

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL  
**Autor:** André, Michel  
**Kapitel:** Conclusion  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48929>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

libre, le produit tensoriel  $Pn(Z) \otimes_Z B$  est une résolution simpliciale  $Pn(B)$  de la  $Bn$ -algèbre  $B$ . Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn(Z) = Pn(Z) \otimes_{Zn} Z \text{ et } Rn(B) = Pn(B) \otimes_{Bn} B.$$

Les  $B$ -algèbres simpliciales  $Rn(Z) \otimes_Z B$  et  $Rn(B)$  sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau  $Zn$  dans l'anneau  $A$  qui envoie les générateurs  $x_i$  sur les éléments  $m_i$  et les générateurs  $y_{jk}$  sur les éléments  $\mu_{jk}$ . Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de  $\text{Tor}_3$  par  $\text{Tor}_2$ .  $\text{Tor}_1$ , l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique  $tn$  sur l'élément quelconque  $t$  donné initialement. L'homomorphisme de  $Zn$  dans  $A$  donne un homomorphisme de  $Rn(Z)$  dans  $R$ , donc un homomorphisme de  $Rn(K)$  dans  $R$ , par produit tensoriel.

En résumé, on a la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $A$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi$  correspondant, et la  $K$ -algèbre simpliciale  $Rn$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $Kn$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi n$  correspondant. De plus il existe un homomorphisme de  $Rn$  dans  $R$  plaçant finalement  $tn$  au-dessus de  $t$  et  $\pi n$  au-dessus de  $\pi$ . En particulier l'homomorphisme  $\pi$  est nul en entier, si l'homomorphisme  $\pi n$  est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément  $\pi n(tn)$ . On peut localiser  $Kn$  sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par  $Mn$  le noyau de l'homomorphisme de  $Kn$  sur  $K$ . L'idéal  $Mn$  a  $n(n+1)/2$  générateurs, alors que l'idéal  $M$  a  $n$  générateurs.

## CONCLUSION

Considérons une résolution libre et multiplicative  $\tilde{Fn}$  de la  $Kn$ -algèbre  $K$  et dénotons par  $Fn$  le produit tensoriel  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} K$  qui permet le calcul de  $\text{Tor}^{Kn}(K, K)$ . Dans la définition de l'homomorphisme  $\pi n$ , on peut remplacer les  $K$ -algèbres simpliciales  $Rn$  et  $\tilde{Rn}$  par les  $K$ -algèbres différentielles  $Fn$  et  $\tilde{Fn}$ . L'élément  $gn$  appartient alors à  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$  et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\text{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \text{Tor}_3^{Kn}(K, K).$$

Il faut alors considérer  $hn$ , la  $p$ -ème puissance divisée de  $gn$ , qui est l'élément suivant de  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$ , avec le degré  $2p$ ,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \dots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_{2p-1}} \wedge dx_{i_{2p}}$$

avec la condition  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2p-1} < i_{2p} \leq n$  et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \dots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation  $\sigma$  des  $2p$  éléments  $i_j$  est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \dots < \sigma_{2p-1}, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \dots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}.$$

Mais alors l'élément  $\pi n (tn)$  est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  dans  $\tilde{Fn}$  avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords  $d\alpha_j$  et  $d\beta_j$  sont tous des éléments de  $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$ . En troisième lieu, l'élément  $hn$  est égal à la somme des bords  $d(\alpha_j, \beta_j)$ .

Lorsque l'idéal  $M$  est engendré par  $2p-1$  éléments, on peut utiliser  $Kn$  avec  $n$  égal à  $2p-1$ . Mais alors  $hn$  est nul de manière élémentaire. Par conséquent  $\pi$  est nul et on obtient un isomorphisme  $\eta_{2p+1}$  de manière naturelle.

Lorsque l'idéal  $M$  a sa  $p$ -ème puissance nulle, on peut remplacer  $Kn$  par le quotient  $Kn/(Mn)^p$ . Mais alors  $hn$  modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent  $\pi$  est nul et on obtient un isomorphisme  $\eta_{2p+1}$  de manière naturelle.

La plus petite algèbre  $Kn$  qui risque d'être intéressante est donc celle avec  $p$  égal à 2 et  $n$  égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément  $\pi n (tn)$  n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme  $\eta_5$  n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel  $\varepsilon_5$  est strictement supérieur à  $\delta_5$ . A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDRÉ, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra* 18 (1971), 19-50.
- [2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.
- [3] CARTAN, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.