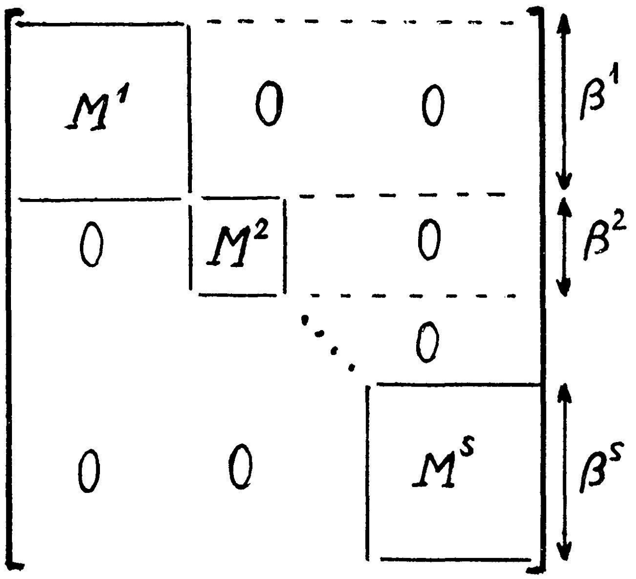
Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE
Autor: Fontaine, André
Kapitel: III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE f
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48921

III. Réduite transjordanienne de f

A) *Choix d'une première base de réduction.* g_v applique K^v dans K^v. Donc $f = g_v + \lambda_v e$ applique aussi K^v dans K^v. La matrice M traduisant f sur la base (β) précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés :*



Blocs

M^1: matrice (r_1, r_1)
M^2: matrice (r_2, r_2)
- - - - - - - - - - - - - - -
M^s: matrice (r_s, r_s)

Tous les éléments hors des blocs sont nuls; β^v = base quelconque de K^v.

B) *Construction de la réduite transjordanienne T de f.* Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque λ_v, au lieu d'une base quelconque β^v de K^v, une « base hiérarchisée » de K^v. Pour simplifier les notations, l'indice v sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre (λ_v) on ait (pour g_v):

les noyaux itérés $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^v$, $\quad (p=4)$,

leurs dimensions $d_1 = 4,\ d_2 = 6,\ d_3 = 8,\ d_4 = 9 = d, \quad (d=r=9)$,

les sauts décroissants $\delta_1 = 4,\ \delta_2 = 2,\ \delta_3 = 2,\ \delta_4 = 1$.

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de K_4 et remontant vers K_1; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque S_4 des supplémentaires de K_3 dans K_4, dim $S_4 = \delta_4 = 1$. Dans S_4 prenons une base formée d'un vecteur ε_9.

2°) On sait que $g(S_4) \subset K_3$ et $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$. Par suite, $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$. Or dim $[K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$. Cette inégalité établit que $K_2 \oplus g(S_4)$ est un sous-espace strict de K_3. On choisit l'un quelconque Ω des sous-espaces supplémentaires de $K_2 \oplus g(S_4)$ sur K_3; $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$. $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$ est un sous-espace supplémentaire de K_2 sur K_3.

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2\,.$$

On prendra pour base de S_3: $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9),\ \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$.

3°) On part de S_3 et l'on forme $g(S_3)$; $\dim g(S_3) = \delta_3$ et $g(S_3) \subset K_2$, $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$, $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$, car actuellement on a $\delta_3 = \delta_2$. Donc $g(S_3)$ est un sous-espace supplémentaire $g(S_3) = S_2$ de K_1 sur K_2; $\delta_3 > \delta_4$ avait nécessité l'introduction d'un sous-espace Ω pour obtenir $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$; ici $\delta_2 = \delta_3$ et directement $S_2 = g(S_3)$. On prendra comme base de S_2 les deux vecteurs ($\delta_2 = 2$): $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$ et $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$.

4°) $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$; $g(S_2)$ est un sous-espace strict de K_1, lequel a pour dimension $d_1 = \delta_1 = 4$. Prenons l'un quelconque des supplémentaires Ω' de $g(S_2)$ sur K_1 ($= S_1$), $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$, $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$.

Prenons comme base de $K_1 = S_1$: $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$, où $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$, $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$, ε_1 et ε_2 formant une base quelconque de Ω'. Au total sur la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$ l'application g_ν de K^ν dans K^ν ($g_\nu = f - \lambda_\nu e$) se traduira par le bloc T'^ν dit bloc transjordanien. On déduira de T'^ν le nouveau bloc transjordanien T^ν traduisant sur la même base (base « canonique pour λ_ν ») l'application f de K^ν dans K^ν. Le passage de T'^ν à T^ν se fera en remplaçant par λ_ν les zéros de la diagonale principale de T'^ν.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\\ \varepsilon_7\\ \varepsilon_8\\ \varepsilon_9
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
\lambda_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \lambda_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 1\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\nu
\end{array}\right]$$

$\longleftarrow S_1 = K_1 \longrightarrow\!\!\longleftarrow S_2 \rightarrow\!\leftarrow S_3 \rightarrow\!\leftarrow S_4 \rightarrow$ $\qquad$ $\longleftarrow \delta_1 = d_1 \longrightarrow\!\!\longleftarrow \delta_2 \rightarrow\!\leftarrow \delta_3 \rightarrow\!\leftarrow \delta_4 \rightarrow$

Matrice T'^ν (g_ν restreinte à K^ν) $\qquad$ Matrice T^ν (f restreinte à K^ν)

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de $S_{p\nu}$ supplémentaire arbitraire de $K^{\nu}_{p\nu-1}$ sur $K^{\nu}_{p\nu}$.

Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordaniennes

$$
\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 \\
0 & \begin{matrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix} & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{matrix}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 \\
0 & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix} & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

T' $\qquad\qquad$ T''

T' = matrice diagonale
= réduite transjordanienne de f'

T'' = matrice « one by one step»
= réduite transjordanienne de f''

f' et f'' ont le même spectre:

$$\{ \underbrace{\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3} \} .$$

Mais les profils sont

1°) pour $f' \{ d_1^1 = 1 = d_1 = r_1 \}$
$\{ d_1^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$
$\{ d_1^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les indices = 1

2°) pour $f'' \{ d_1^1 = d_1 = r_1 \}$
$\{ d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$
$\{ d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les sauts = 1

Remarque. Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1 ,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».