

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE  
**Autor:** Fontaine, André  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48921>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André FONTAINE

## I. ITÉRATION D'UN ENDOMORPHISME (SINGULIER)

*Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés*

$E_n$  étant un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{C}$ , soit  $g$  un endomorphisme de  $E_n$  dans  $E_n$ ; nous le supposons singulier, c'est-à-dire  $\dim \text{Ker}(g) \geq 1$ ;  $\text{Ker}(g)$  est le sous-espace propre afférent à la valeur propre  $\lambda = 0$  de  $g$ .

A) On considère la suite des « noyaux itérés de  $g$  »:

$$(1) \quad \text{Ker}(g) = K_1, \text{Ker}(g^2) = K_2, \dots, \text{Ker}(g^q) = K_q, \dots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés,  $K_q \subset K_{q+1}$ . La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

$$(2) \quad d_1 = \dim(K_1) \leq d_2 = \dim(K_2) \leq \dots \leq d_q = \dim(K_q) \leq \dots \leq n.$$

B) Il existe un unique entier  $p$  tel que

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \dots, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \dots$$

(inclusion au sens strict).

$d_p = d$  est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que  $d = r$ ,  $r$  étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda = 0$  de l'équation caractéristique de  $g$  [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations  $0 < p \leq d = r \leq n$ .

$p$  se nommera l'indice de  $g$  pour la valeur propre  $\lambda = 0$ ; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur  $g$  pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum  $d = r$ .

D) Le profil d'un endomorphisme singulier  $g$  est formé des  $p$  nombres  $\{d_1, d_2, \dots, d_{p-1}, d_p = r\}$ . Cette suite, extraite de (2), est strictement croissante. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points  $M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1}, \dots$ ; le point  $M_q$  ayant pour coordonnées  $x_q = q \in \mathbb{N}, y_q = d_q$ . On y adjoindra le point  $M_0(0, 0)$  qui correspond à  $g^0 = e$ , endomorphisme identique,  $d_0 = 0$ . La ligne brisée de sommets successifs  $M_0 = 0, M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1} \dots$  prendra également le nom de profil de l'endomorphisme singulier  $g$ . A partir du profil de  $g$ , on construira la suite de ses sauts

$$(3) \quad \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q, \dots\} \text{ où } \delta_q = d_q - d_{q-1} \\ (\text{en particulier } \delta_1 = d_1 - d_0 = d_1).$$

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

THÉORÈME DE LA CONVEXITÉ.  $\delta_{q+1} \leq \delta_q$ .

Soit  $S_{q+1}$  un sous-espace supplémentaire de  $K_q$  sur  $K_{q+1}$ . Considérons l'image  $g(S_{q+1})$  de  $S_{q+1}$  par  $g$ .

1°) Soit  $x$  un vecteur non nul de  $S_{q+1}$ . On a  $g^{q+1}(x) = 0$  et  $g^q(x) \neq 0$  donc  $g(x) \in K_q$  et  $g(x) \notin K_{q-1}$ , d'où

$$(4) \quad g(S_{q+1}) \subset K_q; \quad g(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{0\}.$$

On déduit de (4)

$$(5) \quad \dim g(S_{q+1}) \leq d_q - d_{q-1}.$$

2°) Montrons que la restriction de  $g$  à  $S_{q+1}$  est *injective*.

Soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_\alpha\}$  où  $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$  une base de  $S_{q+1}$ . Une partie génératrice de  $g(S_{q+1})$  est  $\Sigma = \{g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_\alpha)\}$ . Si l'on montre que  $\Sigma$  est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient  $\alpha$  scalaires  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\alpha$  tels que

$$\rho_1 g(v_1) + \rho_2 g(v_2) + \dots + \rho_\alpha g(v_\alpha) = 0.$$

On a donc  $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$  et aussi  $W \in K_1 \cap S_{q+1}$ .

Mais  $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{0\}$ , d'où  $W = 0$  et  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\alpha = 0$ , ce qui établit que  $\Sigma$  est libre.

Il en résulte

$$(6) \quad \dim g(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$$

Rapprochons (5) et (6):  $d_{q+1} - d_q \leq d_q - d_{q-1}$  ou  $\delta_{q+1} \leq \delta_q$ , d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{p-1} \geq \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \dots$$

3°) La ligne brisée profil de  $g$  pour  $\lambda = 0$  est convexe car  $\frac{d_q - d_{q-1}}{1} \geq \frac{d_{q+1} - d_q}{1}$  s'écrit pente  $(M_{q-1}, M_q) \geq \text{pente}(M_q, M_{q+1})$ .

## II. ANALYSE D'UN ENDOMORPHISME $f$ . THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de  $f$

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} [r_1 + r_2 + \dots + r_s = n].$$

Le spectre de  $f$  s'écrit:  $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des  $s$  valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers  $g_v = f - \lambda_v e$  ( $v = 1, 2, \dots, s$ ),  $e$  étant l'endomorphisme identique;  $g_v$  admet la valeur propre 0, à l'ordre  $r_v$ . Pour chaque  $v$ , on détermine le profil de  $g_v$  pour la valeur propre 0, soit  $\{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\}$  où  $d_q = \dim \text{Ker}(g_v^q)$ . Le noyau maximum de  $g_v$  sera désigné par  $K^v$  [ $K^v = \text{Ker}(g_v^{p_v})$ ]. On a:

$$\begin{cases} K_1^v \subset K_2^v \subset \dots \subset K_{p_v}^v = K^v = K_{p_v+1}^v = \dots \\ d_1^v < d_2^v < \dots < d_{p_v}^v = d^v = d_{p_v+1}^v = \dots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que  $d^v = r_v$ .

Par définitions;

$$\begin{cases} 1^\circ) \{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\} = \text{profil de } g_v \text{ pour } \lambda = 0 \\ \quad \quad \quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_v \\ 2^\circ) p_v = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_v. \end{cases}$$

B) THÉORÈME DE LA DISJONCTION. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{0\}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).



C) Etude de l'application  $g_\alpha^k$  ( $k \geq 1$ )

1°) L'application  $g_\alpha^k$  applique  $K^\alpha$  dans  $K^\alpha$ . On a vu que  $g_\alpha = g_\alpha^1$  applique  $K^\alpha$  dans  $K^\alpha$ , d'où, a fortiori

$$g_\alpha^k [K^\alpha] \subset K^\alpha \quad (\text{Inclusion stricte}).$$

2°) L'application  $g_\alpha^k$  restreinte à  $K^\beta$  ( $\beta \neq \alpha$ ) est une bijection de  $K^\beta$  sur  $K^\beta$ .

a)  $g_\alpha^k$  applique  $K^\beta$  dans  $K^\beta$ . Remarquons que  $g_1 = f - \lambda_1 e$  et  $g_2 = f - \lambda_2 e$  commutent, donc  $g_1^k \circ g_2^{p_2} = g_2^{p_2} \circ g_1^k$  (on a pris pour simplifier  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ).

$$x \in K^2 \Rightarrow g_2^{p_2}(x) = 0 \Rightarrow (g_1^k \circ g_2^{p_2})(x) = 0 \Rightarrow g_2^{p_2}[g_1^k(x)] \Rightarrow g_1^k(x) \in K^2$$

ou  $g_1^k [K^2] \subset K^2$ .

b) Mais cette application de  $K^\beta$  dans  $K^\beta$  est bijective car son noyau se réduit à 0. Soit en effet  $x \in K^\beta$  tel que  $g_\alpha^k(x) = 0$ , on a  $x \in K_k^\alpha \subset K^\alpha$ , d'où  $x \in K^\alpha \cap K^\beta$  et  $x = 0$  d'après B).

D) Comparaison de  $K^\mu$  et  $J^\nu$ . Désignons par  $J^\nu$  le sous-espace image de  $g_\nu^{p_\nu}$ :  $J^\nu = g_\nu^{p_\nu}(E_n)$ .

1°) Supposons  $\nu \neq \mu$ . Le théorème C 2°) où  $k = p_\nu$  donne  $K^\mu = g_\nu^{p_\nu}(K^\mu)$ . Mais  $K^\mu \subset E_n$ . Donc  $K^\mu \subset g_\nu^{p_\nu}(E_n) = J^\nu$ .

2°) Prenons  $\nu = \mu$ . On sait que  $K_{2p_\nu}^\nu = K_{p_\nu}^\nu = K^\nu$ . Si  $x \in K^\nu \cap J^\nu$  on a  $g_\nu^{p_\nu}(x) = 0$  et il existe  $y \in E_n$  tel que  $x = g_\nu^{p_\nu}(y)$ .

Par suite  $g_\nu^{2p_\nu}(y) = 0$  et  $y \in K^\nu$  d'où  $x = 0$ . Donc  $K^\nu \cap J^\nu = \{0\}$ . Mais comme  $K^\nu = \text{Ker}[g_\nu^{p_\nu}]$  et  $J^\nu = \text{Im}[g_\nu^{p_\nu}]$ , on a  $\dim K^\nu + \dim J^\nu = n$ .

Il en résulte que  $K^\nu$  et  $J^\nu$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $E_n$ .  
Au total:

$$\text{Si } \nu \neq \mu: \quad K^\nu \subset J^\mu \quad \text{et} \quad K^\mu \subset J^\nu,$$

$$\text{Si } \nu = \mu: \quad K^\nu \oplus J^\nu = E_n.$$

E) THÉORÈME.  $K^1 \oplus K^2 \oplus \dots \oplus K^s = E_n$ .

Soient en effet  $\alpha, \beta, \dots, \rho$  et  $\nu$  des entiers distincts. On a  $K^\alpha + K^\beta + \dots + K^\rho \subset J^\nu$  d'où  $(K^\alpha + K^\beta + \dots + K^\rho) \cap K^\nu = \{0\}$ . La somme  $K^1 + K^2 + \dots + K^s$  est donc directe et comme sa dimension est  $d_1 + d_2 + \dots + d_s = n$  on a  $K^1 \oplus K^2 \oplus \dots \oplus K^s = E_n$ .

3°) Prenant pour chaque  $K^\nu$  une base  $\{\beta^\nu\}$  (formée de  $r_\nu = d_\nu$  vecteurs) la juxtaposition de ces  $s$  bases donnera une base  $\{(\beta)\}$  de  $E_n$ .

### III. RÉDUITE TRANSJORDANIENNE DE $f$

A) *Choix d'une première base de réduction.*  $g_v$  applique  $K^v$  dans  $K^v$ . Donc  $f = g_v + \lambda_v e$  applique aussi  $K^v$  dans  $K^v$ . La matrice  $M$  traduisant  $f$  sur la base  $(\beta)$  précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés* :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{M^1} & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & \boxed{M^2} & 0 & & & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & \boxed{M^s} & & \\ \hline 0 & 0 & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} \updownarrow \beta^1 \\ \updownarrow \beta^2 \\ \updownarrow \beta^s \end{array}$$

Blocs

$M^1$ : matrice  $(r_1, r_1)$   
 $M^2$ : matrice  $(r_2, r_2)$   
 -----  
 $M^s$ : matrice  $(r_s, r_s)$

Tous les éléments hors des blocs sont nuls;  $\beta^v$  = base quelconque de  $K^v$ .

B) *Construction de la réduite transjordanienne  $T$  de  $f$ .* Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque  $\lambda_v$ , au lieu d'une base quelconque  $\beta^v$  de  $K^v$ , une « base hiérarchisée » de  $K^v$ . Pour simplifier les notations, l'indice  $v$  sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre  $(\lambda_v)$  on ait (pour  $g_v$ ):

les noyaux itérés  $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^v$ , ( $p=4$ ),

leurs dimensions  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 6$ ,  $d_3 = 8$ ,  $d_4 = 9 = d$ , ( $d=r=9$ ),

les sauts décroissants  $\delta_1 = 4$ ,  $\delta_2 = 2$ ,  $\delta_3 = 2$ ,  $\delta_4 = 1$ .

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de  $K_4$  et remontant vers  $K_1$ ; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque  $S_4$  des supplémentaires de  $K_3$  dans  $K_4$ ,  $\dim S_4 = \delta_4 = 1$ . Dans  $S_4$  prenons une base formée d'un vecteur  $\varepsilon_9$ .

2°) On sait que  $g(S_4) \subset K_3$  et  $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$ . Par suite,  $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$ . Or  $\dim [K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$ . Cette inégalité établit que  $K_2 \oplus g(S_4)$  est un sous-espace strict de  $K_3$ . On choisit l'un quelconque  $\Omega$  des sous-espaces supplémentaires

de  $K_2 \oplus g(S_4)$  sur  $K_3$ ;  $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$ .  $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$  est un sous-espace supplémentaire de  $K_2$  sur  $K_3$ .

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2.$$

On prendra pour base de  $S_3$ :  $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9), \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$ .

3<sup>o</sup>) On part de  $S_3$  et l'on forme  $g(S_3)$ ;  $\dim g(S_3) = \delta_3$  et  $g(S_3) \subset K_2$ ,  $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$ ,  $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$ , car actuellement on a  $\delta_3 = \delta_2$ . Donc  $g(S_3)$  est un sous-espace supplémentaire  $g(S_3) = S_2$  de  $K_1$  sur  $K_2$ ;  $\delta_3 > \delta_4$  avait nécessité l'introduction d'un sous-espace  $\Omega$  pour obtenir  $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$ ; ici  $\delta_2 = \delta_3$  et directement  $S_2 = g(S_3)$ . On prendra comme base de  $S_2$  les deux vecteurs ( $\delta_2 = 2$ ):  $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$  et  $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$ .

4<sup>o</sup>)  $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$ ;  $g(S_2)$  est un sous-espace strict de  $K_1$ , lequel a pour dimension  $d_1 = \delta_1 = 4$ . Prenons l'un quelconque des supplémentaires  $\Omega'$  de  $g(S_2)$  sur  $K_1 (= S_1)$ ,  $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$ ,  $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$ .

Prenons comme base de  $K_1 = S_1$ :  $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ , où  $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$ ,  $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  formant une base quelconque de  $\Omega'$ . Au total sur la base  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$  l'application  $g_v$  de  $K^v$  dans  $K^v$  ( $g_v = f - \lambda_v e$ ) se traduira par le bloc  $T'^v$  dit bloc transjordanien. On déduira de  $T'^v$  le nouveau bloc transjordanien  $T^v$  traduisant sur la même base (base « canonique pour  $\lambda_v$  ») l'application  $f$  de  $K^v$  dans  $K^v$ . Le passage de  $T'^v$  à  $T^v$  se fera en remplaçant par  $\lambda_v$  les zéros de la diagonale principale de  $T'^v$ .

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|cc} \lambda_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_v & 0 & 1 \\ \hline & & & & \lambda_v & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_v & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & \lambda_v & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda_v \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \lambda_v \end{array} \right] \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow S_1 = K_1 \rightarrow \leftarrow S_2 \rightarrow \leftarrow S_3 \rightarrow \leftarrow S_4 \rightarrow \quad \leftarrow \delta_1 = d_1 \rightarrow \leftarrow \delta_2 \rightarrow \leftarrow \delta_3 \rightarrow \leftarrow \delta_4 \rightarrow \\ \text{Matrice } T'^v (g_v \text{ restreinte à } K^v) \quad \text{Matrice } T^v (f \text{ restreinte à } K^v) \end{array}$$

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de  $S_{p_v}$  supplémentaire arbitraire de  $K_{p_v-1}^v$  sur  $K_{p_v}^v$ .

*Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordanienues*

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ \begin{array}{c|cc|cc} \lambda_1 & & & & & \\ \hline & 0 & & & 0 & \\ \hline & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \\ \hline & & & & \lambda_3 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_3 \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c|cc|cc} \lambda_1 & & & & & \\ \hline & 0 & & & 0 & \\ \hline & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \\ \hline & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & 0 & \lambda_3 \end{array} \right] \\
 T' & & T''
 \end{array}$$

$T'$  = matrice diagonale  
 = réduite transjordanienne de  $f'$   
 $f'$  et  $f''$  ont le même spectre:

$T''$  = matrice « one by one step »  
 = réduite transjordanienne de  $f''$   
 $\{ \underbrace{\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3} \}$ .

Mais les profils sont

$$\begin{aligned}
 1^0) \quad \text{pour } f' \quad & \{ d_1^1 = 1 = d_1 = r_1 \} \\
 & \{ d_1^2 = 4 = d_2 = r_2 \} \\
 & \{ d_1^3 = 2 = d_3 = r_3 \}
 \end{aligned}$$

Tous les indices = 1

$$\begin{aligned}
 2^0) \quad \text{pour } f'' \quad & \{ d_1^1 = d_1 = r_1 \} \\
 & \{ d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2 \} \\
 & \{ d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3 \}
 \end{aligned}$$

Tous les sauts = 1

*Remarque.* Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».

#### IV. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE SIMILITUDE DE DEUX MATRICES

A) *Spécifique d'un endomorphisme  $f$  de  $E_n$ .* On choisit, une fois pour toutes, une relation d'ordre  $\omega$  sur  $\mathbf{C}$ . Le spécifique de  $f$  est formé

$$1^0) \text{ du spectre ordonné de } f : \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}, \\ (\lambda_1 \omega \lambda_2 \omega \dots \lambda_{s-1} \omega \lambda_s).$$

2<sup>0</sup>) des  $s$  profils relatifs à chaque valeur propre :

$$\{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v-1}^v, d_{p_v}^v = d_v = r_v\} \quad (v = 1, 2, \dots, s).$$

B) *Spécifique d'une matrice  $A$  ( $n, n$ ).* Soient deux bases  $(\mathcal{J})$  et  $(\mathcal{J}')$  de  $E_n$ . Considérons les endomorphismes  $f$  se traduisant par  $A$  sur  $(\mathcal{J})$ ,  $f'$  se traduisant par  $A$  sur  $(\mathcal{J}')$ .

On démontre facilement que le spécifique de  $f$  coïncide avec celui de  $f'$  (même spectre ordonné et mêmes profils). Ce qui justifie la définition :

*Le spécifique d'une matrice  $A$  ( $n, n$ ) est le spécifique commun à tous les endomorphismes se traduisant par  $A$ , sur toutes bases possibles de  $E_n$ .*

C) *Première bijection.* Il y a bijection entre

$$\{ \text{matrices transjordanienues } T \} \text{ et } \{ \text{spécifiques } (S) \}$$

$$T \leftrightarrow S \quad (S \text{ étant le spécifique qu'enregistre } T).$$

D) *Seconde bijection.*

a) Soit un représentant  $A$  d'une classe d'équivalence  $(C_A)$  dans l'ensemble des matrices  $(n, n)$ . Considérons une base quelconque  $(\mathcal{J})$  et soit  $f$  l'endomorphisme traduit par  $A$  sur  $(\mathcal{J})$ ; prenons la réduite transjordanienne  $T$  de  $f$ : le même  $f$  est traduit

$\alpha)$  par  $A$  sur  $(\mathcal{J})$ .

$\beta)$  par  $T$  sur  $(S)$  (base canonique de  $f$ ).

b) Dans une même classe  $(C_A)$ , il ne peut y avoir deux représentants transjordanienus distincts. Supposons deux transjordanienues équivalentes; elles traduisent le même endomorphisme  $f$  sur deux bases d'où

$$\text{spécifique de } f = \text{spécifique de } T = \text{spécifique de } T'.$$

Les transjordaniennes  $T$  et  $T'$  ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

- c) Toute transjordanienne  $T$  appartient à la classe  $(C_T)$ . Au total: *il y a bijection entre*  $\{ \text{matrices transjordaniennes } T \}$  *et*  $\{ \text{Classes d'équivalence } (C_A) \}$

Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

$\{ \text{classes d'équivalence } (C_A) \}$  *et*  $\{ \text{spécifiques } (S) \}$ .

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) THÉORÈME. *Pour que deux matrices  $A$  et  $B$  soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes*  $J$ .

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan*. Dans chaque classe  $(C_A)$  il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

## V. APPLICATIONS

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts  $\delta_q^v$  et les indices  $p_v$ ) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  et  $A$  une matrice  $(n, n)$  donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^p \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

Soit  $\mathcal{L} = \{ Q \in \mathbb{C}[X]; Q(A) = 0 \}$ . On sait que  $\mathcal{L}$  est un idéal de  $\mathbb{C}[X]$ ; cet idéal est principal; soit  $\pi$  son générateur:

$$Q \in \mathcal{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique  $P$  de  $A$  appartient à  $\mathcal{L}$  (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$

Donc,  $\pi$  étant un diviseur de  $P$ ,

$$\pi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\alpha_s}$$

où  $\alpha_1 \leq r_1, \alpha_2 \leq r_2, \dots, \alpha_s \leq r_s$ . On démontre que  $\alpha_v = p_v$  ( $v = 1, 2, \dots, s$ ), c'est-à-dire :

**THÉORÈME DE L'INDICE.** Le polynôme minimum de  $A$  (défini à une constante multiplicative près) est

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}.$$

*Cas particuliers.*

1°) Si  $A$  est diagonalisable:  $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$ .

2°) Si  $A$  est « one by one step »:  $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s} = P(\lambda)$ .

B) *Matrices commutant avec une matrice donnée  $A$ .* Soit  $E' = \{ X \in E; AX = XA \}$  où  $E$  est l'espace vectoriel des matrices  $n, n$  sur le corps  $\mathbf{C}$  ( $A \in E'$ ).  $E'$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Sa dimension dépend bien entendu du spécifique de  $A$ . On peut démontrer qu'elle est égale à la somme des carrés de tous les sauts.

$$\dim(E') = \sum_{v=1}^s \left[ \sum_{q=1}^{p_v} (\delta_q^v)^2 \right]$$

*Cas particuliers:*

1°)  $A$  diagonalisable:  $\dim(E') = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_s^2$ .

2°)  $A$  « one by one step »:  $\dim(E') = r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$ .

C) *Série entière en  $A$ .* Il est facile de former la puissance  $q$ ième d'une transjordanienne, d'où la puissance  $q$ ième d'une matrice  $A$ . Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q z^q$$

de rayon de convergence  $R$ . On considère la série de matrice  $A$

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q A^q.$$

Elle est convergente de somme la matrice  $f(A)$  à condition que  $|\lambda_v| < R$  ( $v = 1, 2, \dots, s$ ). Passant par l'intermédiaire de la réduite transjordanienne  $T$  de  $A$ , on construit effectivement

$$f(T) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q T^q$$

au moyen des valeurs de  $f(z)$  et de ses dérivées pour  $z = \lambda_1, \dots, z = \lambda_s$ . On a alors  $f(A) = P \circ f(T) \circ P^{-1}$ ,  $P$  étant la matrice de passage ( $A = P T P^{-1}$ ). On peut obtenir un théorème généralisant celui des polynômes minimums

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(z) \text{ admette } \lambda_v \text{ comme racine d'ordre } \geq p_v \\ v = 1, 2, \dots, s.$$

D) *Limite lorsque  $q \rightarrow \infty$  de la direction  $(\Delta_q)$  transformée par  $f^q$  de la direction donnée  $(\Delta_0)$ .* Soit  $x \neq 0$ , fixe, un vecteur directeur de  $(\Delta_0)$ ; le vecteur  $f^q(x)$  ou tout vecteur  $W_q$  colinéaire à ce dernier, est directeur de  $(\Delta_q)$ . Si  $\lim_{q \rightarrow \infty} W_q = L$ , la direction limite de  $(\Delta_q)$  sera celle de vecteur directeur  $L$ .

On décompose  $x = x^1 + x^2 + \dots + x^s$ ;  $x^v \in K^v = K_{p_v}^v$  et obtient

$$(1) \quad f^q(x^v) = \lambda_v^q x^v + C_q^1 \lambda_v^{q-1} g_v(x^v) + \dots + C_q^{p_v-1} \lambda_v^{q-p_v+1} g_v^{p_v-1}(x^v).$$

On classe les valeurs propres par module décroissant:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_s|.$$

Si  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  et  $x^1 \neq 0$ , on obtient le résultat connu: il y a une limite de  $(\Delta_q)$  de vecteur directeur  $L \in K_1^1$  que l'on détermine.

Si  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ , l'étude se poursuit au moyen de (1) ...

E) *Résolution du système différentiel linéaire.*

$$(\Sigma) \quad \frac{dX}{dt} = A X$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \text{unicolonne de } n \text{ fonctions inconnues de } \mathbf{C} \text{ dans } \mathbf{C}, A(n, n)$$

connue. On transmue  $(\Sigma)$  en  $(S)$  par la matrice de passage  $P$  telle que  $T = P^{-1} A P$ ,  $T$  réduite transjordanienne de  $A$ , en faisant le changement d'inconnue  $X = P Y$ :

$$(S) \quad \frac{dY}{dt} = T Y.$$



Ce système  $(S)$  se décompose en

$$\frac{dY^1}{dt} = T^1 Y^1, \quad \frac{dY^2}{dt} = T^2 Y^2, \quad \dots, \quad \frac{dY^s}{dt} = T^s Y^s,$$

$T^v$  étant le bloc transjordanien afférent à  $\lambda_v$ .

Le système  $\frac{dY^v}{dt} = T^v Y^v$  sera très simple, la dérivée d'une composante

$y_k$  étant simplement  $\frac{dy_k}{dt} = \lambda_v y_k + \alpha y_{k+l}$ ,  $\alpha = 0$  ou  $1$ ,  $0 < l \leq r_v - k$

l'intégration de  $(S)$  est alors immédiate; on en déduit celle de  $(\Sigma)$ .

1°) *Système  $(\Sigma)$  à solutions exponentielles pures ou à solutions algébrico-exponentielles* ( $x_k$  = somme de produits d'exponentielles par des constantes ou somme de produits d'exponentielles par des monômes dont l'un au moins a un degré  $\geq 1$ ).

$(\Sigma)$  à solutions exponentielles pures  $\Leftrightarrow A$  diagonalisable

2°) *Systèmes  $(\Sigma)$  monoréductible*. C'est un système où la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre  $n$  par rapport à une composante, les autres composantes s'obtenant par dérivations de celle-là. On montre que

$(\Sigma)$  monoréductible  $\Leftrightarrow A$  « one by one step ».

( Reçu le 5 septembre 1976 )

A. Fontaine

129, rue de l'Abbé-Groult  
F-75015 — Paris