Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1977)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

Autor: Fontaine, André

Kapitel: III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE f

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48921

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

III. Réduite transjordanienne de f

A) *Choix d'une première base de réduction.* g_ν applique K^ν dans K^ν. Donc $f = g_\nu + \lambda_\nu e$ applique aussi K^ν dans K^ν. La matrice M traduisant f sur la base (β) précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés :*

$$\begin{bmatrix} M^1 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ & & \ddots \; 0 \\ 0 & 0 & M^s \end{bmatrix} \begin{matrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \\ \beta^s \end{matrix}$$

Blocs

M^1 : matrice (r_1, r_1)
M^2 : matrice (r_2, r_2)
- - - - - - - - - - - - - - -
M^s : matrice (r_s, r_s)

Tous les éléments hors des blocs sont nuls; β^ν = base quelconque de K^ν.

B) *Construction de la réduite transjordanienne T de f.* Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque λ_ν, au lieu d'une base quelconque β^ν de K^ν, une « base hiérarchisée » de K^ν. Pour simplifier les notations, l'indice ν sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre (λ_ν) on ait (pour g_ν):

les noyaux itérés $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^\nu$, $\quad (p=4)$,

leurs dimensions $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_3 = 8$, $d_4 = 9 = d$, $\quad (d=r=9)$,

les sauts décroissants $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 1$.

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de K_4 et remontant vers K_1; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque S_4 des supplémentaires de K_3 dans K_4, dim $S_4 = \delta_4 = 1$. Dans S_4 prenons une base formée d'un vecteur ε_9.

2°) On sait que $g(S_4) \subset K_3$ et $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$. Par suite, $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$. Or dim $[K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$. Cette inégalité établit que $K_2 \oplus g(S_4)$ est un sous-espace strict de K_3. On choisit l'un quelconque Ω des sous-espaces supplémentaires

de $K_2 \oplus g(S_4)$ sur K_3; $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$. $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$ est un sous-espace supplémentaire de K_2 sur K_3.

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2 .$$

On prendra pour base de S_3: $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9),\ \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$.

3°) On part de S_3 et l'on forme $g(S_3)$; $\dim g(S_3) = \delta_3$ et $g(S_3) \subset K_2$, $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$, $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$, car actuellement on a $\delta_3 = \delta_2$. Donc $g(S_3)$ est un sous-espace supplémentaire $g(S_3) = S_2$ de K_1 sur K_2; $\delta_3 > \delta_4$ avait nécessité l'introduction d'un sous-espace Ω pour obtenir $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$; ici $\delta_2 = \delta_3$ et directement $S_2 = g(S_3)$. On prendra comme base de S_2 les deux vecteurs ($\delta_2 = 2$): $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$ et $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$.

4°) $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$; $g(S_2)$ est un sous-espace strict de K_1, lequel a pour dimension $d_1 = \delta_1 = 4$. Prenons l'un quelconque des supplémentaires Ω' de $g(S_2)$ sur K_1 ($= S_1$), $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$, $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$.

Prenons comme base de $K_1 = S_1$: $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$, où $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$, $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$, ε_1 et ε_2 formant une base quelconque de Ω'. Au total sur la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$ l'application g_ν de K^ν dans K^ν ($g_\nu = f - \lambda_\nu e$) se traduira par le bloc T'^ν dit bloc transjordanien. On déduira de T'^ν le nouveau bloc transjordanien T^ν traduisant sur la même base (base « canonique pour λ_ν ») l'application f de K^ν dans K^ν. Le passage de T'^ν à T^ν se fera en remplaçant par λ_ν les zéros de la diagonale principale de T'^ν.

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & \\
 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
\lambda_\nu & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_\nu & 0 & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & & 0 & \\
\hline
 & & & & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & & & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & & & & \lambda_\nu & 0 & \\
 & 0 & & & & 0 & 0 & \lambda_\nu & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda_\nu
\end{array}\right] \\
\leftarrow S_1 = K_1 \rightarrow \leftarrow S_2 \rightarrow \leftarrow S_3 \rightarrow \leftarrow S_4 \rightarrow \qquad \leftarrow \delta_1 = d_1 \rightarrow \leftarrow \delta_2 \rightarrow \leftarrow \delta_3 \rightarrow \leftarrow \delta_4 \rightarrow
\end{array}$$

Matrice T'^ν (g_ν restreinte à K^ν) Matrice T^ν (f restreinte à K^ν)

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de S_{p_ν} supplémentaire arbitraire de $K^{\nu}_{p_\nu - 1}$ sur $K^{\nu}_{p_\nu}$.

Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordaniennes

$$\left[\begin{array}{c|cccc|cc} \lambda_1 & & 0 & & & & 0 \\ \hline & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & & \\ \hline 0 & & 0 & & & \lambda_3 & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|cccc|cc} \lambda_1 & & 0 & & & & 0 \\ \hline & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & & \\ \hline 0 & & 0 & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda_3 \end{array}\right]$$

T' $\qquad\qquad\qquad\qquad$ T''

T' = matrice diagonale
= réduite transjordanienne de f'
f' et f'' ont le même spectre:

T'' = matrice « one by one step»
= réduite transjordanienne de f''
$\{ \underbrace{\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3} \}$.

Mais les profils sont

1°) pour $f' \{ d_1^1 = 1 = d_1 = r_1 \}$
$\{ d_1^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$
$\{ d_1^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les indices = 1

2°) pour $f'' \{ d_1^1 = d_1 = r_1 \}$
$\{ d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$
$\{ d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les sauts = 1

Remarque. Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1 ,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».