

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE  
**Autor:** Fontaine, André  
**Kapitel:** I. Itération d'un endomorphisme (singulier)  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48921>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André FONTAINE

## I. ITÉRATION D'UN ENDOMORPHISME (SINGULIER)

*Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés*

$E_n$  étant un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{C}$ , soit  $g$  un endomorphisme de  $E_n$  dans  $E_n$ ; nous le supposons singulier, c'est-à-dire  $\dim \text{Ker}(g) \geq 1$ ;  $\text{Ker}(g)$  est le sous-espace propre afférent à la valeur propre  $\lambda = 0$  de  $g$ .

A) On considère la suite des « noyaux itérés de  $g$  »:

$$(1) \quad \text{Ker}(g) = K_1, \text{Ker}(g^2) = K_2, \dots, \text{Ker}(g^q) = K_q, \dots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés,  $K_q \subset K_{q+1}$ . La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

$$(2) \quad d_1 = \dim(K_1) \leq d_2 = \dim(K_2) \leq \dots \leq d_q = \dim(K_q) \leq \dots \leq n.$$

B) Il existe un unique entier  $p$  tel que

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \dots, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \dots$$

(inclusion au sens strict).

$d_p = d$  est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que  $d = r$ ,  $r$  étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda = 0$  de l'équation caractéristique de  $g$  [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations  $0 < p \leq d = r \leq n$ .

$p$  se nommera *l'indice* de  $g$  pour la valeur propre  $\lambda = 0$ ; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur  $g$  pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum  $d = r$ .

D) *Le profil* d'un endomorphisme singulier  $g$  est formé des  $p$  nombres  $\{d_1, d_2, \dots, d_{p-1}, d_p = r\}$ . Cette suite, extraite de (2), est strictement *croissante*. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points  $M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1}, \dots$ ; le point  $M_q$  ayant pour coordonnées  $x_q = q \in \mathbf{N}$ ,  $y_q = d_q$ . On y adjoindra le point  $M_0 (0, 0)$  qui correspond à  $g^0 = e$ , endomorphisme identique,  $d_0 = 0$ . La ligne brisée de sommets successifs  $M_0 = 0, M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1} \dots$  prendra également le nom de profil de l'endomorphisme singulier  $g$ . A partir du profil de  $g$ , on construira la suite de ses *sauts*

$$(3) \quad \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q, \dots\} \text{ où } \delta_q = d_q - d_{q-1} \\ (\text{en particulier } \delta_1 = d_1 - d_0 = d_1).$$

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

THÉORÈME DE LA CONVEXITÉ.  $\delta_{q+1} \leq \delta_q$ .

Soit  $S_{q+1}$  un sous-espace supplémentaire de  $K_q$  sur  $K_{q+1}$ . Considérons l'image  $g(S_{q+1})$  de  $S_{q+1}$  par  $g$ .

1°) Soit  $x$  un vecteur non nul de  $S_{q+1}$ . On a  $g^{q+1}(x) = 0$  et  $g^q(x) \neq 0$  donc  $g(x) \in K_q$  et  $g(x) \notin K_{q-1}$ , d'où

$$(4) \quad g(S_{q+1}) \subset K_q ; \quad g(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{0\}.$$

On déduit de (4)

$$(5) \quad \dim g(S_{q+1}) \leq d_q - d_{q-1}.$$

2°) Montrons que la restriction de  $g$  à  $S_{q+1}$  est *injective*.

Soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_\alpha\}$  où  $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$  une base de  $S_{q+1}$ . Une partie génératrice de  $g(S_{q+1})$  est  $\Sigma = \{g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_\alpha)\}$ . Si l'on montre que  $\Sigma$  est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient  $\alpha$  scalaires  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\alpha$  tels que

$$\rho_1 g(v_1) + \rho_2 g(v_2) + \dots + \rho_\alpha g(v_\alpha) = 0.$$

On a donc  $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$  et aussi  $W \in K_1 \cap S_{q+1}$ .

Mais  $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{0\}$ , d'où  $W = 0$  et  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\alpha = 0$ , ce qui établit que  $\Sigma$  est libre.

Il en résulte

$$(6) \quad \dim g(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$$

Rapprochons (5) et (6):  $d_{q+1} - d_q \leq d_q - d_{q-1}$  ou  $\delta_{q+1} \leq \delta_q$ , d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{p-1} \geq \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \dots$$

3<sup>o</sup>) La ligne brisée profil de  $g$  pour  $\lambda = 0$  est convexe car  $\frac{d_q - d_{q-1}}{1} \geq \frac{d_{q+1} - d_q}{1}$  s'écrit pente  $(M_{q-1}, M_q) \geq$  pente  $(M_q, M_{q+1})$ .

## II. ANALYSE D'UN ENDOMORPHISME $f$ . THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de  $f$

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} [r_1 + r_2 + \dots + r_s = n].$$

Le spectre de  $f$  s'écrit:  $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des  $s$  valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers  $g_v = f - \lambda_v e$  ( $v = 1, 2, \dots, s$ ),  $e$  étant l'endomorphisme identique;  $g_v$  admet la valeur propre 0, à l'ordre  $r_v$ . Pour chaque  $v$ , on détermine le profil de  $g_v$  pour la valeur propre 0, soit  $\{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\}$  où  $d_q = \dim \text{Ker}(g_v^q)$ . Le noyau maximum de  $g_v$  sera désigné par  $K^v$  [ $K^v = \text{Ker}(g_v^{p_v})$ ]. On a:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^v \subset K_2^v \subset \dots \subset K_{p_v}^v = K^v = K_{p_v+1}^v = \dots \\ d_1^v < d_2^v \dots < d_{p_v}^v = d^v = d_{p_v+1}^v = \dots \end{array} \right.$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que  $d^v = r_v$ .

Par définitions;

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^o) \{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\} = \text{profil de } g_v \text{ pour } \lambda = 0 \\ \quad \quad \quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_v \\ 2^o) p_v = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_v. \end{array} \right.$$

B) THÉORÈME DE LA DISJONCTION. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{0\}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).