Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1977)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL

Autor: André, Michel

Kapitel: Conclusion

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

libre, le produit tensoriel $Pn(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $Pn(B)$ de la Bn-algèbre B. Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn(Z) = Pn(Z) \otimes_{Zn} Z \quad \text{et} \quad Rn(B) = Pn(B) \otimes_{Bn} B\,.$$

Les B-algèbres simpliciales $Rn(Z) \otimes_Z B$ et $Rn(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Zn dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk}. Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par $\mathrm{Tor}_2 . \mathrm{Tor}_1$, l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Zn dans A donne un homomorphisme de $Rn(Z)$ dans R, donc un homomorphisme de $Rn(K)$ dans R, par produit tensoriel.

En résumé, on a la K-algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A-algèbre K, avec l'homomorphisme π correspondant, et la K-algèbre simpliciale Rn qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn-algèbre K, avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de Rn dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π. En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K. L'idéal Mn a $n(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

Conclusion

Considérons une résolution libre et multiplicative $\tilde{F}n$ de la Kn-algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\mathrm{Tor}^{Kn}(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn, on peut remplacer les K-algèbres simpliciales Rn et $\tilde{R}n$ par les K-algèbres différentielles Fn et $\tilde{F}n$. L'élément gn appartient alors à $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \mathrm{Tor}_3^{Kn}(K, K)\,.$$

Il faut alors considérer hn, la p-ème puissance divisée de gn, qui est l'élément suivant de $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$, avec le degré $2p$,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \Lambda\, dx_{i_2} \Lambda \ldots \Lambda dx_{i_{2p-1}} \Lambda\, dx_{i_{2p}}$$

avec la condition $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2p-1} < i_{2p} \leqslant n$ et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma\, y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation σ des $2p$ éléments i_j est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \ldots < \sigma_{2p-1}\,, \quad \sigma_1 < \sigma_2\,, \ldots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}\,.$$

Mais alors l'élément $\pi n\,(tn)$ est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments α_j et β_j dans $\tilde{F}n$ avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments α_j et β_j sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords $d\alpha_j$ et $d\beta_j$ sont tous des éléments de $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$. En troisième lieu, l'élément hn est égal à la somme des bords $d\,(\alpha_j . \beta_j)$.

Lorsque l'idéal M est engendré par $2p$-1 éléments, on peut utiliser Kn avec n égal à $2p$-1. Mais alors hn est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

Lorsque l'idéal M a sa p-ème puissance nulle, on peut remplacer Kn par le quotient $Kn/(Mn)^p$. Mais alors hn modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

La plus petite algèbre Kn qui risque d'être intéressante est donc celle avec p égal à 2 et n égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément $\pi n\,(tn)$ n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme η_5 n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel ε_5 est strictement supérieur à δ_5. A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDRÉ, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra 18* (1971), 19-50.
[2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.
[3] CARTAN, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.