

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE  
**Autor:** Fontaine, André  
**Kapitel:** III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE f  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48921>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE $f$

A) *Choix d'une première base de réduction.*  $g_v$  applique  $K^v$  dans  $K^v$ . Donc  $f = g_v + \lambda_v e$  applique aussi  $K^v$  dans  $K^v$ . La matrice  $M$  traduisant  $f$  sur la base  $(\beta)$  précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés* :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{M^1} & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & \boxed{M^2} & 0 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \boxed{M^s} & \\ \hline 0 & 0 & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} \updownarrow \beta^1 \\ \updownarrow \beta^2 \\ \updownarrow \beta^s \end{array}$$

Blocs

$M^1$ : matrice  $(r_1, r_1)$   
 $M^2$ : matrice  $(r_2, r_2)$   
 -----  
 $M^s$ : matrice  $(r_s, r_s)$

Tous les éléments hors des blocs sont nuls;  $\beta^v$  = base quelconque de  $K^v$ .

B) *Construction de la réduite transjordanienne  $T$  de  $f$ .* Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque  $\lambda_v$ , au lieu d'une base quelconque  $\beta^v$  de  $K^v$ , une « base hiérarchisée » de  $K^v$ . Pour simplifier les notations, l'indice  $v$  sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre  $(\lambda_v)$  on ait (pour  $g_v$ ):

les noyaux itérés  $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^v$ , ( $p=4$ ),

leurs dimensions  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 6$ ,  $d_3 = 8$ ,  $d_4 = 9 = d$ , ( $d=r=9$ ),

les sauts décroissants  $\delta_1 = 4$ ,  $\delta_2 = 2$ ,  $\delta_3 = 2$ ,  $\delta_4 = 1$ .

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de  $K_4$  et remontant vers  $K_1$ ; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque  $S_4$  des supplémentaires de  $K_3$  dans  $K_4$ ,  $\dim S_4 = \delta_4 = 1$ . Dans  $S_4$  prenons une base formée d'un vecteur  $\varepsilon_9$ .

2°) On sait que  $g(S_4) \subset K_3$  et  $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$ . Par suite,  $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$ . Or  $\dim [K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$ . Cette inégalité établit que  $K_2 \oplus g(S_4)$  est un sous-espace strict de  $K_3$ . On choisit l'un quelconque  $\Omega$  des sous-espaces supplémentaires

de  $K_2 \oplus g(S_4)$  sur  $K_3$ ;  $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$ .  $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$  est un sous-espace supplémentaire de  $K_2$  sur  $K_3$ .

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2.$$

On prendra pour base de  $S_3$ :  $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9), \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$ .

3<sup>o</sup>) On part de  $S_3$  et l'on forme  $g(S_3)$ ;  $\dim g(S_3) = \delta_3$  et  $g(S_3) \subset K_2$ ,  $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$ ,  $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$ , car actuellement on a  $\delta_3 = \delta_2$ . Donc  $g(S_3)$  est un sous-espace supplémentaire  $g(S_3) = S_2$  de  $K_1$  sur  $K_2$ ;  $\delta_3 > \delta_4$  avait nécessité l'introduction d'un sous-espace  $\Omega$  pour obtenir  $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$ ; ici  $\delta_2 = \delta_3$  et directement  $S_2 = g(S_3)$ . On prendra comme base de  $S_2$  les deux vecteurs ( $\delta_2 = 2$ ):  $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$  et  $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$ .

4<sup>o</sup>)  $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$ ;  $g(S_2)$  est un sous-espace strict de  $K_1$ , lequel a pour dimension  $d_1 = \delta_1 = 4$ . Prenons l'un quelconque des supplémentaires  $\Omega'$  de  $g(S_2)$  sur  $K_1 (=S_1)$ ,  $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$ ,  $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$ .

Prenons comme base de  $K_1 = S_1$ :  $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ , où  $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$ ,  $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  formant une base quelconque de  $\Omega'$ . Au total sur la base  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$  l'application  $g_v$  de  $K^v$  dans  $K^v$  ( $g_v = f - \lambda_v e$ ) se traduira par le bloc  $T'^v$  dit bloc transjordanien. On déduira de  $T'^v$  le nouveau bloc transjordanien  $T^v$  traduisant sur la même base (base « canonique pour  $\lambda_v$  ») l'application  $f$  de  $K^v$  dans  $K^v$ . Le passage de  $T'^v$  à  $T^v$  se fera en remplaçant par  $\lambda_v$  les zéros de la diagonale principale de  $T'^v$ .

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|cc} \lambda_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 \\ \hline & & & & \lambda_v & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_v & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & \lambda_v & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda_v \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \lambda_v \end{array} \right] \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow S_1 = K_1 \rightarrow \leftarrow S_2 \rightarrow \leftarrow S_3 \rightarrow \leftarrow S_4 \rightarrow \quad \leftarrow \delta_1 = d_1 \rightarrow \leftarrow \delta_2 \rightarrow \leftarrow \delta_3 \rightarrow \leftarrow \delta_4 \rightarrow \\ \text{Matrice } T'^v (g_v \text{ restreinte à } K^v) \quad \text{Matrice } T^v (f \text{ restreinte à } K^v) \end{array}$$

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de  $S_{p_v}$  supplémentaire arbitraire de  $K_{p_v-1}^v$  sur  $K_{p_v}^v$ .

*Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordanienne*

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & & \\ \hline & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{array}{cccc} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{array}{cc} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{array}} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & & \\ \hline & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{array}{cccc} \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{array}{cc} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{array}} \end{array} \right] \\
 T' & T''
 \end{array}$$

$T'$  = matrice diagonale  
 = réduite transjordanienne de  $f'$   
 $f'$  et  $f''$  ont le même spectre:

$T''$  = matrice « one by one step »  
 = réduite transjordanienne de  $f''$   
 $\{ \underbrace{\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3} \}$ .

Mais les profils sont

$$\begin{aligned}
 1^0) \quad \text{pour } f' \quad & \{ d_1^1 = 1 = d_1 = r_1 \} \\
 & \{ d_1^2 = 4 = d_2 = r_2 \} \\
 & \{ d_1^3 = 2 = d_3 = r_3 \}
 \end{aligned}$$

Tous les indices = 1

$$\begin{aligned}
 2^0) \quad \text{pour } f'' \quad & \{ d_1^1 = d_1 = r_1 \} \\
 & \{ d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2 \} \\
 & \{ d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3 \}
 \end{aligned}$$

Tous les sauts = 1

*Remarque.* Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».