Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL
Autor: André, Michel
Kapitel: Conclusion
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

libre, le produit tensoriel $Pn\,(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $Pn\,(B)$ de la Bn-algèbre B. Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn\,(Z) = Pn\,(Z) \otimes_{Zn} Z \text{ et } Rn\,(B) = Pn\,(B) \otimes_{Bn} B\,.$$

Les B-algèbres simpliciales $Rn\,(Z) \otimes_Z B$ et $Rn\,(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Zn dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk}. Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par $\mathrm{Tor}_2 . \mathrm{Tor}_1$, l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Zn dans A donne un homomorphisme de $Rn\,(Z)$ dans R, donc un homomorphisme de $Rn\,(K)$ dans R, par produit tensoriel.

En résumé, on a la K-algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A-algèbre K, avec l'homomorphisme π correspondant, et la K-algèbre simpliciale Rn qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn-algèbre K, avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de Rn dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π. En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n\,(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K. L'idéal Mn a $n\,(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

Conclusion

Considérons une résolution libre et multiplicative $\tilde{F}n$ de la Kn-algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\mathrm{Tor}^{Kn}\,(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn, on peut remplacer les K-algèbres simpliciales Rn et $\tilde{R}n$ par les K-algèbres différentielles Fn et $\tilde{F}n$. L'élément gn appartient alors à $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Tor}_2^{Kn}\,(K, Mn) \cong \mathrm{Tor}_3^{Kn}\,(K, K)\,.$$

Il faut alors considérer hn, la p-ème puissance divisée de gn, qui est l'élément suivant de $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$, avec le degré $2p$,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{2p-1}} \wedge dx_{i_{2p}}$$

avec la condition $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2p-1} < i_{2p} \leqslant n$ et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma \, y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation σ des $2p$ éléments i_j est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \ldots < \sigma_{2p-1}, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}.$$

Mais alors l'élément $\pi n\,(tn)$ est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments α_j et β_j dans $\widetilde{Fn}$ avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments α_j et β_j sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords $d\alpha_j$ et $d\beta_j$ sont tous des éléments de $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$. En troisième lieu, l'élément hn est égal à la somme des bords $d\,(\alpha_j . \beta_j)$.

Lorsque l'idéal M est engendré par $2p$-1 éléments, on peut utiliser Kn avec n égal à $2p$-1. Mais alors hn est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

Lorsque l'idéal M a sa p-ème puissance nulle, on peut remplacer Kn par le quotient $Kn/(Mn)^p$. Mais alors hn modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

La plus petite algèbre Kn qui risque d'être intéressante est donc celle avec p égal à 2 et n égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément $\pi n\,(tn)$ n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme η_5 n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel ε_5 est strictement supérieur à δ_5. A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra 18* (1971), 19-50.
[2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.
[3] Cartan, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.