Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1977)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

Autor: Fontaine, André

Kapitel: II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48921

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leqslant d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_{p-1} \geqslant \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \ldots$$

3°) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\dfrac{d_q - d_{q-1}}{1} \geqslant \dfrac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}\, M_q) \geqslant$ pente (M_q, M_{q+1}).

II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \ldots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} \; [r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n] \, .$$

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_\nu = f - \lambda_\nu e$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, e étant l'endomorphisme identique; g_ν admet la valeur propre 0, à l'ordre r_ν. Pour chaque ν, on détermine le profil de g_ν pour la valeur propre 0, soit $\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p_\nu}^\nu \}$ où $d_q = \dim \operatorname{Ker} (g_\nu^q)$. Le noyau maximum de g_ν sera désigné par K^ν $[K^\nu = \operatorname{Ker} (g_\nu^{p_\nu})]$. On a:

$$\begin{cases} K_1^\nu \subset K_2^\nu \subset \ldots \subset K_{p_\nu}^\nu = K^\nu = K_{p_\nu+1}^\nu = \ldots \\ d_1^\nu < d_2^\nu \ldots < d_{p_\nu}^\nu = d^\nu = d_{p_\nu+1} = \ldots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^\nu = r_\nu$.
Par définitions;

$$\begin{cases} 1^\circ) \; \{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p_\nu}^\nu \} = \text{profil de } g_\nu \text{ pour } \lambda = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_\nu \\ 2^\circ) \; p_\nu = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_\nu. \end{cases}$$

B) Théorème de la disjonction. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{ 0 \}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).

C) *Etude de l'application* g_α^k $(k \geqslant 1)$

1°) *L'application* g_α^k *applique* K^α *dans* K^α. On a vu que $g_\alpha = g_\alpha^1$ applique K^α dans K^α, d'où, a fortiori

$$g_\alpha^k [K^\alpha] \subset K^\alpha \quad \text{(Inclusion stricte).}$$

2°) *L'application* g_α^k *restreinte à* K^β $(\beta \neq \alpha)$ *est une bijection de* K^β *sur* K^β.

a) g_α^k applique K^β dans K^β. Remarquons que $g_1 = f - \lambda_1 e$ et $g_2 = f - \lambda_2 e$ commutent, donc $g_1^k \circ g_2^{p_2} = g_2^{p_2} \circ g_1^k$ (on a pris pour simplifier $\alpha = 1$, $\beta = 2$).

$x \in K^2 \Rightarrow g_2^{p_2}(x) = 0 \Rightarrow (g_1^k \circ g_2^{p_2})(x) = 0 \Rightarrow g_2^{p_2}[g_1^k(x)] \Rightarrow g_1^k(x) \in K^2$ ou $g_1^k [K^2] \subset K^2$.

b) Mais cette application de K^β dans K^β est bijective car son noyau se réduit à 0. Soit en effet $x \in K^\beta$ tel que $g_\alpha^k(x) = 0$, on a $x \in K_k^\alpha \subset K^\alpha$, d'où $x \in K^\alpha \cap K^\beta$ et $x = 0$ d'après B).

D) *Comparaison* de K^μ et J^ν. Désignons par J^ν le sous-espace image de $g_\nu^{p_\nu}$: $J_\nu = g_\nu^{p_\nu}(E_n)$.

1°) Supposons $\nu \neq \mu$. Le théorème C 2°) où $k = p_\nu$ donne $K^\mu = g_\nu^{p_\nu}(K^\mu)$. Mais $K^\mu \subset E_n$. Donc $K^\mu \subset g_{g\nu}^{p_\nu}(E_n) = J^\nu$.

2°) Prenons $\nu = \mu$. On sait que $K_{2p_\nu}^\nu = K_{p_\nu}^\nu = K^\nu$. Si $x \in K^\nu \cap J^\nu$ on a $g_\nu^{p_\nu}(x) = 0$ et il existe $y \in E_n$ tel que $x = g_\nu^{p_\nu}(y)$.

Par suite $g_\nu^{2p_\nu}(y) = 0$ et $y \in K^\nu$ d'où $x = 0$. Donc $K^\nu \cap J^\nu = \{0\}$. Mais comme $K^\nu = \text{Ker}\,[g^{p_\nu}]$ et $J^\nu = \text{Im}\,[g_\nu^{p_\nu}]$, on a $\dim K^\nu + \dim J^\nu = n$.

Il en résulte que K^ν et J^ν sont deux sous-espaces supplémentaires de E_n. Au total:

$$\text{Si } \nu \neq \mu: \quad K^\nu \subset J^\mu \quad \text{et} \quad K^\mu \subset J^\nu,$$

$$\text{Si } \nu = \mu: \quad K^\nu \oplus J^\nu = E_n.$$

E) THÉORÈME. $K^1 \oplus K^2 \oplus \ldots \oplus K^s = E_n$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ et ν des entiers distincts. On a $K^\alpha + K^\beta + \ldots + K^\rho \subset J^\nu$ d'où $(K^\alpha + K^\beta + \ldots + K^\rho) \cap K^\nu = \{0\}$. La somme $K^1 + K^2 + \ldots + K^s$ est donc directe et comme sa dimension est $d_1 + d_2 + \ldots + d_s = n$ on a $K^1 \oplus K^2 \oplus \ldots \oplus K^s = E_n$.

3°) Prenant pour chaque K^ν une base $\{\beta^\nu\}$ (formée de $r_\nu = d_\nu$ vecteurs) la *juxtaposition de ces s bases* donnera une base $\{(\beta)\}$ de E_n.