

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME
Autor: Ronga, Felice
Kapitel: 3. Classification
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48175>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

(ce qui équivaut aux permutations cycliques des racines troisième de l'unité), et cela donne en tout un groupe d'ordre 54. La deuxième exception est lorsque $b = -1$; dans ce cas, auquel appartient $\sum(f_t)$ lorsque $t = -10 \pm \sqrt{108}$, il faut ajouter à G le groupe d'ordre deux engendré par $(z_0, z_1, z_2) \rightarrow (-z_0, i.z_1, z_2)$ et on obtient en tout un groupe d'ordre 36.

Pour la détermination du groupe des automorphismes qui laissent invariante une cubique, on peut consulter [2], pages 84 et 85.

3. CLASSIFICATION

Considérons la famille d'applications

$$f_T(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + t_0 \cdot z_1 \cdot z_2, z_1^2 + t_1 \cdot z_0 \cdot z_2, z_2^2 + t_2 \cdot z_0 \cdot z_1),$$

où $T = (t_0, t_1, t_2);$

on vérifie que f_T définit bien une application de PC^2 dans lui-même à condition que $t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \neq -1$. On va distinguer dans cette famille quatre cas:

I) t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$ et $t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \neq 8$. Après changement de coordonnées à la source: $z_0 = t_0^{2/3} \cdot t_1^{1/3} \cdot z'_0, z_1 = t_0^{1/3} \cdot t_1^{2/3} \cdot z'_1, z_2 = z'_2$, et au but: $w'_0 = t_0^{-4/3} \cdot t_1^{-2/3} \cdot w_0, w'_1 = t_0^{-2/3} \cdot t_1^{-4/3} \cdot w_1, w'_2 = w_2$, en omettant les primes et en posant $t = t_0 \cdot t_1 \cdot t_2$, on retrouve la famille $f'_t(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + z_1 \cdot z_2, z_1^2 + z_0 \cdot z_2, z_2^2 + t \cdot z_0 \cdot z_1)$ déjà vue dans la démonstration de 2.6. Puisque $t \neq -1, 0, 8$, le lieu singulier de f'_t est une cubique non singulière.

II) $t_0 = 0, t_1$ et $t_2 \neq 0$. Après un changement de coordonnées on est ramené à la forme $f''(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 \cdot z_2, z_2^2 + z_0 \cdot z_1)$. Le lieu singulier a pour équation $2z_0 \cdot (4z_1 \cdot z_2 - z_0^2) = 0$; c'est l'intersection d'une droite et d'une conique qui lui est transverse. Aux points d'intersection, le noyau de df est de dimension un et parallèle à la droite $z_0 = 0$. Signalons que le cas t_0, t_1 et $t_2 \neq 0, t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 = 8$, qui a été exclu sous I, se ramène au cas II après un changement de coordonnées convenable.

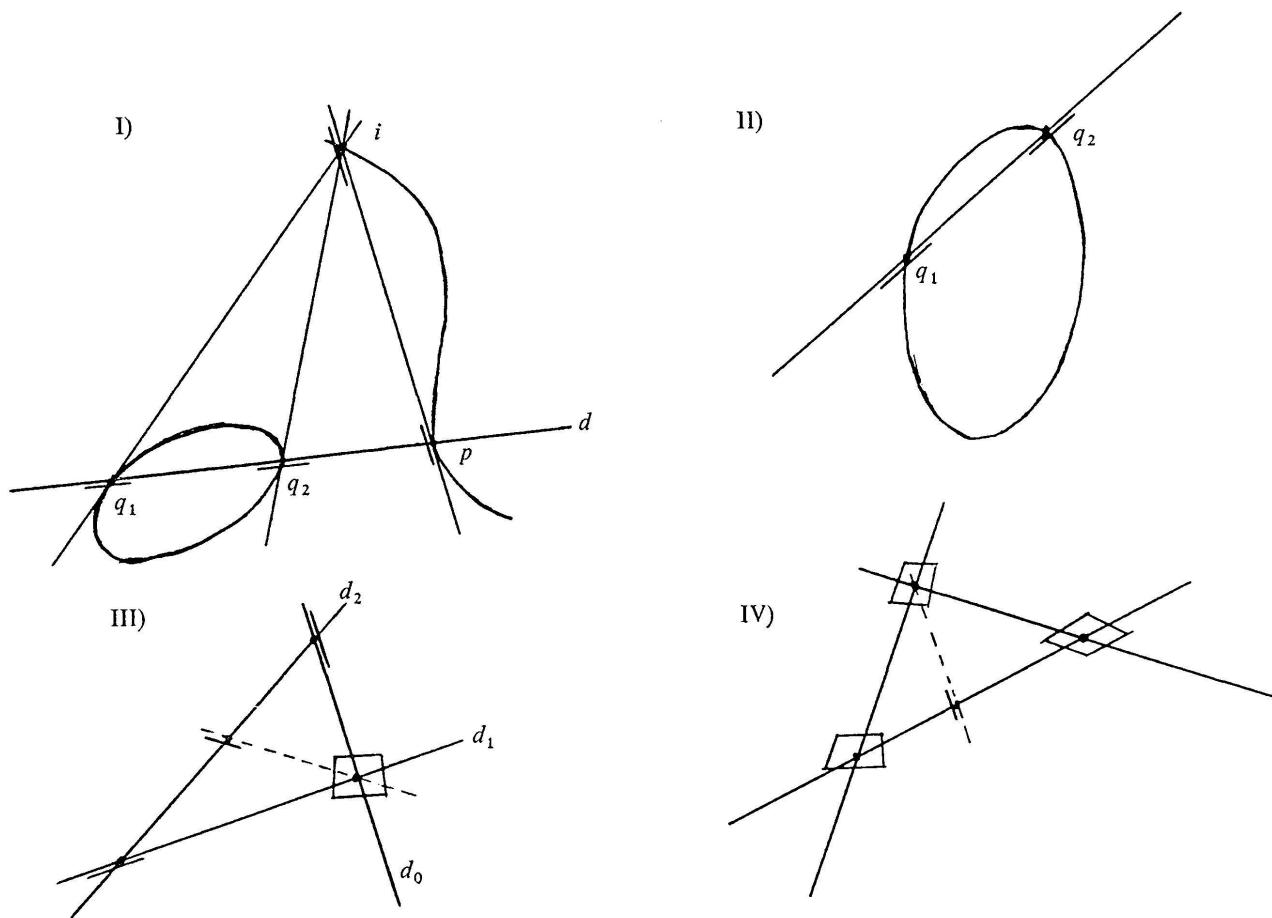
III) $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 \neq 0$. Se ramène à

$$f'''(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2 + z_0 \cdot z_1).$$

Le lieu singulier a pour équation $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = 0$; c'est la réunion des trois droites d_0, d_1, d_2 d'équation respectivement $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0$. En $d_0 \cap d_1 \ker(df)$ est de dimension deux; en $d_0 \cap d_2$ il est de dimen-

sion un, parallèle à d_0 , en $d_1 \cap d_2$ il est aussi de dimension un, parallèle à d_1 .

IV) $t_0 = t_1 = t_2$, $f^{IV}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2)$. Le lieu singulier est le même que sous III, mais aux points d'intersection $d_i \cap d_j$, $i \neq j$, $\ker(df)$ est toujours de dimension deux.



Allure des lieux singuliers: Les traits // ou les petits carrés □ indiquent les noyaux.

3.1. THÉORÈME. Soit $f: \mathbf{PC}^2 \rightarrow \mathbf{PC}^2$ une application de degré deux non constante. f est équivalente à l'une des applications de I à IV.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il ne peut arriver que $f^{-1}(p) =$ courbe, où p est un point, car alors, si d est une droite ne contenant pas p , $f^{-1}(p)$ et $f^{-1}(d)$ seraient deux courbes d'intersection vide.

Supposons que $\sum(f)$ ait pour équation $z_1^2 \cdot z_2 = z_0^3$ et que $\ker(df_p)$, où $p = (0, 0, 1)$, soit de dimension un et distinct de la droite $z_1 = 0$. Soit $p_n = (1/n^2, 1/n^3, 1)$, $q_n = (1/n^2, -1/n^3, 1)$; on a que $p_n \rightarrow p$, $q_n \rightarrow p$ $\ker(df_{p_n}) \rightarrow \ker(df_p)$, $\ker(df_{q_n}) \rightarrow \ker(df_p)$. On en déduit facilement que

la deuxième dérivée de la restriction de f à la droite $\ker(df_p)$ serait nulle, donc cette restriction serait elle-même constante, ce qui est impossible. Donc $\ker(df_p)$ doit contenir la droite $z_1 = 0$; mais alors cette droite rencontre $\sum(f)$ seulement en p et $f| \ker(df_p)$ aurait p comme seul point singulier, ce qui contredit le lemme 2.2.

On déduit de ce qui précède que le lieu singulier de f ne peut pas être une cubique avec un point cuspidal. Un raisonnement analogue permet d'exclure le cas où f aurait comme lieu singulier une cubique avec point double, où encore la réunion d'une conique et d'une droite qui lui est tangente.

Cas I. Supposons que $\sum(f)$ soit une cubique non singulière; on va d'abord en déduire que f est générique. Puisque l'équation de $\sum(f)$, $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=0,1,2} = 0$ définit une courbe non singulière, f est \sum^1 et \sum^2 transverse. Si $p \in \sum^{1,1}(f)$, la restriction de f à $\ker(df_p)$ ne peut être constante et sa dérivée en p doit donc s'annuler à l'ordre 1. Ainsi f est $\sum^{1,1}$ — transverse. En résumé, f est générique. Les propositions 2.5. et 2.6. permettent de conclure que f est équivalente à f_t^I pour un t convenable.

Cas II. Supposons que le lieu singulier de f soit constitué d'une conique C et d'une droite d qui lui est transverse. Posons $C \cap d = \{q_1, q_2\}$. On doit avoir que $\ker(df_{q_i}) = d$, $i = 1, 2$, sans quoi on en concluerait que $f| \ker(df_{q_i})$ serait constante. Pour presque tout $r \in d - \{q_1, q_2\}$ $\ker(df_r)$ recoupe C en deux points distincts s_1 et s_2 , qu'on numérote de sorte que $\ker(df_{s_1}) = \ker(df_r) = (s_1, s_2)$. Soit f' une autre application ayant pour lieu singulier la réunion d'une droite et d'une conique, et soient q'_1, q'_2, r', s'_1 et s'_2 les points construits de manière analogue pour f' . Soit h l'automorphisme de $P\mathbb{C}^2$ qui envoie q'_i sur q_i et s'_i sur s_i , et soit H l'automorphisme qui envoie $f'(q'_i)$ sur $f(q_i)$ et $f'(s'_i)$ sur $f(s_i)$; $f'' = H \cdot f' \cdot h^{-1}$ et f coïncident sur les droites d et (s_1, s_2) . Les fibrés $\ker(df)$ et $\ker(df'')$ coïncident sur d , car ils coïncident en r, q_1 et q_2 ; alors, si $p \in d - \{q_1, q_2\}$, $f| \ker(df_p)$ et $f''| \ker(df_p)$ coïncident aux deux points de $\ker(df_p) \cap C$, ainsi que leur dérivées en p . D'après 2.4., elles doivent coïncider sur $\ker(df_p)$; il s'en suit que $f = f''$. En particulier, f est équivalente à f^{II} .

Cas III et IV. Si le lieu singulier de f est composé de trois droites distinctes d_0, d_1 et d_2 , ces droites ne peuvent se rencontrer en un seul point p . Car alors f serait constante sur toute droite passant par p distincte de d_0, d_1 ou d_2 . Posons: $d_0 \cap d_1 = p_2, d_1 \cap d_2 = p_0$ et $d_0 \cap d_2 = p_1$. On se

convainc facilement que pour les noyaux en p_0 , p_1 ou p_2 les seules possibilités sont celles rencontrées pour f^{III} ou f^{IV} . On montre l'équivalence de f et f^{III} ou f^{IV} en faisant coïncider les lieux singuliers et leurs images. Dans ces cas pour le choix de l'équivalence on a un degré de liberté dans le cas III, deux degrés dans le cas IV.

Il est clair que si f est équivalente à l'une des applications du type I à IV, elle ne peut être équivalente à une application d'un autre type. Cela a donc un sens de dire que f est de type I, II, III ou IV.

3.2. Définition. Les applications f_0 et $f_1 : \mathbf{PC}^2 \rightarrow \mathbf{PC}^2$ sont dites C^∞ -équivalentes s'il existe une famille d'applications $f_s : \mathbf{PC}^2 \rightarrow \mathbf{PC}^2$, où s est un nombre réel compris entre 0 et 1, faisant passer de f_0 à f_1 , $f_s(z)$ étant polynomiale par rapport à z et différentiable par rapport à s , la famille étant différentiablement triviale. C'est dire qu'il existe des familles de difféomorphismes h_s et H_s , $0 \leq s \leq 1$, de \mathbf{PC}^2 en tant que variété C^∞ , tels que $f_0 = H_s \cdot f_s \cdot h_s^{-1}$, $0 \leq s \leq 1$.

3.3. THÉORÈME. Si f et g sont des applications de degré deux de \mathbf{PC}^2 dans \mathbf{PC}^2 de même type II, III ou IV, elles sont équivalentes. Si elles sont de type I, elles sont C^∞ -équivalentes.

Démonstration: Si f est de type II, III ou IV l'affirmation suit de la démonstration de 3.1.

Si f est de type I, désignons par $\Phi(\mathbf{PC}^2)$ et $\Phi(f)^h$ respectivement les champs de vecteurs C^∞ sur \mathbf{PC}^2 et les champs de vecteurs holomorphes le long de f ; $\Phi(\mathbf{PC}^2)_x$ et $\Phi(f)_x^h$ désignent les germes de tels champs en x . On a:

- (i) $df(\Phi(\mathbf{PC}^2)_x) + f^*(\Phi(\mathbf{PC}^2)_{f(x)}) \supset \Phi(f)_{f(x)}^h$ pour tout $x \in \mathbf{PC}^2$
- (ii) $f| \sum(f)$ est injective.

(i) suit du fait que f est générique et donc localement stable (on pourrait mettre partout des champs holomorphes). (ii) suit du fait que, $\sum(f)$ étant une cubique, $f| \sum(f)$ doit avoir 9 points doubles, qui en l'occurrence sont dégénérés en les 9 points de $\sum^{1,1}(f)$, et pas plus.

Il suit de (i) et (ii), en recollant par partitions de l'unité, que $df(\Phi(\mathbf{PC}^2)) + f^*(\Phi(\mathbf{PC}^2)) \supset \Phi(f)^h$. Par un théorème du type du théorème de Mather, qui est élémentaire dans nos circonstances, on en déduit que toute déformation assez petite de f dans les applications holomorphes est différentiable-

ment triviale. Donc f est C^∞ -équivalente aux applications qui lui sont proches. L'affirmation que f et g sont C^∞ -équivalentes suit du fait que les applications de type I forment un ouvert de Zariski, donc connexe, de \mathbf{PC}^{17} .

4. GROUPES D'ISOTROPIE

Soit $f: \mathbf{PC}^2 \rightarrow \mathbf{PC}^2$. On pose $G_f = \{(h, H) \in \text{Aut}(\mathbf{PC}^2) \times \text{Aut}(\mathbf{PC}^2) \mid H.f.h^{-1} = f\}$. On va déterminer G_f lorsque f est de degré deux; sauf si f est de type deux, il se trouve que si h est un automorphisme qui laisse invariantes les singularités de f , il existe un unique H tel que $(h, H) \in G_f$.

4.1. PROPOSITION. I) Si $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, le groupe d'isotropie de f_t^I est engendré par les paires

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & v^2 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où u et v sont les solutions de $u^3 = t$ et $v^3 = 1$. En fait, la troisième paire s'écrit comme composition des deux premières. Ce groupe est d'ordre 18.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, on peut ajouter la paire (h, H) , où h est l'automorphisme qui s'écrit, dans les coordonnées introduites sous 2.6., $(z_0, z_1, z_2) \rightarrow (z_0, i.z_1, z_2)$, et H est construit selon le corollaire 2.5. appliqué à $f_t.h^{-1}$ et f_t afin que $H.f_t.h^{-1} = f_t$. Le groupe d'isotropie est ici d'ordre 36.

II) Le groupe d'isotropie de f_t^{II} est engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v^2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $v^3 = 1$. Il est d'ordre 6.