

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOW TO USE RUNGE'S THEOREM
Autor: Rubel, L. A.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48184>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

where G is some open superset in D of the set E . Now to construct f_2 , we observe that the complement in D of G is contained in $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, where each S_k is a closed annular sector of the form

$$S_k = \{z = re^{i\theta} : s_k \leq r \leq t_k, \delta_k \leq \theta \leq 2\pi - \delta_k\}$$

and $s_k \uparrow 1$, $t_k \uparrow 1$ and $t_k < s_{k+1}$ for $k = 1, 2, 3, \dots$.

Define g_1 in D by $g_1(z) = 2$. Having defined g_1, \dots, g_n , consider a closed disc U^n with center at 0 that contains S_1, \dots, S_n and a slightly larger open disc D^n that excludes S_{n+1} . Let S'_{n+1} be an open superset of S_{n+1} that does not intersect D^n , and define φ_n in $D^n \cup S'_{n+1}$ by $\varphi_n(z) = n + 2 - \sum_{i=1}^n g_i(z)$ for $z \in S'_{n+1}$ and $\varphi_n(z) = 0$ in D^n . By Runge's theorem, there is a polynomial g_n such that

$$|g_n(z) - \varphi_n(z)| < 2^{-n-2}$$

for $z \in U^n \cup S_{n+1}$. Let $f_2 = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$. It is easily verified that the series converges uniformly on compact subsets of D to a function f_2 that is analytic on D . On S_n ,

$$f_2(z) = g_n(z) + \sum_{i=1}^{n-1} g_i(z) + \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i(z),$$

so that in S_n

$$|f_2(z)| \geq n + 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i-2} \geq n.$$

Hence

$$(**) \quad \liminf_{r \rightarrow 1} \{ |f_2(z)| : z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n, |z| \geq r \} = \infty$$

Since $G \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) = D$, we have the desired result on putting (*) and (**) together.

REFERENCES

- [1] CLUNIE, J. On a problem of Gauthier. *Mathematika* 18 (1971), pp. 126-129.
- [2] GAUTHIER, P. M. Une application de la théorie de l'approximation à l'étude des fonctions holomorphes. *Spline Functions and Approximation Theory*, pp. 113-118, Basel and Stuttgart, 1973.

- [3] GUNNING, R. and H. ROSSI. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Englewood Cliffs, 1965.
- [4] KASAHARA, K. and T. NISHIRO. *As announced in Math. Reviews* 38 (1969) #4721.
- [5] LAUFER, H. B. Imbedding annuli in C^2 . *J. D'Analyse Math.* 26 (1973), pp. 187-215.
- [6] SAKS, S. and A. ZYGMUND. *Analytic Functions*. Warsaw, 1952.
- [7] YANAGIHARA, N. A remark on imbedding of the unit disc into C^2 (Japanese). *J. College Arts Sci. Chiba Univ.* 5 (1967), No. 1, pp. 21-24.

(Reçu le 10 février 1976)

L. A. Rubel

University of Illinois
at Urbana-Champaign, Ill. 61801