Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Autor: Kervaire, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48172

OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

par Michel Kervaire

Cet article expose la définition et quelques propriétés d'une famille d'opérations Ψ_n, n entier, agissant sur l'anneau $R(FG)$ des représentations virtuelles d'un groupe fini G sur un corps F. La définition de $R(FG)$ est rappelée au § 1. Ces opérations sont analogues aux opérations introduites par Adams en topologie (mais dont la connaissance n'est pas nécessaire ici).

Pour faciliter la lecture, une partie de la théorie classique des représentations linéaires des groupes finis est sommairement résumée au § 1. On ne considère d'ailleurs que les représentations sur un corps commutatif (mais de caractéristique quelconque). Pour les détails qui manquent, on se reportera aux livres C. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Interscience publishers, New York (1962) et J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann (1967).

Aux §§ 2-4 on trouvera la définition des opérations $\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$ et la démonstration de leurs propriétés élémentaires utilisées dans la littérature, en particulier par *D.* Quillen pour sa démonstration de la conjecture d'Adams (*Topology*, 10 (1971), 67-80.)

Dans le dernier paragraphe (§ 5), j'ai essayé de pousser plus loin l'étude des opérations Ψ_n. Il s'avère que les Ψ_n opèrent également sur le groupe des classes de FG-modules projectifs $K(FG)$. Ce fait, sensiblement plus difficile à démontrer, est sans doute non-trivial car il implique immédiatement la finitude du conoyau de l'homomorphisme de Cartan $K(FG) \rightarrow R(FG)$ et fournit l'exposant exact de ce conoyau.

Remarques. Un cas particulier des opérations Ψ_n est déjà considéré par Frobenius et Schur. (*Sitzungsber. preuss. Akad. der Wiss.* (1906), 186-208.)

Les opérations d'Adams ont été introduites dans le contexte des schémas par R. Swan. (*Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, vol. XXI, Univ. of Wisconsin (1971), 155-159.)

Enfin, les opérations d'Adams proprement dites ont été introduites en topologie par J.F. Adams. (*Ann. of Math.* 75 (1962), 603-632.)

§ 1. L'ANNEAU DES REPRÉSENTATIONS VIRTUELLES.

Soient G un groupe (multiplicatif) et F un corps commutatif. On notera FG l'algèbre de groupe de G sur F, i.e. l'espace vectoriel ayant pour base les éléments de G muni de la multiplication induite par la multiplication dans G.

Une représentation de G sur F est une classe d'isomorphie de FG-modules (à gauche) de dimension finie sur F. Si V est un FG-module (de dimension finie), on dira par abus de langage que V est une représentation.

Soient V un FG-module et $e_1, ..., e_n$ une F-base de V. L'action d'un élément $s \in G$ sur V exprimée dans cette base, i.e.

$$s \,.\, e_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} e_i$$

fournit un homomorphisme $\rho : G \to GL_n(F)$ qui associe à s la matrice inversible $\rho(s) = (S_{ij})$. L'homomorphisme ρ est appelé la forme matricielle de la représentation V associée à la base choisie.

Soient G un groupe (fini) et F un corps commutatif. A ces données on associe l'anneau $R(FG)$ des F-représentations virtuelles de G dont nous rappelons brièvement la construction.

Soit L la groupe abélien libre ayant pour $\mathbf{Z}$-base l'ensemble des représentations de G sur F. Soit L_0 le sous-groupe de L engendré par les éléments de la forme $V - V' - V''$ chaque fois qu'il existe une suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ de FG-modules.

DÉFINITION. $R(FG) = L/L_0$. *Un élément de* $R(FG)$ *s'appelle une* F*-représentation virtuelle de* G.

La classe de V dans $R(FG)$ sera notée $[V]$, ou même quelquefois simplement V.

Remarques. On voit facilement que tout élément de $R(FG)$ peut s'écrire sous la forme $[U] - [V]$, où U et V sont des représentations de G sur F. Rappelons que si la caractéristique de F ne divise pas l'ordre de

G, l'existence d'une suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ entraîne que $V \cong V' \oplus V''$. Ceci n'est plus vrai si caract (F) divise l'ordre de G et il est important pour la suite de ne pas faire d'hypothèse inutilement restrictive sur le corps F.

La structure d'anneau sur $R(FG)$ est fournie par le produit tensoriel sur F des représentations. Si V_1 et V_2 sont deux FG-modules, G opère sur $V_1 \otimes_F V_2$ par $s\,.\,(v_1 \otimes v_2) = sv_1 \otimes sv_2$, $s \in G$, et on vérifie sans difficulté que cette formule fournit bien une structure de FG-module sur $V_1 \otimes_F V_2$. On obtient ainsi un produit sur L et il est immédiat de vérifier que L_0 est un idéal. Le produit tensoriel induit donc un produit sur $R(FG)$.

Comme $V_1 \otimes_F V_2 \cong V_2 \otimes_F V_1$, l'anneau $R(FG)$ est commutatif. Le corps F, muni de la structure de FG-module « triviale » telle que $sa = a$ pour tout $a \in F$, représente l'élément neutre pour la multiplication dans $R(FG)$. On écrira $[V_1]\,.\,[V_2]$ ou $V_1\,.\,V_2$ pour le produit dans $R(FG)$.

La structure *additive* de $R(FG)$ est facile à expliciter:

DÉFINITION. Un FG-module S est dit *simple* ou *irréductible* s'il est non-nul et s'il ne possède pas d'autres sous-modules que 0 et S lui-même.

THÉORÈME. *Soient G un groupe fini et F un corps commutatif. L'ensemble $S(FG)$ des classes d'isomorphie de FG-modules simples est un ensemble fini. Le groupe $R(FG)$ est abélien libre avec pour base l'ensemble $S(FG)$.*

Preuve. Soient S un FG-module simple et $v \in S$, $v \neq 0$. L'application $FG \to S$ donnée par $a \to av$ définit un homomorphisme de FG-modules (FG étant regardé comme FG-module à gauche par la multiplication dans l'anneau FG.) Cet homomorphisme est surjectif puisque S est simple. On voit donc que S apparaît comme facteur de composition d'une suite de Jordan-Hölder pour le module FG. Ainsi, il y a au plus l classes d'isomorphisme de FG-modules simples, où l est la longueur d'une suite de Jordan-Hölder pour le module FG. (Pour le théorème de Jordan-Hölder, voir [Curtis-Reiner] cité dans l'introduction, § 13.)

Soit maintenant R le groupe abélien libre sur l'ensemble fini $S(FG)$ des représentations irréductibles.

En associant à tout élément de $S(FG)$ sa classe dans $R(FG)$, on obtient un homomorphisme

$$f : R \to R(FG).$$

Inversement, on définit $g : R(FG) \to R$ comme suit. Si V est un FG-module (de dimension finie) et $V = V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_k \supset V_{k+1} = 0$ une suite de Jordan-Hölder pour V, on pose

$$g_0(V) = \sum_{i=1}^{k} S_i ,$$

où S_i est la classe d'isomorphie du facteur simple V_i/V_{i+1}, $i = 1,\ldots, k$.

D'après le théorème de Jordan-Hölder, $g_0(V)$ est un élément de R qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de V. On a donc un homomorphisme $g_0 : L \to R$. On constate que g_0 s'annule sur les générateurs de L_0, donc sur L_0 tout entier, et induit par conséquent un homomorphisme $g : R(FG) \to R$.

La vérification de $gf = id.$ est immédiate. Celle de $fg = id.$ facile.

Exemple. Pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(G, F^{\cdot})$, on définit sur F une structure de FG-module en posant $s \,.\, v = \chi(s)\, v$, $v \in F$. Ce module sera noté F_χ ou $F(\chi)$. Il est évidemment simple. On a $F(\chi_1) \otimes F(\chi_2) = F(\chi_1 . \chi_2)$. Le cas où G est abélien d'exposant n, disons, et où F contient les racines du polynôme $X^n - 1$ est fondamental pour la théorie. Dans ce cas les classes d'isomorphie des FG-modules simples $F(\chi)$, $\chi \in \mathrm{Hom}(G, F^{\cdot})$ forment une liste complète sans répétition des F-représentations irréductibles de G. Donc, $R(FG)$ pour G abélien et avec l'hypothèse faite sur F s'identifie à l'anneau de groupe $\mathbf{Z}X$, où $X = \mathrm{Hom}(G, F^{\cdot})$.

Revenons au cas général. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, f s'étend (de manière unique) à un homomorphisme d'algèbre $f : FG \to FG'$ et tout FG'-module V devient un FG-module par $\lambda v = f(\lambda)\, v$, $\lambda \in FG$, $v \in V$. Cette construction fournit un homomorphisme d'anneau $f^* : R(FG') \to R(FG)$ dit de *restriction.* (On a également un homomorphisme *induit* $f^* : R(FG) \to R(FG')$ pour la structure additive de ces anneaux, et donné par $V \to FG' \otimes_{FG} V$. On ne s'en servira pas.)

Si $F \to E$ est une extension de corps, tout FG-module V fournit un EG-module $E \otimes_F V$ que l'on notera aussi EV. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux $i : R(FG) \to R(EG)$ dit d'*extension des scalaires.*

L'anneau $R(FG)$ est encore muni d'une involution dont nous aurons besoin pour définir les opérations d'Adams d'indices négatifs.

Soit V un FG-module. On considère le dual $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$ qui est muni d'une structure de FG-module définie par la formule

$$(a . f)(v) = \sum_{s \in G} a_s f(s^{-1} v) ,$$
$$a = \sum_{s \in G} a_s \,.\, s \in FG, \; v \in V .$$

La classe d'isomorphisme de V^* ne dépend que de celle de V. La représentation V^* s'appelle la *duale* de V. On a $V^{**} \cong V$, canoniquement.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'opération * induit un automorphisme involutif

$$* : R(FG) \to R(FG)$$

qui commute aux homomorphismes $f^* : R(FG') \to R(FG)$ et $f_* : R(FG) \to R(FG')$ pour $f : G \to G'$ et $i : R(FG) \to R(EG)$.

Deux théorèmes classiques jouent un rôle essentiel dans la suite.

THÉORÈME I. *Soit* $F \to E$ *une extension quelconque de corps commutatifs. L'homomorphisme* $i : R(FG) \to R(EG)$ *d'extension des scalaires est injectif.*

Soit p un nombre premier. Un sous-groupe cyclique de G sera dit *p-régulier* si son ordre est premier à p. Tout sous-groupe cyclique est 0-régulier.

THÉORÈME II. *Soient* G *un groupe fini et* F *un corps. Soit* $\mathscr{C}$ *la famille des sous-groupes cycliques* p*-réguliers de* G, *où* $p = \mathrm{caract}(F)$. *L'homomorphisme*

$$\mathrm{res} : R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC),$$

produit des restrictions $R(FG) \to R(FC)$, *est injectif.*

Ces théorèmes constituent un analogue du «splitting principle» en topologie et seront utilisés de façon similaire pour démontrer certaines propriétés des opérations d'Adams.

Pour démontrer les théorèmes I et II, les faits fondamentaux sont les suivants.

LEMME 1. *Soient* G *un groupe fini et* $F \subset E$ *une extension de corps quelconque. On a* $E \otimes_F \mathrm{rad}\, FG = \mathrm{rad}\, EG$, *où* rad *dénote le radical.*

Soit V un FG-module. On appelle caractère de V la fonction F-linéaire $\chi : FG \to F$ définie par

$$\chi(s) = \mathrm{Trace}\, \rho(s),$$

où $\rho(s)$ est la transformation F-linéaire $V \to V$ associée à s, i.e. $\rho(s)(v) = s \cdot v$.

LEMME 2. *Soient* G *un groupe fini et* $X(FG)$ *le sous-espace de* $\mathrm{Hom}_F(FG, F)$ *engendré par les caractères des* F*-représentations de* G. *Les carac-*

tères $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *des représentations irréductibles forment une* F*-base de* $X(FG)$.

Esquisses de démonstrations.

Soit k un corps premier, i.e. $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{F}_p$ pour p premier. D'après le théorème de Wedderburn, [Curtis-Reiner], § 26, l'algèbre semi-simple $kG/\mathrm{rad}\, kG$ se décompose en produit

$$kG/\mathrm{rad}\, kG \cong D_1(n_1) \times \ldots \times D_s(n_s)$$

d'algèbre de matrices $D_i(n_i)$ sur des corps gauches D_i.

Les corps gauches D_i sont munis d'une forme trace non-dégénérée, i.e. $(x, y) \to \mathrm{Trace}_{D_i/k}(x.y)$ est bilinéaire de noyau nul.

En effet, pour $k = \mathbf{Q}$ c'est évident et dans le cas où $k = \mathbf{F}_p$, les D_i sont des corps finis, donc en fait commutatifs et galoisiens, donc séparables sur $\mathbf{F}_p$.

On vérifie alors facilement que pour tout corps $F \supset k$, les F-algèbres $F \otimes_k D_i$ ont également une trace sur F non-dégénérée et sont donc semi-simples.

Il en résulte que $F \otimes_k (kG/\mathrm{rad}\, kG) \cong FG/(F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG)$ est semi-simple. Donc, $\mathrm{rad}\, FG \subset F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG$. Comme l'inclusion inverse est évidente, on a $F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG = \mathrm{rad}\, FG$. Le lemme 1 s'ensuit immédiatement.

De plus, le fait que la forme trace sur F soit non-dégénérée dans $F \otimes_k D_i$ entraîne aussi que dans la décomposition de Wedderburn

$$F\, G/\mathrm{rad}\, F\, G \cong K_1(n_1) \times \ldots \times K_r(n_r)\,,$$

chaque corps (gauche) K_i, $i = 1, \ldots, r$, possède une forme trace sur F non-dégénérée. En particulier, il existe des éléments $\alpha_i \in K_i$ tels que $\mathrm{trace}_F(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Pour démontrer le lemme 2, on observe d'abord que les caractères $\chi_1, \ldots, \chi_r$ des FG-modules simples engendrent $X(FG)$. Il reste alors à démontrer que ces caractères sont linéairement indépendants sur F. Soit S_i le $K_i(n_i)$-module formé des matrices $n_i \times n_i$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première. On sait que $S_1, \ldots, S_r$ regardés comme FG-modules forment une liste complète de FG-modules simples non-isomorphes.

Soient maintenant $a_i \in FG$ des éléments se projettant sur $\alpha_i e_{11} \in K_i(n_i)$ et sur 0 dans les autres facteurs $K_j(n_j)$ pour $j \neq i$. (e_{11} dénote la matrice $n_i \times n_i$ de $K_i(n_i)$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf celui d'indice (1, 1) qui est égal à 1.)

Un calcul de traces montre aisément que

$$\chi_i(a_j) = \delta_{ij} \,.\, \mathrm{trace}_F(\alpha_i)\,.$$

L'indépendance linéaire de $\chi_1, \ldots, \chi_r$ en résulte.

Démonstration du théorème I: $R(FG) \to R(EG)$ est injectif.

Il suffit de voir que si S et T sont deux FG-modules simples non-isomorphes, alors ES et ET sont semi-simples et sans facteur commun, i.e. ES somme directe de EG-modules simples S_i, ET somme directe de EG-modules simples T_j, et $S_i \not\cong T_j$ pour tout couple (i, j).

ES et ET sont semi-simples car ils sont annulés par $E \otimes$ rad FG. Donc, par rad EG, en vertu du lemme 1.

Pour vérifier qu'ils n'ont pas de facteur simple commun, il suffit de calculer $\mathrm{Hom}_{EG}(ES, ET) = 0$. Cela résulte de $\mathrm{Hom}_{EG}(ES, ET) = E \otimes_F \mathrm{Hom}_{FG}(S, T) = 0$.

Démonstration du théorème II: res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est injectif.

Soit $\chi : R(FG) \to X(FG)$ l'application qui associe à une représentation V son caractère χ_V. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R(FG) & \to & X(FG) \\ \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \mathrm{res} \\ \prod_{C\in\mathscr{C}} R(FC) & \to & \prod_{C\in\mathscr{C}} X(FC)\,, \end{array}$$

où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des sous-groupes cycliques p-réguliers de G, p = caract F.

Si res $\chi_\alpha = 0$, cela veut dire que χ_α s'annule sur tous les éléments p-réguliers de G. Il en résulte que χ_α est identiquement nulle. En effet, tout élément x de G s'écrit $x = y \,.\, z$, où y et z commutent, y est p-régulier et z d'ordre une puissance de p. (Si mq est l'ordre de x, avec m premier à p et q une puissance de p, prendre $y = x^q$ et $z = x^m$.) Si V est une représentation de G, les valeurs propres de z sont toutes égales à 1. (C'est la seule racine p-ième de 1 dans F.) Donc les valeurs propres de $x = yz$ sont les mêmes que celles de y. Il en résulte que $\chi_V(x) = \chi_V(y)$, et $\chi_\alpha(x) = \chi_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Donc, res $\chi_\alpha = 0$ entraîne $\chi_\alpha = 0$. Comme d'autre part $R(FG)$ est abélien libre avec pour **Z**-base les représentations irréductibles $S_1, \ldots, S_r$ et que $\chi_1 = \chi(S_1), \ldots, \chi_r = \chi(S_r)$ est une F-base de l'espace des caractères $X(FG)$ en vertu du lemme 2, on conclut que si res $\chi_\alpha = 0$, alors α est contenu dans $pR(FG)$.

Le noyau de res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est donc contenu dans $pR(FG)$. Comme maintenant $\prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est sans torsion, on a

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{res}) = \cap_n p^n R(FG) = 0 .$$

Au § 5 nous aurons besoin de $K(FG)$ dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si F est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires $K(FG) \to K(EG)$ est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où $K(FG)$ est noté $P_F(G)$. Nous ne la reproduisons pas.

§ 2. Puissances extérieures

Les puissances extérieures des FG-modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau $R(FG)$, appelé λ-structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier n un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit V un FG-module, toujours de dimension finie. On notera $\lambda_m V$ la m-ième puissance extérieure de V. C'est le quotient de la puissance tensorielle $V^m = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (m facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ avec $v_i = v_j$ pour au moins nu couple d'indices distincts (i, j).

L'action de G sur $\lambda_m V$ est induite de l'action de G sur V^m. On convient que $\lambda_0 V = F$ avec action triviale, et $\lambda_1 V = V$.

Il s'avère que les puissances extérieures λ_m, $m \geqq 0$, induisent des opérations

$$\lambda_m : R(FG) \to R(FG)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta) .$$

Le point essentiel est le

Lemme. *Soit* $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ *une suite exacte de* FG*-modules. Alors,*

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V]$$

dans $R(FG)$ *pour* $m = 0, 1, \dots$.

Ici $[U]$ désigne la classe de U dans $R\,(FG)$.

On va démontrer que $\lambda_m V_1$ possède une filtration

$$\lambda_m V_1 = W_0 \supset W_1 \supset \dots \supset W_m = \lambda_m V_0 \supset W_{m+1} = 0$$

par des sous-modules W_i tels que

$$W_i / W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$$

pour $i = 0, 1, \dots, m$.

Par définition du produit dans $R\,(FG)$, on a

$$[\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V] = [\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V]\,.$$

D'autre part, dans $R\,(FG)$, on a

$$[\lambda_m V_1] = \textstyle\sum_{i=0}^{m} [W_i / W_{i+1}]\,,$$

et le lemme en résulte.

Soit $f : V_1^m \to \lambda_m V_1$ l'application canonique. On considère le sous-module $V_0^i \otimes V_1^{m-i}$ de V_1^m. Son image par f est un sous-module W_i de $\lambda_m V_1$. Il est clair que les W_i, $i = 0, 1, \dots, m + 1$ sont des sous-modules emboités de $\lambda_m V_1$.

Reste à démontrer l'isomorphisme $W_i / W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$ de FG-modules pour $i = 0, 1, \dots, m$.

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_0^i \otimes V_1^{m-i} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "p"] & & W_i \arrow[d, "q"] \\
V_0^i \otimes V^{m-i} \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr] & & W_i / W_{i+1} \\
& \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \arrow[ur, "f''"'] &
\end{tikzcd}$$

où p est induit par la projection $V_1 \to V$.

Tout d'abord f induit bien une application f'. En effet, on vérifie immédiatement que $f\,(\operatorname{Ker} p) \subset W_{i+1}$ et il en résulte que f' est bien définie. Il est clair que f' est FG-linéaire. Il est également évident que f' se factorise par une application FG-linéaire $f'' : \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \to W_i / W_{i+1}$. La surjectivité de f (sur W_i) implique la surjectivité de f''.

Par ailleurs, on constate que

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{m} \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$

car

$$\dim \lambda_i U = \binom{\dim U}{i}, \text{ et } \binom{n+N}{m} = \textstyle\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{N}{m-i}$$

comme il résulte de la comparaison des coefficients de t dans les deux membres de l'identité $(1+t)^{n+N} = (1+t)^n (1+t)^N$.

Puisque $\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V) \geqq \dim_F W_i / W_{i+1}$ en vertu de l'existence de f'', surjectif, on a donc

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \sum_{i=0}^{m} \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$
$$\geqq \sum_{i=0}^{m} \dim W_i / W_{i+1} = \dim_F \lambda_m V_1 ,$$

ce qui implique que toutes les « inégalités »

$$\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i}) \geqq \dim_F W_i / W_{i+1}$$

sont en fait des égalités.

Il en résulte que f'' est un isomorphisme pour tout i et le lemme est démontré.

Pour vérifier maintenant que λ_m induit une application

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

telle que

$$\lambda_m (\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \, . \, (\lambda_{m-i} \beta) ,$$

il est commode d'introduire l'anneau des séries formelles $R(FG)\,[[t]]$.

Pout toute F-représentation V de G, posons

$$\lambda(V) = \sum_{m=0}^{\infty} [\lambda_m (V)] \, . \, t^m \in R(F\,G)\,[[t]] .$$

Une série formelle de terme constant 1 est inversible. ($\lambda_0 V = 1$.) Comme les représentations forment une base de L, la formule ci-dessus définit un homomorphisme

$$\lambda : L \to U\big(R(F\,G)\,[[t]]\big)$$

du groupe (additif) L dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $R(FG)\,[[t]]$.

Si $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, le lemme exprime que $\lambda(V_1) = \lambda(V_0) \, . \, \lambda(V)$. Donc, λ passe au quotient et fournit un homomorphisme

$$\lambda : R(F\,G) \to U\big(R(F\,G)\,[[t]]\big)$$

du groupe additif de $R(FG)$ dans le groupe multiplicatif $U\big(R(FG)\,[[t]]\big)$ et dont les coefficients sont les applications

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

cherchées, i.e. $\lambda_m(\alpha)$ est le coefficient de t^m dans la série formelle $\lambda(\alpha)$.

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i\alpha) . (\lambda_{m-i}\,\beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha+\beta) = (\lambda\alpha) . (\lambda\beta) .$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $*$: $R(FG) \to R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction f^* : $R(FG') \to R(FG)$ pour $f: G \to G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. Définition des opérations d'Adams.

Soient $t_1, ..., t_N$ des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leqq n \leqq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1{}^n + t_2{}^n + ... + t_N{}^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires $s_1, ..., s_n$ de degré $\leqq n$ des indéterminées $t_1, ..., t_N$. Les fonctions $s_1, ..., s_k, ...$ sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + ... + (-1)^i s_i X^{N-i} + ... + (-1)^N s_N = \prod_{\nu=1}^{N} (X - t_\nu)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = ... = t_N = 0$ (où $N' \leqq N$), que

$$s_i(t_1, \ldots, t_{N'}, 0, \ldots, 0) = s_i(t_1, \ldots, t_{N'})$$

pour $i \leqq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1,\ Q_2(s_1, s_2) = s_1{}^2 - 2s_2 ,$$
$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1{}^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 ,$$
$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1{}^4 - 4s_1{}^2 s_2 + 2s_2{}^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4 ,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ en tant que polynôme en $s_1, ..., s_n$ est indépendant de N pourvu que $N \geqq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t'_1, ..., t'_N$ et $t''_1, ..., t''_{N''}$ deux suites d'intéderminées et $t_1, ..., t_N$ leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t'_i$ pour $1 \leqq i \leqq N'$, $t_{N'+j} = t''_j$ pour $1 \leqq j \leqq N''$. Soient $s'_1, ..., s'_{N'}$ et $s''_1, ..., s''_{N''}$ les fonctions symétriques élémentaires des $t'_1, ..., t'_{N'}$ et $t''_1, ..., t''_{N''}$ respectivement. Enfin, soient $s_1, ..., s_N$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1, ..., t_N$.

LEMME 1. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} s_i' \cdot s_{n-i}'' .$$

De plus,

$$Q_n^N(s_1, ..., s_n) = Q_n^{N'}(s_1', ..., s_n') + Q_n^{N''}(s_1'', ..., s_n'') .$$

La première formule résulte immédiatement des identités de définition des s_i' et s_j'' en calculant leur produit et en le comparant à l'identité de définition des s_n.

La deuxième identité est une trivialité après avoir remplacé les polynômes Q_n par leur expression en fonction des t.

Il résulte tout d'abord du lemme que $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ est indépendant de N pour $N \geqq n$. En effet, si l'on envoie $t_1'', ..., t_{N''}''$ sur 0, on obtient $s_i' = s_i$ pour $i = 0, 1, ..., n$ si $n \leqq N'$, comme on l'a observé ci-dessus, et $s_j'' = 0$ pour $j > 0$. Donc, $Q_n^N(s_1, ..., s_n) = Q_n^{N'}(s_1, ..., s_n)$ pourvu que $N \geqq N' \geqq n$.

On écrira Q_n pour Q_n^N avec $n \leqq N$.

On a aussi

$$Q_n - s_1 Q_{n-1} + ... + (-1)^i s_i Q_{n-i} + ... \\ + (-1)^{n-1} s_{n-1} Q_1 + (-1)^n n\, s_n = 0$$

en remplaçant successivement X par $t_1, ..., t_n$ dans l'identité de définition des s_i et en sommant membre à membre. Ceci montre par récurrence sur n que $Q_n(s_1, ..., s_n)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On voit aussi que $Q_n(s_1, 0, ..., 0) = s_1{}^n$.

On peut alors définir l'opération d'Adams Ψ_n, $n \in \mathbf{Z}$ sur un FG-module V comme suit.

DÉFINITION. $\Psi_0 V = (\dim V) \,.\, 1$,
où 1 est l'élément unité de $R(FG)$;

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, \lambda_2 V, ..., \lambda_n V) \text{ pour } n > 0 ,$$

le membre de droite étant regardé comme un élément de $R(FG)$;

$$\Psi_{-n} V = \Psi_n V^*, \text{ où } n > 0 .$$

Pour démontrer que ces formules déterminent une opération $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$ nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 2. *Soient* R *un anneau commutatif avec élément unité, et* $\{\lambda_i'\}$, $\{\lambda_i''\}$ *et* $\{\lambda_i\}$, $i = 0, 1, ...$ *trois suites d'éléments de* R *telles que* $\lambda_0' = \lambda_0'' = \lambda_0 = 1$, *et*

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \cdot \lambda_{m-i}''$$

pour tout $m \geqq 0$. *Alors pour tout* $n \geqq 1$, *on a*

$$Q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Q_n(\lambda_1', \ldots, \lambda_n') + Q_n(\lambda_1'', \ldots, \lambda_n'').$$

Ceci résulte immédiatement de l'indépendance algébrique des fonctions symétriques élémentaires. Il existe un homomorphisme

$$h : \mathbf{Z}[s_1', \ldots, s_{N'}', s_1'', \ldots, s_{N''}''] \to R,$$

tel que $h(s_i') = \lambda_i'$ et $h(s_j'') = \lambda_j''$. Cet homomorphisme envoie s_m sur λ_m en vertu du lemme 1 et de l'hypothèse

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \cdot \lambda_{m-i}''.$$

Il s'ensuit que h envoie $Q_n(s_1, \ldots, s_n)$ sur $Q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et l'assertion résulte de l'identité $Q_n = Q_n' + Q_n''$ du lemme 1.

Lemme 3. *Pour tout* n *entier, l'opération* Ψ_n *sur les* FG*-modules induit un endomorphisme de groupe additif*

$$\Psi_n : R(FG) \to R(FG).$$

En outre, pour $n > 0$, *on a*

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$$

pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, le lemme du paragraphe précédent dit que

$$\lambda_m V = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i V') \cdot (\lambda_{m-i} V'').$$

D'après le lemme 2 ci-dessus appliqué avec

$$\lambda_m = \lambda_m V, \; \lambda_i' = \lambda_i V', \; \lambda_j'' = \lambda_j'' V'',$$

on a donc

$$\Psi_n V = \Psi_n V' + \Psi_n V'',$$

pour $n > 0$.

Il en résulte immédiatement que $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$ est bien définie et additive pour tout entier n.

La formule

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$$

pour $\alpha \in R(FG)$ quelconque est conséquence de l'additivité de Ψ_n et de celle en α de $Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$.

§ 4. Propriétés élémentaires des opérations d'Adams.

Il est clair tout d'abord que les Ψ_n sont fonctorielles, i.e. si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes finis, et $f^* : R(FG') \to R(FG)$ l'homomorphisme de restriction, on a

$$\Psi_n f^* = f^* \Psi_n ,$$

pour tout entier n. De même pour une extension de corps $F \to E$, on a $i\Psi_n = \Psi_n i$, avec $i : R(FG) \to R(EG)$ l'homomorphisme d'extension de scalaires.

Ceci résulte du fait que f^* et i sont des homomorphismes de λ-anneaux, i.e. commutent avec les opérations λ_m.

Par contre Ψ_n ne commute *pas* en général aux homomorphismes *induits*. Exemple: Prendre $f : \{1\} \to C_2$, où C_2 est cyclique d'ordre 2 et calculer $\Psi_2 f_* - f_* \Psi_2$ sur l'élément unité de $R(FC_2)$, où F est de caractéristique $\neq 2$. On trouve $2 - [FC_2] \neq 0$.

Nous commençons une liste des propriétés des $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$, où comme ci-dessus, G est un groupe fini et F un corps commutatif.

(1) Les opérations Ψ_n sont des homomorphismes de λ-anneaux, i.e.

$$\Psi_n(\alpha . \beta) = \Psi_n(\alpha) . \Psi_n(\beta), \text{ et } \Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n .$$

(2) Pour m, n entiers quelconques, on a

$$\Psi_{m \cdot n} = \Psi_m . \Psi_n = \Psi_n . \Psi_m .$$

(3) Si α est la classe d'un FG-module de dimension 1 sur F, on a

$$\Psi_n(\alpha) = \alpha^n, \text{ où } \alpha^{-m} = (\alpha^*)^m \text{ pour } m > 0 .$$

(4) Pour tout p premier et tout $\alpha \in R(FG)$, on a

$$\Psi_p(\alpha) = \alpha^p \bmod p R(F G) .$$

Ces propriétés sont les analogues des propriétés des opérations d'Adams en topologie. On a en outre quelques propriétés plus typiquement algébriques qui proviennent de relations entre les opérations Ψ_n et l'action des automorphismes du corps de base sur l'anneau des représentations virtuelles.

Soient E un corps commutatif et $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$ un automorphisme de E. A tout EG-module V on associe un nouveau EG-module σV obtenu comme suit. En tant que groupes abéliens σV et V sont égaux. L'élément $v \in V$ considéré comme élément de σV sera noté σv. L'action de EG sur σV est définie par

$$a \, . \, \sigma(v) = \sigma\left(\sigma^{-1}(a)\, v\right),$$

où

$$\sigma^{-1}(a) = \sum_{s \in G} \sigma^{-1}(a_s)\, s \, ,$$

si

$$a = \sum_{s \in G} a_s \, s \, .$$

Dans cette formule, $\sigma^{-1}(a)\, v$ est défini par l'action de EG sur V, et $\sigma\left(\sigma^{-1}(a)\, v\right)$ est l'élément de σV correspondant à $\sigma^{-1}(a)\, v \in V$.

Il est facile de voir que si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de EG-modules, la suite $0 \to \sigma V' \to \sigma V \to \sigma V'' \to 0$ est également une suite exacte de EG-modules. Il en résulte que σ induit un automorphisme $\sigma : R(EG) \to R(EG)$. C'est un automorphisme d'anneau.

On vérifie sans difficulté que σ commute aux homomorphismes de restriction, induits, d'extension de scalaires, à l'involution, aux puissances extérieures et opérations d'Adams.

Exercice. Si $\rho(s) = (S_{ij})$ est la forme matricielle de V associée à la base $e_1, \ldots, e_n$ de V, alors la forme matricielle de σV par rapport à $\sigma e_1, \ldots, \sigma e_n$ est donnée par $(\sigma \rho)(s) = (\sigma S_{ij})$.

Définitions. Soient G un groupe fini et p un nombre premier. On dira que $s \in G$ est *p-régulier* si l'ordre de s est premier à p. Par convention tout élément de G est 0-régulier.

Le p.p.c.m. des ordres des éléments p-réguliers de G sera appelé l'*exposant p-régulier* de G. L'exposant 0-régulier est donc simplement l'exposant de G.

Nous pouvons continuer la liste des propriétés des Ψ_n.

(5) *Les opérations* Ψ_n *sont périodiques,* i.e. *si* m *est l'exposant p-régulier de* G, *où* p = caract (F), *on a*

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

pour tout entier n.

(6) *Si* F *contient les racines du polynôme* $X^m - 1$, *où* m *est l'exposant p-régulier de* G, p = caract (F), *et si* $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$ *et* $s \in \mathbf{Z}$ *sont liés par* $\sigma(\xi) = \xi^s$ *pour toute racine* ξ *de* $X^m - 1$, *alors* $\Psi_s(\alpha) = \sigma(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in R(FG)$.

Remarque. Il existe un théorème de périodicité des opérations d'Adams en topologie. (Cf. J.F. Adams, *On the groups* $J(X)$—III, *Topology*, Vol. 3

(1965), 193-222, en particulier le § 5.) Mais il ne semble pas y avoir de rapport entre ce théorème et la propriété (5) ci-dessus.

Enfin, en considérant l'injection de $\mathbf{F}_q$ (le corps fini à q éléments) dans une clôture algébrique et en prenant σ = automorphisme de Frobenius, on obtient comme corollaire la propriété suivante:

(7) *L'opération* $\Psi_q : R(\mathbf{F}_q G) \to R(\mathbf{F}_q G)$ *est l'identité.*

Toutes ces propriétés sont faciles à démontrer en tenant compte des théorèmes I et II du § 1.

Les propriétés (3) et (4) se vérifient comme en topologie.

Démonstration de (3). Si V est un FG-module de dimension 1 sur F, il s'agit de voir que $\Psi_n(V) = V^n$. Or, l'hypothèse entraîne que

$$\lambda_2 V = \lambda_3 V = \dots = 0 .$$

Donc pour n positif, on a

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, 0, \dots, 0) = (\lambda_1 V)^n = V^n .$$

On en déduit immédiatement la propriété (3).

Remarque. On a donc en fait $\Psi_n(\alpha) = \alpha^n$ dès que $\lambda_i \alpha = 0$ pour $i > 1$. Cependant cette formulation n'est pas plus générale que la précédente. En effet, si $\alpha \in R(FG)$ satisfait à $\lambda_i \alpha = 0$ pour $i > 1$, alors α est la classe d'un FG-module de dimension 1. Pour le voir, il suffit de remarquer que les classes de FG-modules de dimension 1 sont inversibles dans l'anneau $R(FG)$, i.e. si dim $V = 1$, le produit $V \otimes V^*$ est isomorphe au FG-module trivial F. (Ceci justifie la convention $[V]^{-1} = [V^*]$ pour dim $V = 1$ faite précédemment.) L'isomorphisme est donné par $v \otimes v^* \to v^*(v)$. Si alors $\alpha = U - V$ et $\lambda_i \alpha = 0$ pour $i > 1$, on compare les termes de plus haut degré en t dans l'identité $\lambda(\alpha) . \lambda(V) = \lambda(U)$. On trouve α . dét (V) = dét (U), où dét $(V) = \lambda_{\dim V}(V)$ est de dimension 1. Donc, α est la classe dans $R(FG)$ de dét (U) . $\{\text{dét}(V)\}^{-1}$ = dét (U) . dét (V^*).

D'une manière générale, pour que $\alpha \in R(FG)$ soit la classe d'une représentation il est évidemment nécessaire que $\lambda(\alpha)$ soit un polynôme. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Exemple. Soient $G = S_4$, le groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \mathbf{C}$. Il existe un $\mathbf{C}S_4$-module simple V de dimension 3 avec la forme matricielle

$$\rho(12) = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}, \quad \rho(12)(34) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$\rho(123) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \rho(1234) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(C'est le produit de la représentation signe par la composante simple de degré 3 dans la représentation de permutation naturelle.)

En calculant les valeurs propres, on vérifie sans difficulté que $\lambda V = 1 + Vt + Vt^2 + t^3$. Donc, $\lambda(V-1) = 1 + (V-1)t + t^2$, un polynôme. Cependant $V - 1$ est strictement virtuelle.

La propriété (4), i.e. $\Psi_p(\alpha) = \alpha^p \bmod pR(FG)$ résulte immédiatement de l'identité $Q_p(s_1, ..., s_p) = s_1{}^p \bmod p\mathbf{Z}[s_1, ..., s_p]$, elle-même conséquence directe de

$$t_1{}^p + ... + t_p{}^p = (t_1 + ... + t_p)^p \bmod p\mathbf{Z}[t_1, ..., t_p].$$

Pour démontrer les propriétés (1) et (2), on utilise les théorèmes I et II. Puisque Ψ_n commute aux homomorphismes $i : R(FG) \to R(EG)$ d'extension de scalaires et commute également aux homomorphismes de restrictions $R(FG) \to R(FC)$, il suffit de démontrer (1) et (2) dans le cas d'un groupe cyclique et avec un corps de base algébriquement clos E.

Comme d'autre part $R(EC)$ est engendré par les classes des EC-modules simples, il est suffisant de vérifier (1) et (2) lorsque les variables sont les classes de EC-modules simples. (On observera toutefois que cette réduction pour la formule $\Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n$ exige de savoir déjà que Ψ_n est un homomorphisme d'anneau. La démonstration de $\Psi_n(\alpha.\beta) = \Psi_n(\alpha) . \Psi_n(\beta)$ doit donc précéder celle de $\Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n$.)

Or, on a vu au § 1 que tous les EC-modules simples sont de dimension 1 sur E. Pour un EC-module de dimension 1, la vérification de (1) et (2) par calcul direct est immédiate.

Pour démontrer (5) et (6) il est également suffisant, en vertu du théorème II, de se borner au cas d'un groupe cyclique C dont l'ordre divise l'exposant p-régulier m du groupe donné G. (p = caract (F).) On peut aussi supposer pour démontrer (5) que le corps de base E contient les racines du polynôme $X^m - 1$.

Tout EC-module simple est alors de dimension 1 sur E et de la forme E_χ, où $\chi \in \operatorname{Hom}(C, E^\cdot)$, l'action de C sur E_χ étant donnée par

$$s . z = \chi(s) z, \ s \in C, \ z \in E_\chi.$$

On a donc

$$\Psi_n(E_\chi) = E(\chi^n), \text{ et } \Psi_{n+m} E_\chi = \Psi_n E_\chi$$

résulte de $\chi^{n+m} = \chi^n$. (Card C divise m.) Comme les classes des EC-modules simples engendrent $R(EC)$, il en résulte

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(EC) \to R(EC),$$

puis (5) en général par la réduction faite ci-dessus.

Pour (6), on se sert des mêmes remarques. On a

$$\Psi_s(E_\chi) = E(\chi^s)$$

comme on vient de le voir. Il reste à vérifier que $\sigma(E_\chi) = E(\chi^s)$, c.-à-d. que C opère sur $\sigma(E_\chi)$ par

$$x \,.\, \sigma z = \chi^s(x) \sigma z, \quad z \in E_\chi, \quad x \in C.$$

Or,

$$x \,.\, \sigma z = \sigma\big(\sigma^{-1}(x) \,.\, z\big) = \sigma(x.z) = \sigma\big(\chi(x) z\big) = \sigma\big(\chi(x)\big) \,.\, \sigma z,$$

et

$$\sigma\big(\chi(x)\big) = \chi^s(x),$$

puisque $\chi(x)$ est racine m-ième de l'unité.

La propriété (7) est un corollaire facile de (6). Soit E une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$, le corps à q éléments et soit $\sigma \in \operatorname{Aut}(E/\mathbf{F}_q)$ l'automorphisme de Frobenius, i.e. $\sigma(a) = a^q$ pour tout $a \in E$. Comme $i : R(\mathbf{F}_q G) \to R(EG)$ est injectif et commute à Ψ_q, il est suffisant de voir que $\Psi_q\, i = i$. Or, d'après (6), $\Psi_q\, \beta = \sigma\beta$ pour tout $\beta \in R(EG)$. Si $\beta = i\alpha$ on vérifie facilement que $\sigma\beta = \beta$. (C'est trivial sur la forme matricielle d'une représentation.) Donc, $\Psi_q\, i\alpha = i\alpha$, et $\Psi_q\, \alpha = \alpha$ en résulte.

Remarque. Si σ appartient au sous-groupe des commutateurs de $\operatorname{Aut}(F)$, son action sur $R(FG)$ est triviale.

§ 5. Action de Ψ_n dans le groupe des classes de projectifs

Il existe un analogue $K(FG)$ de $R(FG)$ construit à l'aide des FG-modules projectifs. Soit L' le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphie de FG-modules projectifs de dimension finie. On considère le sous-groupe L_0' de L' engendré par les éléments $P - P' - P''$ s'il existe une suite exacte $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$. (On a alors nécessairement $P \cong P' \oplus P''$.)

DÉFINITION. $K(FG) = \mathrm{L}'/L_0'$.

$K(FG)$ est également un foncteur covariant en F. Si $f: G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, on a toujours un homomorphisme induit $f_*: K(FG) \to K(FG')$ déterminé par $P \to FG' \otimes_{FG} P$, mais la restriction n'existe que si FG' est projectif de type fini sur FG ce qui a lieu (G et G' étant finis) si G est sous-groupe de G'. (FG' est même alors FG-libre). Dans ce cas, $f: G \subset G'$ (finis), on a donc un homomorphisme de restriction $f^*: K(FG') \to K(FG)$.

Il est évident que l'on a un homomorphisme de groupes abéliens

$$c: K(FG) \to R(FG)$$

appelé homomorphisme de Cartan.

On va voir que $K(FG)$ est également muni d'opérations d'Adams qui sont compatibles, via c, avec les opérations sur $R(FG)$.

Remarque. $K(FG)$ n'a en général pas de λ-structure compatible via c avec celle de $R(FG)$. Exemple: Soient F le corps à 2 éléments et G le groupe cyclique d'ordre 2. On constate que $K(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par $[FG]$, et $R(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par la classe de F. L'application $c: K(FG) \to R(FG)$ envoie $[FG]$ sur 2 fois le générateur $[F]$ de $R(FG)$. Or, $\lambda_2(FG)$ $F \notin cK(FG)$.

La définition des Ψ_n du § 3 est donc inapplicable pour $K(FG)$.

On va donner une nouvelle définition des Ψ_n inspirée par une construction analogue en topologie due à M. Atiyah. (*Quart. Journal of Math.* 17 (1966), 165-193. Cf. formule (2.7).)

Le point essentiel est la définition de Ψ_l pour l premier, $l \neq$ caract (F). La définition ci-dessous fonctionne aussi bien pour $K(FG)$ que pour $R(FG)$.

Soient V un FG-module et V^l la l-ième puissance tensorielle de V. Le groupe S_l de permutations des indices $\{1, \ldots, l\}$ opère sur V^l par

$$\alpha \,.\, (v_1 \otimes \ldots \otimes v_l) = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_l}$$

où

$$i_k = \alpha^{-1}(k), \alpha \in S_l, \ k = 1, \ldots, l\,.$$

Soit γ la permutation circulaire des indices $1, \ldots, l$, i.e. $\gamma(i) = i + 1 \bmod l$. On notera C_l le sous-groupe (cyclique) de S_l engendré par γ. Soit enfin E le corps des racines sur F du polynôme $X^l - 1$. Comme on a supposé $l \neq$ caract (F), le EC_l-module EV^l se décompose en une somme directe

$$E\,V^l = \oplus_{\xi \in \mu_l} (E\,V^l)_\xi\,,$$

où μ_l est le groupe des racines de $X^l - 1$ dans E et $(EV^l)_\xi$ est le sous-espace propre de EV^l pour la valeur propre ξ de γ, i.e. $(EV^l)_\xi = \operatorname{Ker}(\gamma - \xi)$.

Il est évident que $(EV^l)_\xi$ est sous EG-module de EV^l.

On a $(EV^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi)$, *où* $V(\xi)$ *est un* FG*-module univoquement déterminé.*

Ceci va résulter du lemme classique suivant.

LEMME. *Soient* W *un* EG*-module et* π *un groupe fini d'automorphismes de* E *avec corps fixe* F. *Supposons que* π *opère sur* W *par automorphismes semi-linéaires*, i.e.

$$\sigma(aw) = \sigma(a)\sigma(w),$$

pour tout $a \in E$, $w \in W$, $\sigma \in \pi$ *et que les actions de* π *et* G *commutent.*

Soit $S : W \to W$ *définie par* $S(W) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(w)$. *Alors,* $S(W)$ *est un sous-*FG*-module de* W *et* $W \cong E \otimes_F S(W)$.

Remarque. Si, par ailleurs, on dispose déjà d'un FG-module U tel que $W = E \otimes_F U$, et si $1 \otimes U$ est stable pour l'action de π, alors $U \cong S(W)$, comme FG-modules.

En effet, soit $\{\sigma a\}_{\sigma \in \pi}$ une base normale de E/F. On définit $h : U \to S(W)$ par $h(u) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a \otimes u)$. Il est clair que h commute à l'action de G. D'autre part h est injectif car

$$\sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a \otimes u) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a) \,.\, \sigma(1 \otimes u) = 0$$

entraîne $u = 0$ puisque $\{\sigma(a)\}$ est une F-base de E et $\sigma(1 \otimes u) \in 1 \otimes U$ par hypothèse. Comme $\dim_F U = \dim_E W = \dim_F S(W)$, il en résulte que h est un isomorphisme.

Pour démontrer le lemme, on construit un EG-homomorphisme $f : E \otimes_F S(W) \to W$ par $f(\sum_i a_i \otimes w_i) = \sum_i a_i w_i$. On voit que f est surjectif en prenant une forme $\phi \in \operatorname{Hom}_E(W, E)$ dont on suppose qu'elle s'annule sur $f(E \otimes_F S(W))$ et en utilisant le théorème de l'indépendance des automorphismes pour démontrer que $\phi = 0$. On constate l'injectivité de f en écrivant les éléments de $E \otimes_F S(W)$ sous la forme $\sum_{\sigma \in \pi} \sigma a \otimes w_\sigma$, où $\{\sigma a\}_{\sigma \in \pi}$ est une base normale de E/F et en observant que les éléments de $S(W)$ sont invariants par l'action de π.

On va appliquer ce lemme avec $W = (EV^l)_\xi$ et $\pi = \operatorname{Gal}(E/F)$.

On fait opérer $\pi = \operatorname{Gal}(E/F)$ sur V^l comme suit:

On a l'injection $\pi = \operatorname{Gal}(E/F) \to U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ donnée par

$$\sigma \to s \bmod l \text{ si } \sigma(\xi) = \xi^s$$

pour tout $\xi \in \mu_l$. D'autre part, à $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ on associe la permutation α_s donnée par

$$\alpha_s(i+1) = is + 1 \bmod l .$$

La composition $\pi \to U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) \to S_l$, notée $\sigma \to \alpha_\sigma$, suivie de l'action de S_l sur V^l fournit une action de π sur V^l.

On pose alors

$$\sigma(a \otimes v) = \sigma(a) \otimes \alpha_\sigma(v)$$

pour $a \in E, v \in V^l$.

Il est clair que cette formule définit une action semi-linéaire de π sur EV^l qui commute à l'action de G et laisse stable $1 \otimes V^l$.

On vérifie que $\alpha_s \,.\, \gamma = \gamma^s \,.\, \alpha_s$ pour tout $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$. On a donc

$$\sigma\gamma(v) = \gamma^s \sigma(v), v \in E\,V^l$$

et $\sigma\,\xi = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$ et par suite l'action de π préserve $(EV^l)_\xi$. En effet,

$$\gamma\,\sigma(v) = \sigma(\gamma^{s'}v) = \sigma(\zeta^{s'}v) = \sigma(\xi^{s'})\,\sigma(v) = \xi\,\sigma(v),$$

où $ss' = 1 \bmod l$.

En vertu du lemme, on a donc

$$(E\,V^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi),$$

avec

$$V(\xi) = S(E\,V^l)_\xi,$$

où

$$S(w) = \textstyle\sum_{\sigma \varepsilon \pi} \sigma(w), \; w \in (E\,V^l)_\xi .$$

Définition. $\Psi'_l(V) = [V(1)] - [V(\zeta)]$, où ζ est un générateur (quelconque) du groupe $\mu_l \subset E^\cdot$ des racines de $X^l - 1$ et $[\ ]$ désigne la classe du module entre crochets dans le groupe de Grothendieck $K(FG)$, resp. $R(FG)$.

Cette définition exige de vérifier

(1) que $V(1)$ et $V(\zeta)$ sont FG-projectifs si c'est le cas pour V,

(2) que $[V(\zeta)]$ est indépendant du générateur choisi $\zeta \in \mu_l$.

Pour contrôler (1), on observe que

$$S(E\,V^l) = \oplus_{\xi\in\mu_l} S(E\,V^l)_\xi = \oplus_{\xi\in\mu_l} V(\xi).$$

Comme V^l est stable par π, la remarque qui suit le lemme ci-dessus entraîne

$$V^l \cong S(E\,V^l) = \oplus_{\xi\in\mu_l} V(\xi)$$

ce qui montre bien que $V(\xi)$ est projectif si c'est le cas pour V, et donc pour V^l.

Pour démontrer (2) on va en fait exhiber un isomorphisme de FG-modules $V(\zeta) \cong V(\eta)$ pour deux générateurs quelconques ζ, $\eta \in \mu_l$. Puisque ζ, η sont des générateurs de μ_l, il existe un entier n premier à l et tel que $\eta = \zeta^n$. Soit, comme ci-dessus, $\alpha_n \in S_l$ la permutation donnée par la formule

$$\alpha_n(i+1) = in + 1 \bmod l .$$

On a vu que $\alpha_n \,.\, \gamma = \gamma^n \,.\, \alpha_n$. Il en résulte que l'on a un EG-homomorphisme $\alpha_n : (EV^l)_\eta \to (EV^l)_\zeta$. C'est évidemment un isomorphisme, par symétrie de la construction. D'autre part α_n commute à l'action de π et fournit donc un FG-isomorphisme $\alpha_n : S(EV^l)_\eta \to S(EV^l)_\zeta$.

La définition a donc un sens. Pour démontrer que Ψ_l' induit une opération (additive) sur $K(FG)$, resp. $R(FG)$, il suffit de vérifier que si $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, projectifs si l'on s'intéresse à $K(FG)$, on a

$$\Psi_l' V_1 = \Psi_l' V_0 + \Psi_l' V .$$

Soit Q le FG-module défini par la suite exacte

$$0 \to Q \to V_1^l \to V^l \to 0 .$$

Comme ci-dessus, on a des opérations semi-linéaires de $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$ sur EV_1^l, EV^l et donc sur EQ, ainsi que des actions de S_l sur ces modules. Il est clair que $EV_0^l \subset EQ$ et EV_0^l est stable par G, π, S_l. On va démontrer que

$$[S(EQ/EV_0^l)_1] = [S(EQ/EV_0^l)_\xi]$$

pour tout $\xi \in \mu_l$, où l'indice ξ signifie que l'on prend l'espace propre pour la valeur propre ξ de γ, la permutation circulaire $\big(\gamma(i) = i + 1 \bmod l\big)$, et S est définie comme ci-dessus $S = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma$.

La suite exacte

$$0 \to EQ/EV_0^l \to EV_1^l/EV_0^l \to EV^l \to 0$$

se décompose en somme directe de suites

$$0 \to (EQ/EV_0^l)_\xi \to (EV_1^l/EV_0^l)_\xi \to (EV^l)_\xi \to 0$$

exactes pour chaque $\xi \in \mu_l$. D'où

$$0 \to S(EQ/EV_0^l)_\xi \to S(EV_1^l/EV_0^l)_\xi \to S(EV^l)_\xi \to 0 .$$

On a évidemment aussi les suites exactes

$$0 \to S(E\,V_0^l)_\xi \to S(E\,V_1^l)_\xi \to S(E\,V_1^l/E\,V_0^l)_\xi \to 0\,.$$

A condition d'avoir démontré que les modules considérés sont projectifs si V_0, V_1 et V le sont, on a alors

$$[S(E\,V^l)_\xi] = [S(E\,V_1^l)_\xi] - [S(E\,V_0^l)_\xi] - [S(E\,Q/E\,V_0^l)_\xi]\,.$$

En soustrayant membre à membre ces égalités pour $\xi = 1$ et $\xi = \zeta$, un générateur de μ_l, on obtient

$$\Psi_l'\,V = \Psi_l'\,V_1 - \Psi_l'\,V_0\,.$$

Reste donc à démontrer que $[S(EQ/EV_0^l)_\xi]$ a un sens dans $K(FG)$, resp. $R(FG)$ et ne dépend pas de $\xi \in \mu_l$.

Pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$ avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1, posons $V_\varepsilon = V_{\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2} \otimes \ldots \otimes V_{\varepsilon_l}$. C'est un sous FG-module de V_1^l. On note $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l$. Les égalités $|\varepsilon| = 0$ et $|\varepsilon| = l$ caractérisent les suites $(0, \ldots, 0)$ et $(1, \ldots, 1)$ respectivement. D'autre part, les V_ε avec $|\varepsilon| = \lambda$, constant, sont permutés entre eux par S_l. De même, les EV_ε sont permutés entre eux par π. On voit que

$$Q = \sum\nolimits_{|\varepsilon| < l} V_\varepsilon\,.$$

Les FG-modules V_ε fournissent une filtration de Q. Pour tout λ tel que $0 \leqq \lambda \leqq l - 1$, on pose

$$Q_\lambda = \sum\nolimits_{|\varepsilon| \leqq \lambda} V_\varepsilon\,.$$

Les Q_λ sont des sous FG-modules de Q et

$$Q = Q_{l-1} \supset \ldots \supset Q_1 \supset Q_0 = V_0^l\,.$$

De même $EQ = EQ_{l-1} \supset \ldots \supset EQ_1 \supset EQ_0 = EV_0^l$, et les groupes π et S_l préservent la filtration.

On va expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ pour $\lambda \neq 0, l$.

Notation. Soit W_ε le produit tensoriel obtenu en remplaçant par V chaque facteur V_1 dans V_ε. E.g. si $l = 5$, $\varepsilon = (1, 1, 0, 0, 1)$, on a

$$V_\varepsilon = V_1 \otimes V_1 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_1$$

et

$$W_\varepsilon = V \otimes V \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V\,.$$

On a une application évidente surjective $V_\varepsilon \to W_\varepsilon$ qui commute à l'action de G. Remarquons aussi que tous les W_ε sont projectifs si V et V_0 le sont.

Il est commode de faire opérer S_l sur les suites $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l)$ par permutation des indices. Le fait essentiel est que C_l opère *sans point fixe* sur l'ensemble des suites ε telles que $|\varepsilon| \neq 0, l$. Il en résulte que les C_l-orbites de ces suites ont toutes la même cardinalité l (qui est premier). Rappelons d'autre part que à $\sigma \in \pi$ tel que $\sigma\xi = \xi^s$, on a associé la permutation $\alpha_\sigma \in S_l$ donnée par $\alpha_\sigma(i+1) = is + 1 \bmod l$. Comme les α_σ normalisent C_l, il en résulte que π opère sur les orbites de C_l. Comme de plus π est abelien, il est facile de voir qu'il existe un système R_λ de représentants des C_l-orbites dans l'ensemble des suites ε telles que $|\varepsilon| = \lambda \neq 0$, qui est *stable par l'action de* π.

Ces remarques permettent d'expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$. Je dis que

$$E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \cong E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon)$$

par un isomorphisme qui commute avec les actions de G sur le deuxième facteur et de C_l sur le premier (dans le membre de droite). On s'occupera plus tard de l'action de π.

On définit $f_\lambda : EC_l \otimes_E (\otimes_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ comme suit. Soit $z = \gamma^i \otimes w$ avec $w = w_1 \otimes ... \otimes w_l \in W_\varepsilon$ et γ le générateur choisi de C_l. Pour $\varepsilon_k = 1$, on a $w_k \in V$ et pour $\varepsilon_k = 0$, $w_k \in V_0$. Pour chaque indice k tel que $\varepsilon_k = 1$, on choisit un élément $v_k \in V_1$ se projettant sur w_k par la flèche donnée $V_1 \to V$. Si $\varepsilon_k = 0$, on définit v_k par $v_k = w_k \in V_0$. On pose

$$f_\lambda(\gamma^i \otimes w) = \gamma^i . (v_1 \otimes ... \otimes v_l) \in E\,Q_\lambda/Q_{\lambda-1} .$$

Il est facile de voir que f_λ est bien définie sur les éléments de la forme $\gamma^i \otimes w$. On l'étend à $EC_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon)$ tout entier par linéarité.

Il est clair que f_λ commute à l'action de G naturelle sur $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ et triviale sur EC_l. Il est également évident que f_λ est surjective. Pour voir que f_λ est un isomorphisme, on compare les dimension sur E des deux membres.

$$\dim_E E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) = l \,.\, \frac{1}{l} \binom{l}{\lambda} . (\dim_F V)^\lambda (\dim_\lambda V_0)^{l-\lambda} .$$

On utilise ici le fait que C_l opère sans point fixe sur $\{\varepsilon, |\varepsilon| \neq 0, l\}$ pour dénombrer Card $R_\lambda = \frac{1}{l} . \binom{l}{\lambda}$. Chacune de ces dimensions est supérieure ou égale à $\dim_F Q_\lambda/Q_{\lambda-1}$. Or,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1} \binom{l}{\lambda} . (\dim V)^\lambda (\dim V_0)^{l-\lambda} &= (\dim V + \dim V_0)^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim V_1^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim (Q/V_0^l) = \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1} \dim Q_\lambda/Q_{\lambda-1} . \end{aligned}$$

Donc, chaque f_λ, $\lambda = 1, \ldots, l-1$ est un isomorphisme.

Comme f_λ commute à l'action de C_l, on a

$$\begin{aligned} E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi &\cong (E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon))_\xi \\ &\cong (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

puisque l'action de C_l dans le deuxième membre se réduit à l'action sur le premier facteur EC_l.

En outre, on remarque que le membre de droite est EG-isomorphe à $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ puisque $(EC_l)_\xi$ est de dimension 1 et que G y opère trivialement.

Le EG-module $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$ est donc finalement isomorphe à $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ qui est indépendant de $\xi \in \mu_l$.

Reste à voir comment ces isomorphismes se comportent pour l'action de $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$. On fait agir $\sigma \in \pi$ sur EC_l par

$$\sigma(\textstyle\sum_i a_i\gamma^i) = \sum_i \sigma(a_i)\,\gamma^{is}\,,$$

où $s \bmod l$ est déterminé par $\sigma(\xi) = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$. On prend l'action diagonale de π sur $EC_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon)$, en observant que π opère bien sur le deuxième facteur car R_λ est stable par π. On vérifie alors sans difficulté que $f_\lambda\,\sigma = \sigma f_\lambda$.

Un choix de vecteur base pour $(EC_l)_\xi$ est

$$u = \frac{1}{l}\sum_i \xi^{-i}\,\gamma^i$$

et cet élément est invariant par π. Donc,

$$f_\lambda : (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$$

commute à l'action de π, et il en est de même de l'isomorphisme

$$g_\lambda : (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \to \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon$$

puisque π opère trivialement sur u.

Ainsi,

$$g_\lambda \cdot f_\lambda^{-1} : E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \to \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon$$

est un isomorphisme de EG-modules qui commute à l'action de π et il en résulte:

$$S\,E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong S(\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \cong \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon\,.$$

(Le deuxième isomorphisme en vertu de la remarque qui suit le lemme.)

On conclut que

$$S\,E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon$$

est indépendant de ξ à FG-isomorphisme près et est un FG-module projectif si V_0, V et donc W_ε le sont.

On considère les suites exactes

$$0 \to E(Q_{\lambda-1}/V_0^l) \to E(Q_\lambda/V_0^l) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \to 0$$

qui fournissent les suites exactes

$$0 \to SE(Q_{\lambda-1}/V_0^l)_\xi \to SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi \to SE(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \to 0\,.$$

On voit alors par récurrence sur $\lambda = 1, \ldots, l-1$ que $SE\,(Q_\lambda/V_0^l)_\xi$ est FG-projectif si V_0, V le sont, et que sa classe $[SE\,(Q_\lambda/V_0^l)_\xi]$ est indépendante de ξ. Explicitement, on obtient

$$[SE(Q/V_0^l)_\xi] = \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1}(-1)^{l-\lambda-1}[\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon]\,.$$

On a donc démontré

$$\Psi_l'(V_1) = \Psi_l'(V_0) + \Psi_l'(V)\,.$$

Il reste à vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(F\,G) & \xrightarrow{c} & R(F\,G) \\ \downarrow \Psi_l' & & \downarrow \Psi_l \\ K(F\,G) & \xrightarrow{c} & R(F\,G) \end{array}$$

commute. Ceci est facile. Il est suffisant de vérifier $\mathrm{res}\,.\,i\,(c\Psi_l' - \Psi_l c) = 0$, avec $\mathrm{res}\,.\,i : R(FG) \to R(LG) \to \prod_{C\in\mathscr{C}} R(LC)$, où L est une clôture algébrique de F et $\mathscr{C}$ est la famille des sous-groupes cycliques p-réguliers de G.

On sait que Ψ_l commute à $\mathrm{res}\,.\,i$. Pour Ψ_l' le même résultat est de vérification facile. On est donc ramené à démontrer $c\,\Psi_l'\,V - \Psi_l\,c\,V = 0$ dans le cas où F est algébriquement clos et G est cyclique (d'ordre premier à caract (F)). On peut même supposer que V est un FG-module simple, donc de dimension 1, puisque Ψ_l' et Ψ_l sont toutes deux additives.

Le groupe cyclique C_l opère alors trivialement sur V^l comme on le voit en identifiant V à F (comme F-espace vectoriel) puis V^l à F par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_l \to x_1 \ldots x_l \in F\,.$$

Dans ce cas, on a donc

$$\mathrm{Ker}\,(\gamma - 1) = V^l, \text{ et } \mathrm{Ker}\,(\gamma - \xi) = 0\,.$$

Comme $\pi = \{1\}$ puisque F est algébriquement clos, on obtient

$$\Psi_l'(V) = [V^l] = [V]^l \in K(F\,G)\,.$$

Donc,

$$c\,\Psi_l'(V) = c\,[V]^l = \Psi_l\,c\,(V)\,.$$

On notera également Ψ_l l'endomorphisme $\Psi_l' : K(FG) \to K(FG)$.

Résumé. Soient F un corps de caractéristique p et G un groupe fini. Pour tout nombre premier $l \neq p$, il existe une opération d'Adams $\Psi_l : K(FG) \to K(FG)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \\ \downarrow \Psi_l & & \downarrow \Psi_l \\ K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \end{array}$$

commute.

Remarques. On peut maintenant définir $\Psi_m : K(FG) \to K(FG)$ pour tout m premier à p = caract (F) par

$$\Psi_m = \prod_i \Psi_{l_i}^{e_i}, \quad ou \quad m = \prod_i l_i^{e_i} .$$

(Avant de savoir que c est injectif, prendre les facteurs Ψ_{l_i} dans un ordre fixé, par exemple celui prescrit par $l_1 < l_2 < \ldots$.)

On a $\Psi_m c = c \Psi_m$ pour tout m premier à p.

Soit en particulier m l'exposant p-régulier de G. Par définition m est premier à p. Pour tout FG-module projectif P, on a par périodicité

$$(\dim_F P) . 1 = \Psi_0 c(P) = \Psi_m c(P) = c \Psi_m(P) \in c K(FG) .$$

Il en résulte facilement que $R(FG)/c K(FG)$ a pour exposant *exact* le p.g.c.d. des dimensions des FG-modules projectifs.

Cet exposant est évidemment un diviseur de Card $G = \dim_F FG$.

Comme $R(FG)$ est de génération finie, $R(FG)/cK(FG)$ est un groupe fini.

On voit assez facilement que $K(FG)$ et $R(FG)$ sont abéliens libres de même rang. On retrouve donc le fait que c est injective. (Cf.[Serre], p. 136, Cor. 2.)

Il est facile de montrer que l'exposant de Coker c est la plus grande puissance de p divisant Card G.

En effet, soient $l \neq p$ un nombre premier et $H = H_l$ un l-sous-groupe de Sylow de G. Puisque l est premier à p, le FH-module trivial F est FH-projectif. (La surjection $FH \to F$ admet la section $a \to \frac{a}{[H:1]} \sum_{s \in H} s$.) Donc $P_l = FG \otimes_{FH} F$ est FG-projectif. On a $\dim_F P_l = [G:H]$. Il est clair que

$$\text{p.g.c.d. } \{[G:H_l], \text{ pour } l \neq p\} = p^n ,$$

la plus grande puissance de p divisant Card G. Donc l'exposant de Coker c divise p^n.

Soit maintenant H un p-sous-groupe de Sylow de G. On a Card $H = p^n$. Si P est FG-projectif, il est aussi FH-projectif par restriction, et on voit facilement que cela implique FH-libre. Donc $\dim_F P$ est un multiple de $[H:1] = p^n$. (Cf. [Serre], p. 145, Exercice 3.)

L'exposant de Coker c est donc exactement p^n.

Il reste encore à définir

$$\Psi_p : K(FG) \to K(FG),$$

où p = caract (F)

Dans le cas où F est parfait, e.g. algébriquement clos, la définition est dictée par le fait que F admet l'automorphisme de Frobenius $\sigma : F \to F$ tel que $\sigma(a) = a^p$. D'après la propriété (6) au § 4, $\Psi_p(\alpha) = \sigma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

On n'a donc pas le choix:

$$\Psi_p(P) = \sigma(P),$$

où $\sigma(P)$ est évidemment FG-projectif si P l'est.

Pour attraper $\Psi_p : K(FG) \to K(FG)$ pour F quelconque, on peut utiliser le fait bien connu que $i_K : K(FG) \to K(LG)$ est une injection directe. (caract $(F) \neq 0$, L une clôture algébrique de F. Cf. [Serre], p. 136.) Donc, Coker i_K est sans torsion.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c_F} & R(FG) \\ \downarrow i_K & & \downarrow i_R \\ K(LG) & \xrightarrow{c_L} & R(LG) \end{array}$$

nous apprend alors que

$$c_L : \text{Coker } i_K \to \text{Coker } i_R$$

est injectif. (Compte tenu du fait démontré ci-dessus que Coker c_F est fini.)

Or, pour tout $\alpha \in K(FG)$, on a

$$c_L \Psi_p i_K \alpha = \Psi_p c_L i_K \alpha = \Psi_p i_K c_F \alpha = i_R \Psi_p c_F \alpha .$$

Donc, $c_L \Psi_p i_K \alpha$ représente $0 \in$ Coker i_R. Il en résulte que $\Psi_p i_K \in i_K K(FG)$ et il existe un élément $\beta \in K(FG)$, unique puisque i_K est injectif, tel que $\Psi_p i_K \alpha = i_K \beta$. On pose $\Psi_p \alpha = \beta$.

La définition de Ψ_n pour n entier quelconque est immédiate et dictée par les propriétés $\Psi_{kn} = \Psi_k \,.\, \Psi_n$ et la périodicité ou la propriété $\Psi_{-n}(\alpha) = (\Psi_n \alpha)^*$.

(Reçu le 5 mai 1975)

M. Kervaire

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24