Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1977)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL

Autor: André, Michel

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

Il faut alors considérer hn, la p-ème puissance divisée de gn, qui est l'élément suivant de $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$, avec le degré $2p$,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \Lambda\, dx_{i_2} \Lambda \ldots \Lambda dx_{i_{2p-1}} \Lambda\, dx_{i_{2p}}$$

avec la condition $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2p-1} < i_{2p} \leqslant n$ et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma\, y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation σ des $2p$ éléments i_j est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \ldots < \sigma_{2p-1}\,, \quad \sigma_1 < \sigma_2\,, \ldots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}\,.$$

Mais alors l'élément $\pi n\,(tn)$ est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments α_j et β_j dans $\tilde{F}n$ avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments α_j et β_j sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords $d\alpha_j$ et $d\beta_j$ sont tous des éléments de $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$. En troisième lieu, l'élément hn est égal à la somme des bords $d\,(\alpha_j.\, \beta_j)$.

Lorsque l'idéal M est engendré par $2p$-1 éléments, on peut utiliser Kn avec n égal à $2p$-1. Mais alors hn est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

Lorsque l'idéal M a sa p-ème puissance nulle, on peut remplacer Kn par le quotient $Kn/(Mn)^p$. Mais alors hn modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

La plus petite algèbre Kn qui risque d'être intéressante est donc celle avec p égal à 2 et n égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément $\pi n\,(tn)$ n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme η_5 n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel ε_5 est strictement supérieur à δ_5. A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra 18* (1971), 19-50.
[2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.
[3] Cartan, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.

[4] DOLD, A. et R. THOM. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Annals Math. 67* (1958), 239-280.
[5] NICOLLERAT, M.-A. Homologie des produits symétriques. *A paraître.*
[6] QUILLEN, D. On the homology of commutative rings. *Proc. Sym. Pure Math. 17* (1970), 65-87.

(Reçu le 6 mai 1977)

Michel André

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
61, Avenue de Cour
1007 Lausanne