+1} [S^r (I/I^2)]$  pour tout  $r$ . En utilisant le théorème de convergence et une induction sur  $r$  décroissant, on démontre alors que les homomorphismes canoniques de  $H_{2p+1} [S^r (I)]$  dans  $H_{2p+1} [I^r]$  sont eux aussi surjectifs. On a donc la situation suivante. L'injection canonique du  $K$ -module simplicial  $I$  dans la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  se prolonge en un homomorphisme de la  $K$ -algèbre simpliciale  $\hat{R}$ , égale à la  $K$ -algèbre simpliciale  $S(I)$ , dans la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$ , le tout donnant lieu à des épimorphismes

$$H_{2p+1} [\hat{I}^r] \rightarrow H_{2p+1} [I^r]$$

en particulier pour  $r$  égal à 2. Grâce à cet épimorphisme, de l'égalité de

l'image de  $\hat{\pi}$  et du noyau de  $\hat{\eta}_{2p+1}$ , mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de  $\pi$  et du noyau de  $\eta_{2p+1}$ . En particulier  $\eta_{2p+1}$  est un isomorphisme si et seulement si  $\pi$  est un homomorphisme nul.

### SITUATION GÉNÉRIQUE

Il faut considérer le  $K$ -module  $H_3 [I]/J_3$ , autrement dit le  $K$ -module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K) \cdot \mathrm{Tor}_1^A(K, K).$$

Il s'agit là du quotient  $H_2/H_1$ .  $H_1$  en homologie à la Koszul et un élément  $t$  du quotient de  $\mathrm{Tor}_3$  par  $\mathrm{Tor}_2$ .  $\mathrm{Tor}_1$  est donc représentable par un élément  $g$  facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs  $m_1, m_2, \dots, m_n$  de l'idéal maximal  $M$  de l'anneau local  $A$ . Ce représentant  $g$  a la forme

$$\sum \mu_{ij} dm_i \wedge dm_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

avec la condition usuelle de cycle pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum \mu_{ij} m_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $\mu_{ii}$  égal à 0 et  $\mu_{ji}$  égal à  $-\mu_{ij}$ . Cela étant, avec un anneau  $B$ , il est naturel de considérer la  $B$ -algèbre  $Bn$  engendrée par les  $n(n+1)/2$  générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leq j < k \leq n$$

et soumise aux  $n$  relations pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum y_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $y_{ii}$  égal à 0 et  $y_{ji}$  égal à  $-y_{ij}$ . Mais alors l'élément  $gn$

$$\sum y_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

représente un élément important  $tn$  du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B) \cdot \mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B).$$

L'homomorphisme utilisé de  $Bn$  dans  $B$  est l'unique homomorphisme de  $B$ -algèbres qui envoie les générateurs  $x_i$  et  $y_{jk}$  sur 0.

Les  $B$ -algèbres  $Bn$  et  $Zn \otimes_Z B$  sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale  $Pn(Z)$  de la  $Zn$ -algèbre  $Z$ . Comme le  $Z$ -module  $Zn$  est

libre, le produit tensoriel  $Pn(Z) \otimes_Z B$  est une résolution simpliciale  $Pn(B)$  de la  $Bn$ -algèbre  $B$ . Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn(Z) = Pn(Z) \otimes_{Zn} Z \text{ et } Rn(B) = Pn(B) \otimes_{Bn} B.$$

Les  $B$ -algèbres simpliciales  $Rn(Z) \otimes_Z B$  et  $Rn(B)$  sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau  $Zn$  dans l'anneau  $A$  qui envoie les générateurs  $x_i$  sur les éléments  $m_i$  et les générateurs  $y_{jk}$  sur les éléments  $\mu_{jk}$ . Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de  $\text{Tor}_3$  par  $\text{Tor}_2$ ,  $\text{Tor}_1$ , l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique  $tn$  sur l'élément quelconque  $t$  donné initialement. L'homomorphisme de  $Zn$  dans  $A$  donne un homomorphisme de  $Rn(Z)$  dans  $R$ , donc un homomorphisme de  $Rn(K)$  dans  $R$ , par produit tensoriel.

En résumé, on a la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $A$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi$  correspondant, et la  $K$ -algèbre simpliciale  $Rn$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $Kn$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi n$  correspondant. De plus il existe un homomorphisme de  $Rn$  dans  $R$  plaçant finalement  $tn$  au-dessus de  $t$  et  $\pi n$  au-dessus de  $\pi$ . En particulier l'homomorphisme  $\pi$  est nul en entier, si l'homomorphisme  $\pi n$  est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément  $\pi n(tn)$ . On peut localiser  $Kn$  sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par  $Mn$  le noyau de l'homomorphisme de  $Kn$  sur  $K$ . L'idéal  $Mn$  a  $n(n+1)/2$  générateurs, alors que l'idéal  $M$  a  $n$  générateurs.

## CONCLUSION

Considérons une résolution libre et multiplicative  $\tilde{Fn}$  de la  $Kn$ -algèbre  $K$  et dénotons par  $Fn$  le produit tensoriel  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} K$  qui permet le calcul de  $\text{Tor}^{Kn}(K, K)$ . Dans la définition de l'homomorphisme  $\pi n$ , on peut remplacer les  $K$ -algèbres simpliciales  $Rn$  et  $\tilde{Rn}$  par les  $K$ -algèbres différentielles  $Fn$  et  $\tilde{Fn}$ . L'élément  $gn$  appartient alors à  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$  et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\text{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \text{Tor}_3^{Kn}(K, K).$$

Il faut alors considérer  $hn$ , la  $p$ -ème puissance divisée de  $gn$ , qui est l'élément suivant de  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$ , avec le degré  $2p$ ,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \dots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_{2p-1}} \wedge dx_{i_{2p}}$$

avec la condition  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2p-1} < i_{2p} \leq n$  et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \dots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation  $\sigma$  des  $2p$  éléments  $i_j$  est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \dots < \sigma_{2p-1}, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \dots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}.$$

Mais alors l'élément  $\pi n (tn)$  est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  dans  $\tilde{Fn}$  avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords  $d\alpha_j$  et  $d\beta_j$  sont tous des éléments de  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$ . En troisième lieu, l'élément  $hn$  est égal à la somme des bords  $d(\alpha_j, \beta_j)$ .

Lorsque l'idéal  $M$  est engendré par  $2p-1$  éléments, on peut utiliser  $Kn$  avec  $n$  égal à  $2p-1$ . Mais alors  $hn$  est nul de manière élémentaire. Par conséquent  $\pi$  est nul et on obtient un isomorphisme  $\eta_{2p+1}$  de manière naturelle.

Lorsque l'idéal  $M$  a sa  $p$ -ème puissance nulle, on peut remplacer  $Kn$  par le quotient  $Kn/(Mn)^p$ . Mais alors  $hn$  modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent  $\pi$  est nul et on obtient un isomorphisme  $\eta_{2p+1}$  de manière naturelle.

La plus petite algèbre  $Kn$  qui risque d'être intéressante est donc celle avec  $p$  égal à 2 et  $n$  égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément  $\pi n (tn)$  n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme  $\eta_5$  n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel  $\varepsilon_5$  est strictement supérieur à  $\delta_5$ . A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDRÉ, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra* 18 (1971), 19-50.
- [2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.
- [3] CARTAN, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.

- [4] DOLD, A. et R. THOM. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte.  
*Annals Math.* 67 (1958), 239-280.
- [5] NICOLLERAT, M.-A. Homologie des produits symétriques. *A paraître.*
- [6] QUILLEN, D. On the homology of commutative rings. *Proc. Sym. Pure Math.* 17 (1970), 65-87.

(Reçu le 6 mai 1977)

Michel André

Département de Mathématiques  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
61, Avenue de Cour  
1007 Lausanne