

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SISTEMI NORMALI DI GENERATORI PER GLI IDEALI DI $Z[x]$
Autor: Franci, R. / Toti Rigatelli, L.
Kapitel: Nota
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48923>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 24.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ciascun q_i una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono si può passare ad un sistema

$$0, \dots, \bar{q}_{j_1}, x\bar{q}_{j_1}, \dots, \bar{q}_{j_n}, x\bar{q}_{j_n}, \dots$$

che genera J e in cui la sequenza $\bar{q}_{j_1}, \dots, \bar{q}_{j_n}$ è ridotta. Quindi $\bar{q}_{j_1}, \dots, \bar{q}_{j_n}$ è il sistema normale cercato.

COROLLARIO 1. Esiste un procedimento effettivo che dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori permette di confrontarli rispetto all'inclusione.

Dim. Siano $I = (p_1, \dots, p_n)$, $J = (q_1, \dots, q_r)$ gli ideali dati. Consideriamo l'ideale $K = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_r)$. Dall'esame dei sistemi normali di generatori per I, J, K si arriva al confronto cercato.

COROLLARIO 2. Esiste un procedimento effettivo che, dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori, permette di trovare un sistema normale di generatori per l'ideale prodotto.

COROLLARIO 3. Esiste un procedimento effettivo che, dato un ideale di $Z[x]$ mediante un qualunque sistema di generatori mi permette di riconoscere se è primo, massimale.

Dim. Immediato dal teorema e dalla caratterizzazione ¹⁾ degli ideali primi e massimali di $Z[x]$.

L'argomento del presente lavoro si presta a diverse generalizzazioni di cui di occuperemo in seguito; alcune di esse sono ovvie e avremmo potuto darle subito, ma abbiamo preferito per chiarezza fare l'esposizione nel caso di $Z[x]$.

NOTA

Quando il presente lavoro era già stato inviato per la pubblicazione ci è giunta notizia che F. Châtelet in [1] e G. Fardoux in [2] [3] hanno studiato rispettivamente sistemi di generatori per ideali di $Z[x]$ e $A[x]$ (con A anello a ideali principali).

Le basi canoniche individuate dagli autori sopra citati hanno stretti legami con i nostri sistemi normali di generatori, pur non coincidendo. Più

¹⁾ Ci riferiamo alla caratterizzazione data a pag. 233 di I. R. Shafarevich: « Basic algebraic geometry », Berlin 1974.

precisamente è facile vedere che se $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ è una base canonica secondo Fardoux-Châtelet (ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi) allora \mathcal{B} è una sequenza normale (cfr. def. 4 sopra) che genera l'ideale. D'altra parte una sequenza normale si può trasformare in una sequenza normale ridotta (cfr. def. 5 sopra) $\mathcal{B}' = \{f'_0, f'_1, \dots, f'_n\}$ sottraendo da ogni polinomio una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono. \mathcal{B}' così ottenuta genera lo stesso ideale di \mathcal{B} ; inoltre \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono equivalenti nel senso di Fardoux. Possiamo dunque concludere che per ogni base canonica esiste una base canonica equivalente che è il sistema normale di generatori.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHÂTELET, F. *Colloque de Théorie des nombres d'Oberwolfach*, 1964.
- [2] FARDOUX, G. Bases réduites d'idéaux de $A[x]$, A , anneaux principal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 262 (1966), pp. 1146-1148.
- [3] ——— *Les idéaux des anneaux de polynômes à coefficients entiers et leurs applications*. (Tesi di dottorato, 1970.)

(Reçu le 25 janvier 1977)

Raffaella Franci
Laura Toti Rigatelli

Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze F.M.N.
Via del Capitano 15
I - 53100 — Siena