Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1977)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

Autor: Fontaine, André

Kapitel: IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude DE DEUX MATRICES

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48921

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude de deux matrices

A) *Spécifique d'un endomorphisme f de E_n.* On choisit, une fois pour toutes, une relation d'ordre ω sur $\mathbf{C}$. Le spécifique de f est formé

1°) *du spectre ordonné de f* : $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s},$

$$(\lambda_1 \,\omega\, \lambda_2 \,\omega \ldots \lambda_{s-1} \,\omega\, \lambda_s)\,.$$

2°) *des s profils* relatifs à chaque valeur propre:

$$\{ d_1^v, d_2^v, \ldots, d_{pv-1}^v, d_{pv}^v = d_v = r_v \} \quad (v = 1, 2, \ldots, s)\,.$$

B) *Spécifique d'une matrice A (n, n).* Soient deux bases $(\mathscr{J})$ et $(\mathscr{J}')$ de E_n. Considérons les endomorphismes f se traduisant par A sur $(\mathscr{J})$, f' se traduisant par A sur $(\mathscr{J}')$.

On démontre facilement que le spécifique de f coincide avec celui de f' (même spectre ordonné et mêmes profils). Ce qui justifie la définition:

Le spécifique d'une matrice A (n, n) est le spécifique commun à tous les endomorphismes se traduisant par A, sur toutes bases possibles de E_n.

C) *Première bijection.* Il y a bijection entre

$$\{ \text{matrices transjordaniennes } T \} \text{ et } \{ \text{spécifiques } (S) \}$$

$T \leftrightarrow S$ (S étant le spécifique qu'enregistre T).

D) *Seconde bijection.*

a) Soit un représentant A d'une classe d'équivalence (C_A) dans l'ensemble des matrices (n, n). Considérons une base quelconque $(\mathscr{J})$ et soit f l'endomorphisme traduit par A sur $(\mathscr{J})$; prenons la réduite transjordanienne T de f: *le même f* est traduit

   α) par A sur $(\mathscr{J})$.

   β) par T sur (S) (base canonique de f).

b) Dans une même classe (C_A), il ne peut y avoir deux représentants transjordaniens distincts. Supposons deux transjordaniennes équivalentes; elles traduisent le même endomorphisme f sur deux bases d'où

$$\text{spécifique de } f = \text{spécifique de } T = \text{spécifique de } T'.$$

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* { matrices transjordaniennes T} *et* { Classes d'équivalence (C_A) }
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

{ classes d'équivalence (C_A) } et { spécifiques (S) }.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) THÉORÈME. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. APPLICATIONS

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^v et les indices p_v) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$