Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÔLE, PLACE, ET CONTENU D'UN PREMIER ENSEIGNEMENT DÉDUCTIF DES PROBABILITÉS

Autor: Breny, H.

Kapitel: 6. Introduction a la statistique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48177

obstacle à un développement ultérieur, il faut que les définitions soient parfaitement générales et que les énoncés soient aussi généraux que possible, quitte à ne les démontrer que pour le seul cas fini. En ce qui concerne les variables aléatoires et leurs valeurs typiques, on y arrive en exploitant les propriétés géométriques de la fonction de répartition; par exemple, on prend comme définition de la moyenne μ de x la relation *géométrique* (égalité d'aires)

$$\int_{-\infty}^{\mu} F(t)\,dt = \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(t)]\,dt\,, \tag{8a}$$

tandis que l'écart-moyen V et la variance σ^2 sont définis par les expressions *géométriques* (sommes de deux aires)

$$V = \int_{-\infty}^{\mu} F(t)\,dt + \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(t)]\,dt \tag{8b}$$

$$\frac{\sigma^2}{2} = \int_{-\infty}^{\mu} dt \int_{-\infty}^{t} F(s)\,ds + \int_{\mu}^{+\infty} dt \int_{t}^{+\infty} [1 - F(s)]\,ds\,. \tag{8c}$$

[L'aspect *géométrique* (en termes d'aires) des expressions (8) est particulièrement important: il s'agit de faire « voir » la signification des paramètres μ, V, σ; un traitement analytique basé sur les formules (8) est, à ce niveau, entièrement à rejeter (bien qu'il soit parfaitement correct).]
Il est alors possible de démontrer en toute généralité que V est la moyenne de la variable aléatoire $|x - \mu|$; par contre, démontrer que σ^2 est la moyenne de la variable aléatoire $(x - \mu)^2$ n'est possible, avec ces moyens, que pour le cas des variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est soit fini soit inclus dans **N**.

De cette façon, un premier enseignement déductif atteint parfaitement son but: il met en place et il organise les notions intuitives acquises au stade antérieur, sans rendre plus difficile, mais au contraire en préparant, l'enseignement plus théorique qui, pour certains élèves, lui fera suite.

6. Introduction a la statistique

a. S'il convient, ou non, d'introduire à la fin de l'enseignement secondaire un premier enseignement systématique de la statistique inférentielle est une question controversée; il y a des arguments en sa faveur (p. ex., que dans l'enseignement supérieur ces éléments sont souvent utilisés avant d'être systématiquement envisagés), il y a aussi de puissants arguments contre (c'est une théorie trop délicate et trop abstraite pour des élèves de cette classe d'âge; on ne peut valablement l'exposer qu'à partir d'exemples réels, et ceux-ci sont trop complexes; on risque de « former » de pseudo-spécialistes). La question restera, ici, non décidée.

b. Mais on ne peut absolument pas échapper à la question, plus générale: «dans quelle mesure tel ou tel modèle mathématique d'une situation donnée est-il une représentation adéquate de cette situation?». Puisque le premier enseignement déductif des probabilités doit tenir compte *à la fois* de la situation et du formalisme, il ne suffit pas que l'examen attentif de la situation ait suggéré des hypothèses, et que l'emploi judicieux du formalisme en ait déduit des conséquences; il *faut* que l'analyse se termine par un retour à la situation, et la comparaison des conséquences déduites aux résultats observables.

c. De ce point de vue, les situations hautement symétriques jouent un rôle d'une grande importance. La tendance actuelle est, au stade A, de ne pas s'en tenir à ces situations-là, mais de familiariser les élèves avec des situations plus compliquées: c'est une tendance fort heureuse; mais néanmoins, c'est à partir des situations hautement symétriques que se fait le premier examen du mode de comparaison de la théorie à l'expérience. Voici par exemple la situation aléatoire composée de quatre tirages successifs d'une même urne $U(3V, 3R)$ [1]). L'ensemble des possibles, Ω, se compose des 16 « mots » formés de 4 lettres V ou R, et on a $\mathscr{T} = \mathscr{P}\Omega$ [on va employer des notations du type

$$(*x*y) = \{(abcd) \in \Omega \,\big\}\, b = x \,\&\, d = y \}] .$$

L'examen attentif des 6 billes de l'urne montre qu'elles sont toutes sphériques, qu'elles ont toutes le même diamètre et la même masse, que leurs états de surface sont indiscernables. Ceci suggère avec force que V et R jouent des rôles interchangeables, et donc que l'application Pr doit être invariante vis-à-vis de l'échange de V et R. Cette *hypothèse* de symétrie entraîne donc que

$$H_1 \begin{cases} \Pr(V***) = \Pr(R***)\,, & \left[= \dfrac{1}{2}, \text{ car } V*** \cup R*** = \Omega \right] \\ \Pr(*V**) = Pr(*R**) = 1/2\,, & \text{et ainsi de suite.} \end{cases}$$

[1]) C'est-à-dire contenant 3 billes Vertes et 3 billes Rouges.

D'autre part, on mélange avec soin les billes de l'urne entre les essais successifs; ceci suggère avec force *l'hypothèse* d'absence d'interaction mutuelle entre essais successifs, traduite formellement par

$$H_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{les partitions } \{ R^{***}, V^{***} \}, \{ {}^*R^{**}, {}^*V^{**} \}, \{ {}^{**}R^*, {}^{**}V^* \}, \\ \{ {}^{***}R, {}^{***}V \} \text{ sont indépendantes.} \end{array} \right.$$

Les hypothèses H_1 et H_2 prises ensemble conduisent à la conclusion

$$\forall (a, b, c, d) \in \Omega \, ; \; \Pr \{ (a\, b\, c\, d) \} = \frac{1}{16} .$$

C'est là un exemple simple d'analyse probabiliste d'une situation donnée. Mais il est **indispensable** de ne pas en rester là, et de se demander si, empiriquement, les *hypothèses* H_1 et H_2 se justifient. Or, si on procède à un grand nombre de réalisations de la situation, et si on observe les fréquences f_1 de (V^{***}), ..., f_4 de $({}^{***}V)$, on constate empiriquement que

$$f_1 \sim f_2 \sim f_3 \sim f_4 \sim \frac{1}{2} .$$

Cette constatation confirme empiriquement l'hypothèse H_1. De même, on peut observer des fréquences relatives [p. ex. la fréquence relative de $f_{2|1}$ (VV^{**}) par rapport à (V^{***})] et constater qu'elles sont approximativement égales: ceci confirme empiriquement l'hypothèse H_2.

Cela étant, si l'on considère ensuite 4 essais successifs avec une urne $(2V, 4R)$ bien mélangée, il est tout naturel de considérer, par analogie avec le cas précédent, *l'hypothèse*

$$H_1' : \Pr (V^{***}) = \Pr ({}^*V^{**}) = \Pr ({}^{**}V^*) = \Pr ({}^{***}V) = \frac{1}{3} .$$

Si on considère un grand nombre de réalisations de cette situation, l'hypothèse H_1' est empiriquement confirmée par la constatation que

$$f_1 \sim f_2 \sim f_3 \sim f_4 \sim \frac{1}{3} .$$

Il en est de même dans beaucoup de cas. On en vient ainsi à disposer d'une théorie [1]) dont le noyau structurel est constitué par l'axiomatique de

[1]) « Disposer d'une théorie » est, épistémologiquement parlant, un concept relativement compliqué; on trouve des explications raisonnablement complètes, sinon toujours fort claires, dans [14], pp. 189-194.

Kolmogorov et ses conséquences (y compris les lois des grands nombres), qui peut être spécialisée en divers modèles par l'adjonction de contraintes supplémentaires (p. ex. des conditions de symétrie), dont les applications envisagées sont les situations où est en jeu un mécanisme aléatoire formé d'un ensemble fini d'éléments interchangeables, et dont le paradigme comprend les jeux de hasard classiques (dés, cartes), les schémas d'urnes, et la théorie chromosomique de l'hérédité.

d. Toutes les situations étudiées au stade A relèvent de cette théorie (voir p. ex. [3]). Il incombe à l'enseignement déductif du stade B de mettre très clairement en évidence le *double* rôle des situations concrètes dans ce développement:

au départ, l'analyse de la situation suggère des *hypothèses* relatives à la fonction Pr;

à l'arrivée, l'examen de la situation révèle des éléments empiriques étroitement parallèles aux éléments théoriques qui résultent de ces hypothèses.

En outre, les lois des grands nombres accentuent ce parallélisme, et permettent d'étendre la théorie à des situations aléatoires douées d'une structure répétitive propre, pour lesquelles il n'est plus nécessaire de considérer de multiples réalisations d'une *même* situation.

[Incidemment, on note que, pour beaucoup d'auteurs, des réalisations multiples (en nombre n) d'une situation aléatoire S doivent être considérées comme formant *une* réalisation d'une situation « d'ordre supérieur » $\mathcal{S}$: si la situation S est représentée par $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{Pr})$ alors $\mathcal{S}$ a comme ensemble de possibles le produit de n exemplaires de Ω, et comme probabilité le produit de n mesures Pr, compte tenu, disent-ils, de l'indépendance des réalisations successives de S. Une telle position est inadmissible, pour plusieurs raisons:

a. s'il en était ainsi, on ne disposerait jamais que d'une seule réalisation (de $\mathcal{S}$), et le caractère aléatoire de la situation ne serait pas empiriquement observable;

b. lorsqu'un physicien, un chimiste, un biologiste répète une expérience, personne ne songe à lui contester le droit de considérer que c'est bien la *même* expérience qui est ainsi faite plusieurs fois; nul ne songe à lui opposer l'aphorisme d'Héraclite, « tout change, on ne se baigne pas deux fois dans le même fleuve »; pourquoi devrait-on contester ce droit aux seuls probabilistes?

c. quiconque prend vraiment au sérieux l'aphorisme d'Héraclite ne peut qu'abandonner tout dessein scientifique; la science n'est possible que dans un univers de « natures » suffisamment stables; mais un mécanisme aléatoire est une « nature stable » exactement au même titre qu'un mécanisme physique, chimique, ou biologique; si je dispose d'une urne U ($2V$, $4R$) et que j'en extraie (avec remise) 20 billes, c'est là un mécanisme stable, avec des propriétés constantes, que l'on peut « réaliser » à diverses reprises sans pour cela devoir craindre que chaque réalisation modifie le mécanisme.]

Pourquoi les études du stade A sont-elles, le plus souvent, si étrangement indifférentes au rôle a posteriori de l'observation empirique, sinon parce que l'enseignement déductif qui les suit oublie lui aussi ce rôle? Il y a là une situation malsaine, à laquelle on croit remédier en imposant à la majorité des élèves un enseignement de statistique. Ce remède — difficile à administrer et peut-être dangereux — n'est nullement nécessaire: il suffit — mais il *faut* — que le premier enseignement déductif de la théorie des probabilités la traite exactement comme il convient à une théorie physique: chacun de ses modèles part d'une situation, et y retourne; ce retour, et lui seul, permet de discriminer entre divers modèles possibles; en ce sens, les débuts de la statistique inférentielle font partie intégrante de cet enseignement, mais c'est pour la seule et unique raison qu'ils font partie intégrante de la théorie elle-même.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUNGE, M. *Philosophie de la physique.* Paris, 1975.
[2] DUHEM, P. *La théorie physique* (2e éd.). Paris, 1914.
[3] ENGEL, A. *L'enseignement des probabilités et de la statistique.* Paris, 1975.
[4] FREUDENTHAL, H. a) Der Warscheinlichkeitsbegriff als angewandte Mathematik, in: *Les applications nouvelles des mathématiques et l'enseignement secondaire* (ouvrage collectif); Echternach, 1973.
b) The crux of course design in probability. *Educ. Studies in Math.* 5 (1974), pp. 261-277.
[5] Groupe de travail ministériel sur les contenus de l'enseignement mathématique. *Bull. Association Prof. Math. Ens. Public*, 53/300. (1975), p. 557.
[6] KUHN, T. S. *La structure des révolutions scientifiques.* Paris, 1972.
[7] LAKATOS, I. and A. MUSGRAVE. *Criticism and the growth of knowledge* (ouvrage collectif). Cambridge, 1970.
[8] MARITAIN, J. *Les degrés du savoir* (3e éd.), Paris, 1932.
[9] Mathematical Association. *The teaching of geometry in schools.* London, 1923 (3d ed., reprinted, 1963).