**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 22 (1976)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME

**Autor:** Ronga, Felice

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-48175

# APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME

par Felice RONGA

Soit $f = (f_0, f_1, f_2)$ un triple de polynômes homogènes de degré deux à coefficients complexes et à trois variables $z_0, z_1, z_2$; s'ils n'ont d'autre racine commune que $0 \in \mathbf{C}^3$, ils déterminent une applications notée encore $f : P\,\mathbf{C}^2 \to P\,\mathbf{C}^2$. On se propose de classer ces application à des changements de coordonnées de la source et du but près. Il se trouve qu'elles sont essentiellement déterminées par leur lieu singulier, qui est soit une cubique non singulière, soit la réunion d'une conique et d'une droite en position générale, soit la réunion de trois droites en position générale. Dans le dernier cas il y a deux possibilités: aux trois points d'intersection des trois droites le noya'' de la dérivée de $f$ est soit partout de dimension deux, soit de dimension deux en l'un des points et de dimension un en les deux autres.

On dira que $f$ et $g : P\,\mathbf{C}^2 \to P\,\mathbf{C}^2$ sont équivalentes si elles coïncident après changement de coordonnées à la source et au but, c'est à dire $f = H \,.\, g \,.\, h^{-1}$, où $H, h \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2)$. Au §4 on considère le groupe d'isotropie $G_f = \{(h, H) \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \,|\, f = \mathrm{H} \,.\, f \,.\, h^{-1}\}$. On montre que si $\dim\,(G_f) \geqslant 1$, $f$ est stable dans les applications $G_f$-équivariantes; c'est à dire que si $g$ est proche de $f$ et invariante par l'action de $G_f$ (soit $G_g \supset G_f$), $g$ est équivalente à $f$.

Je remercie Pierre Siegfried pour les nombreuses conversations qui m'ont permis d'éclairer plusieurs points de ce travail.

## 1. APPLICATIONS GÉNÉRIQUES DE $P\mathbf{C}^m$ DANS $P\mathbf{C}^n$

Soit $A^d(m, n)$ l'ensemble des applications polynômiales de degré $d$ de $P\mathbf{C}^m$ dans $P\mathbf{C}^n$; tout $f \in A^d(m, n)$ se met sous la forme:

$$f(z_0, \ldots, z_m) = (f_0(z_0, \ldots, z_m), \ldots, f_n(z_0, \ldots, z_m))$$

où $f_i$ est un polynôme homogène de degré $d$. Le $n$-tuple $(f_0, ..., f_n)$ est déterminé à une constante non nulle près; $f$ est bien définie à condition que $0 \in \mathbf{C}^{m+1}$ soit le seul zéro commun aux $f_i$. Puisque chaque $f_i$ est déterminé par $\binom{d+m}{m}$ coefficients, $A^d(m, n)$ s'identifie à un ouvert de Zariski de $P\mathbf{C}^k$, où $k = (n+1) \cdot \binom{d+m}{m} - 1$; si $m > n$, $A^d$ se réduit aux constantes.

Soit $S \subset J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ une sous-variété localement fermée (dans la topologie transcendante) du fibré des jets d'ordre $r$ d'applications de $P\mathbf{C}^m$ dans $P\mathbf{C}^n$. Si $f: P\mathbf{C}^m \to P\mathbf{C}^n$, on dit que $f$ est $S$-transverse si son extension aux jets d'ordre $r$ $j^r(f): P\mathbf{C}^m \to J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ est transverse à $S$.

1.1. PROPOSITION. *Soit* $S \subset J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ *une sous-variété localement fermée; si* $n \geqslant m$ *et* $d \geqslant r$, *l'ensemble des* $f \in A^d(m, n)$ *qui sont $S$-transverses est dense.*

La démonstration, qui suit le schéma habituel des théorèmes de transversalité, est précédée par un lemme:

1.2. LEMME. La dérivée de l'application $F: P\mathbf{C}^m \times A^d(m, n) \to J^d(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$, $F(z, g) = j^d(g)_{(z)}$, est surjective en tout point.

Démonstration: Soit $B^d$ l'ensemble des $(n+1)$-uples $(f_0, ..., f_n)$ de polynômes homogènes de degré $d$ en les variables $z_0, ..., z_m$; soit $U \subset B^d$ l'ouvert de Zariski formé des $(n+1)$-uples n'ayant d'autre racine commune que $0 \in \mathbf{C}^{m+1}$. Puisque $(z_0^d, ..., z_m^d, 0, ..., 0)$ est dans $U$, celui-ci est non vide, donc dense dans $B^d$. Désignons par $P^d$ l'ensemble des applications polynômiales de degré au plus égal à $d$ de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$. Si $(z^0, g) \in P\mathbf{C}^m \times U$, on peut supposer sans perte de généralité que $z^0 = (1, 0, ..., 0)$ et $g_0(z^0) \neq 0$. Pour montrer que la dérivée de $F$ en $(z^0, g)$ est surjective, il suffit de vérifier que l'application linéaire $G: B^d \to P^d$, $G(f) = (f_1(1, z'), ..., f_n(1, z'))$, où $z' = (z_1, ..., z_m)$, est surjective. Or si $q \in P^d$, $q = \left(\sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha^i \cdot z'^\alpha\right)_{i=1,...,n}$ on pose $q_h(z_0, ..., z_m) = \left(z_0^d, \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha^1 \cdot z'^\alpha \cdot z_0^{d-|\alpha|}, ..., \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha^n \cdot z'^\alpha \cdot z_0^{d-|\alpha|}\right)$ et on a que $G(q_h) = q$.

Démonstration de 1.1: en remplaçant éventuellement $S$ par son image inverse par la projection de $J^d(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$ sur $J^r(P\mathbf{C}^m, P\mathbf{C}^n)$, on se ramène au cas où $d = r$. Soit alors $S' = F^{-1}(S)$ et $p: S' \to A^d$ la restriction de la projection de $P\mathbf{C}^m \times A^d$ sur le deuxième facteur. Si $f \in A^d$ est une valeur régulière de $p$, $j^d(f)$ est transverse à $S$. Le résultat suit alors du théorème de Sard.

Soit maintenant $f : PC^2 \to PC^2$ une application de degré $d \geqslant 2$; il suit de 1.1 qu'en déformant arbitrairement peu $f$ on peut la rendre générique pour les singularités de Boardman d'ordre deux: on dira alors que $f$ est « générique ». Si $f$ est donc générique, ses seules singularités sont $\sum^1 (f) = \{z \in PC^2 \mid \dim (\ker (df_z)) = 1\}$, qui est une courbe régulière, et $\sum^{1,1} (f) = \{z \in PC^2 \mid \ker (df_z) = T_z (\sum^1 (f))\}$, qui est un ensemble fini de points ($T_z$ désigne l'espace tangent au point $z$).

1.3. Proposition. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application générique de degré* $d$. *Alors* $\sum^1 (f)$ *est une courbe régulière de degré* $3 . (d-1)$ *et* $\sum^{1,1} (f)$ *est constitué de* $3 . (4d-5) . (d-1)$ *points.*

Démonstration: Soit $s \in H^2 (PC^2)$ la classe d'Euler du fibré canonique et désignons par $N(f) = f^* (T(PC^2)) - T(PC^2)$ le fibré virtuel normal à $f$. On a que $c(T(PC^2)) = 1 + 3s + 3s^2$, où $c$ désigne la classe de Chern totale, et $f^* (s) = d . s$. La classe duale à $\sum^1 (f)$ est égale à

$$(*) \quad c_1 (N(f)) = f^* (3s) - 3s = 3(d-1) . s .$$

La classe duale à $\sum^{1,1} (f)$ est égale à

$$(**) \quad c_1^2 (N(f)) + c_2 (N(f)) = 3(d-1)(4d-5) . s^2 .$$

L'expression de ces classes duales est calculée par exemple dans [1]. On obtient les formules cherchées en évaluant (*) et (**) respectivement sur la classe fondamentale d'un hyperplan et sur la classe fondamentale de $PC^2$, ce qui revient à remplacer $s$ par 1.

En fait, on se convainc facilement que pour toute application $f$ de degré $d$ le lieu singulier, qu'on désignera dorénavant par $\sum (f)$, a pour équation: $\text{dét} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=0,1,2} = 0$, ce qui définit bien une courbe de degré $3(d-1)$.

## 2. Une coïncidence

On se borne dorénavant aux applications de degré deux de $PC^2$ dans $PC^2$; l'ensemble $A^2 (2, 2)$ de ces applications est un ouvert de Zariski de $PC^{17}$, sur lequel opère $P(Gl (3, \mathbf{C})) \times P(Gl (3, \mathbf{C}))$, qui est de dimension 16; l'orbite générique a donc une codimension au moins égale à un. Le lieu singulier d'une telle application est une cubique; l'ensemble des cubiques de $PC^2$ s'identifie à $PC^9$. Si l'on fait agir $P(GL(3, \mathbf{C}))$ sur ces cubiques, l'orbite générique est de codimension un. On peut donc s'attendre à ce que si $f$ est générique l'orbite de $\sum(f)$ détermine l'orbite de $f$ à un nombre fini de choix près; les propositions qui suivent vont nous dire comment.

2.1. Proposition. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application générique. Alors si* $p \in \sum^{1,1}(f)$, *la droite tangente à* $\sum(f)$ *en* $p$ *recoupe* $\sum(f)$ *en un point d'inflexion.*

La démonstration de cette proposition est précédée de trois lemmes.

2.2. Lemme. Soit $g : PC^1 \to PC^2$ une application de degré deux. S'il existe $p \in PC^1$ tel que $dg_p = 0$, $g(PC^1)$ est une droite et il existe un et un seul point $q \neq p$ tel que $dg_q = 0$.

Démonstration: Si $dg_p = 0$, $g(PC^1)$ est une conique irréductible avec un point double: ce ne peut être qu'une droite double. $g : PC^1 \to g(PC^1)$ est une application générique de degré deux: dans ce cas elle a exactement deux points singuliers distincts.

2.3. Lemme. Soit $f : PC^2 \to PC^2$ de degré deux générique. Si $p \in \sum^{1,1}(f)$, il existe une et une seule droite $d \subset PC^2$ passant par $p$, telle que $d \cap \sum(f) = \{p, q_1, q_2\}$, $p$, $q_1$ et $q_2$ distincts, et telle que $d = \ker(df_{q1}) = \ker(df_{q2})$.

Démonstration: Soit $a \in H^2(\sum(f))$ la classe fondamentale en cohomologie de $\sum(f)$ et $b \in H^2(\sum(f))$ la classe duale à $\sum^{1,1}(f)$ dans $\sum(f)$; soit $N$ le fibré normal à $\sum(f)$ dans $PC^2$ et $K = \ker(df)$, fibré de rang 1 sur $\sum(f)$. Puisque $f$ est générique, on a: $b = 9 \,.\, a = c_1(N) - c_1(K)$; $\sum(f)$ étant une cubique, on a: $c_1(N) = 9 \,.\, a$. Ainsi $c_1(K) = 0$. Soit $d'$ une droite ne passant pas par $p$ et $g : \sum(f) \to d'$ l'application qui à $q \in \sum(f)$ associe $(p, q) \cap d'$, où $(p, q)$ désigne la droite par $p$ et $q$, et $(p, p) = T_p(\sum(f))$. $\sum(f)$ étant une cubique, $c_1(g^*(T(d'))) = 3 \,.\, a$; il s'en suit que $c_1(g^*(T(d'))) - c_1(K) = 6 \,.\, a$. On en déduit que le nombre de points singuliers comptés avec multiplicité du morphisme $G : K \to g^*(T(d'))$, donné par projection de $K$ sur $d'$ depuis $p$, est égal à 6. Le point $p$ est une singularité de ce morphisme, mais sa multiplicité ne peut excéder 3, sans quoi $f$ admettrait en $p$ un point singulier non générique. Il doit donc exister un point $q_1$ distinct de $p$ où $G$ est singulier, ce qui revient à dire que $\ker(df_{q1}) = (p, q_1)$ et $(p, q_1) \neq T_p(\sum(f))$. A cause du lemme 2.2 il doit exister $q_2$ distinct de $q_1$ tel que $(p, q_1) = \ker(df_{q2})$; on a forcémment que $q_2 \neq p$, sans quoi $(p, q_1) = \ker(df_p) = T_p(\sum(f))$. On pose $d = (p, q_1)$; l'unicité de $d$ suit du fait que $G$ ne peut avoir plus de 6 points singuliers.

2.4. LEMME. Soient $g$ et $g'$: $PC^1 \to PC^2$ deux applications de degré deux. Alors:

(i) si $g$ et $g'$ coïncident en quatre points, elles coïncident partout;

(ii) si $g(PC^1) =$ une droite et $g$ et $g'$ coïncident en trois points, elles coïncident partout.

Ce lemme est un petit exercice dont la démonstration est laissée au lecteur.

Démonstration de 2.1. (voir fig. du §3): Soit $p \in \sum^{1,1}(f)$ et $d$ la droite donnée par 2.4. La tangente à $\sum(f)$ en $p$ recoupe $\sum(f)$ en un point $i$; on a que $i \neq p$, sans quoi la restriction de $f$ à cette tangente serait en contradiction avec 2.2. Soit $e = f(d)$, qui est une droite d'après 2.2; $f^{-1}(e)$ est une conique contenant $d$, donc dégénérée en la réunion de $d$ et une autre droite $d'$. Puisque $f(d') = e$, qui est une droite, $d' = (i, p)$, sans quoi on serait en contradiction avec l'unicité de $d$ démontrée dans 2.3.; ainsi, $f(i) \in e$. Soit $h$: $PC^2 \to PC^2$ la symétrie de centre $i$ qui laisse $d$ fixe point par point. Soient $r \in PC^2 - (i,p) - d$, $r' = h(r)$ et $H$: $PC^2 \to PC^2$ la symétrie qui envoit $f(r)$ sur $f(r')$ et qui laisse $e$ fixe point par point. Considérons l'application $g = H.f.h^{-1}$; on a que $f|d = g|d$, $f|(i,p) = g|(i,p)$ et $f|(r,r') = g|(r,r')$. Si $s \in \sum(f) - \sum^{1,1}(f)$, $f(\ker(df_s))$ est une droite et $g|\ker(df_s)$ coïncide avec $f|\ker(df_s)$ aux trois points d'intersection de $\ker(df_s)$ avec les droites $d$, $(i,p)$ et $(r,r')$. On en déduit que $f = g$, en particulier $h$ envoit $\sum(f)$ dans elle-même; $i$ étant un point fixe de $h$, ce doit être un point d'inflexion, car ceux-cis sont en nombre impair et ils sont échangés par $h$.

2.5. COROLLAIRE. *Soient $f$ et $f'$ : $PC^2 \to PC^2$ deux applications de degré deux génériques. Si $\sum(f) = \sum(f')$ et $\sum^{1,1}(f) \cap \sum^{1,1}(f') \neq \varnothing$, alors il existe un automorphisme $H$: $PC^2 \to PC^2$ tel que $H.f' = f$, et $\sum^{1,1}(f) = \sum^{1,1}(f')$.*

Démonstration: Soit $p \in \sum^{1,1}(f) \cap \sum^{1,1}(f')$; posons $i = T_p(\sum(f)) \cap \sum(f)$. Il suit des hypothèses et de 2.1 qu'on a aussi $i = T_p(\sum(f')) \cap \sum(f')$. Les points $q_1$ et $q_2$ construits dans la démonstration de 2.1 coïncident pour $f$ et $f'$, puisqu'ils sont déterminés par le fait que $(i, q_1) = T_{q1}(\sum(f))$, $(i, q_2) = T_{q2}(\sum(f))$ et que $\sum(f) = \sum(f')$. Soit $r \in \sum(f)$, $r$ distinct de $i$, $p$, $q_1$, $q_2$; soit $H$: $PC^2 \to PC^2$ l'automorphisme qui envoit $f'(p)$ sur $f(p)$ $f'(q_1)$ sur $f(q_1)$, $f'(q_2)$ sur $f(q_2)$ et $f'(r)$ sur $f(r)$. Puisque $p$, $q_1$ et $q_2$ sont alignés, on peut encore exiger que $H$ envoie la droite $(f'(r), f'(r'))$ sur la droite $(f(r), f(r'))$, $r'$ étant le symétrique de $r$ pour la symétrie $h$ construite dans la démonstration de 2.1. Puisque $f'^{-1}(f'(d)) = d \cup (i, p)$, $f$ et $H . f'$coïncident sur $d$, sur $(i, p)$ et sur $(r, r')$, donc elles coïncident partout.

Soit $C$ une cubique non singulière de $PC^2$ et $i \in C$ un point d'inflexion. La classe de $C$ étant 6, il existe en plus de $T_i(C)$, qui compte pour trois droites, trois autres droites distinctes passant par $i$ et tangentes à $C$ en des points $r_1$, $r_2$ et $r_3$.

2.6. PROPOSITION. *Avec les notations ci-dessus, si* $p$ *est l'un des points* $r_1$, $r_2$ *ou* $r_3$, *il existe une application générique* $f: PC^2 \to PC^2$ *telle que* $C = \sum(f)$ *et* $p \in \sum^{1,1}(f)$.

Démonstration: Soit $f_t = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$. On vérifie que si $t \neq -1$, $f_t$ définit bien une application de $PC^2$ dans lui-même. Le lieu singulier de $f_t$ a pour équation

$$z_0 . z_1 . z_2 . (8+2t) - 2t . (z_0^3 + z_1^3) - 2z_2^3 = 0 .$$

On vérifie que si $t \neq 0$ et $t \neq 8$ ce lieu est une cubique non singulière; on montrera sous 3.1. qu'il s'en suit que $f_t$ est générique. On calcule que $i = (1, 1, 0)$ est un point d'inflexion de $\sum(f)$ et que les points $p$, $q_1$ et $q_2$ correspondants ont pour coordonnées: $p = (1/2, 1/2, 1)$, $q_1 = \big(-(s+1)^{-1}, -(s+1)^{-1}, 1\big)$, $q_2 = \big((s-1)^{-1}, (s-1)^{-1}, 1\big)$, où $s = (1+t)^{1/2}$, la racine ayant une détermination quelconque (changer de détermination revient à échanger $q_1$ et $q_2$). En prenant $s \neq 0, \pm 1, \pm 3$ on s'assure que $t \neq -1, 0$ et 8. On se propose de mettre l'équation de $\sum(f)$ en coordonnées inhomogènes $(z_2 = 1)$ sous la forme

$$z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - B), \quad \text{où} \quad B \neq 0, 1,$$
$$\text{avec} \quad p = (0, 0, 1), \quad q_1 = (1, 0, 1), \quad q_2 = (B, 0, 1) .$$

Si $t = -4$, l'équation devient: $8z_0^3 + 8z_1^3 - 2z_2^3 = 0$. Après le changement de coordonnées

$$z_0 = z_2' - z_1' ; \quad z_1 = z_2' + z_1' ; \quad z_2 = z_0' . (i\sqrt{3} - 3) + 2z_2' ,$$

en omettant les primes, l'équation devient

$$A . z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - 1/2 . (i\sqrt{3} + 1)), \quad \text{où} \quad A \neq 0 .$$

Après un changement de coordonnées évident, $A$ est remplacée par 1.

Si $s \neq \pm i\sqrt{3}$, on aura $t \neq -4$. Pour mettre l'équation sous la forme voulue, il faut envoyer la tangente à $\sum(f)$ en $i$ sur la droite $z_2 = 0$ et les points $p$, $q_1$ et $q_2$ respectivement sur (0, 0, 1), (1, 0, 1) et $(B, 0, 1)$. Pour cela, il faut effectuer le changement de coordonnées

$$z_0' = \frac{(s-3)^2 . (s+1)}{(s+3) . (s^2+3)} . (z_2 - z_1 - z_0) ; \quad z_1' = 1/2 . (z_1 - z_0) ;$$

$$z_2' = \frac{3 (s^2-1)}{s^2 + 3} . (z_0 + z_1) + z_2 .$$

Après omission des primes, l'équation de $\sum (f)$ devient

$$A . z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - B) , \quad \text{où} \quad B = \frac{(s+1) . (s-3)^3}{(s-1) . (s+3)^3}$$

On peut supposer que l'équation de la cubique $C$ donnée soit $z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - b)$, où $b \neq 0, 1$, et que $p = (0, 0, 1)$. Les valeurs interdites de $s$ sont $s = 0$, qui donne $B = 1$ ; $s = -1$, d'où $B = 0$ et $s = i\sqrt{3}$, d'où $B = ½ . (i\sqrt{3} + 1)$. Ce dernier cas se ramène au cas où $t = -4$. Sinon, on peut résoudre par rapport à $s$ dans l'équation

$$b = \frac{(s+1) . (s-3)^3}{(s-1) . (s+3)^3} ,$$

puis on pose $t = s^2 - 1$ et $f_t$ est alors l'application cherchée.

Ainsi, d'après 2.5 et 2.6, la cubique non singulière $C$ détermine l'orbite de l'application $f$ telle que $\sum (f) = C$, au choix près de $p \in \sum^{1,1} (f)$ parmi les points $r_1$, $r_2$ et $r_3$ de $C$.

2.7. *Remarque.* Soit $C$ la cubique d'équation $z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - b)$ ; l'automorphisme de $P\mathbf{C}^2$ : $(z_0, z_1, z_2) \to (z_0, -z_1, z_2)$ laisse $C$ invariante. On obtient de manière analogue d'autres tels automorphismes en envoyant chacun des neuf points d'inflexion de $C$ sur (0, 1, 0) ; on engendre ainsi un groupe $G$ à 18 éléments. Il est bien connu qu'en général ce groupe est celui de tous les automorphismes de $P\mathbf{C}^2$ qui laissent $C$ invariante, à deux exceptions près. La première, c'est lorsque les points 0, 1 et $b \in C$ peuvent être envoyés, par une transformation du type $z \to az + A$, sur les trois racines troisièmes de l'unité, ce qui équivaut à dire que $b = ½ . (i\sqrt{3} + 1)$ ; c'était le cas de $\sum (f_t)$ pour $t = -4$. Dans ce cas il faut ajouter à $G$ le groupe d'ordre 3 engendré par

$$(z_0, z_1, z_2) \to \left( z_0 . \frac{1}{2} . (i\sqrt{3} - 1), z_1, z_2 \right)$$

(ce qui équivaut aux permutations cycliques des racines troisième de l'unité), et cela donne en tout un groupe d'ordre 54. La deuxième exception est lorsque $b = -1$; dans ce cas, auquel appartient $\sum(f_t)$ lorsque $t = -10 \pm \sqrt{108}$, il faut ajouter à $G$ le groupe d'ordre deux engendré par $(z_0, z_1, z_2) \to (-z_0, i.z_1, z_2)$ et on obtient en tout un groupe d'ordre 36.

Pour la détermination du groupe des automorphismes qui laissent invariante une cubique, on peut consulter [2], pages 84 et 85.

## 3. Classification

Considérons la famille d'applications

$$f_T(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + t_0 \,.\, z_1 \,.\, z_2,\ z_1^2 + t_1 \,.\, z_0 \,.\, z_2,\ z_2^2 + t_2 \,.\, z_0 \,.\, z_1)\,, \quad \text{où} \quad T = (t_0, t_1, t_2)\,;$$

on vérifie que $f_T$ définit bien une application de $PC^2$ dans lui-même à condition que $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 \neq -1$. On va distinguer dans cette famille quatre cas:

I) $t_0$, $t_1$ et $t_2 \neq 0$ et $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 \neq 8$. Après changement de coordonnées à la source: $z_0 = t_0^{2/3} \,.\, t_1^{1/3} \,.\, z_0'$, $z_1 = t_0^{1/3} \,.\, t_1^{2/3} \,.\, z_1'$, $z_2 = z_2'$, et au but: $w_0' = t_0^{-4/3} \,.\, t_1^{-2/3} \,.\, w_0$, $w_1' = t_0^{-2/3} \,.\, t_1^{-4/3} \,.\, w_1$, $w_2' = w_2$, en omettant les primes et en posant $t = t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2$, on retrouve la famille $f_t^I(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$ déjà vue dans la démonstration de 2.6. Puisque $t \neq -1, 0, 8$, le lieu singulier de $f_t^I$ est une cubique non singulière.

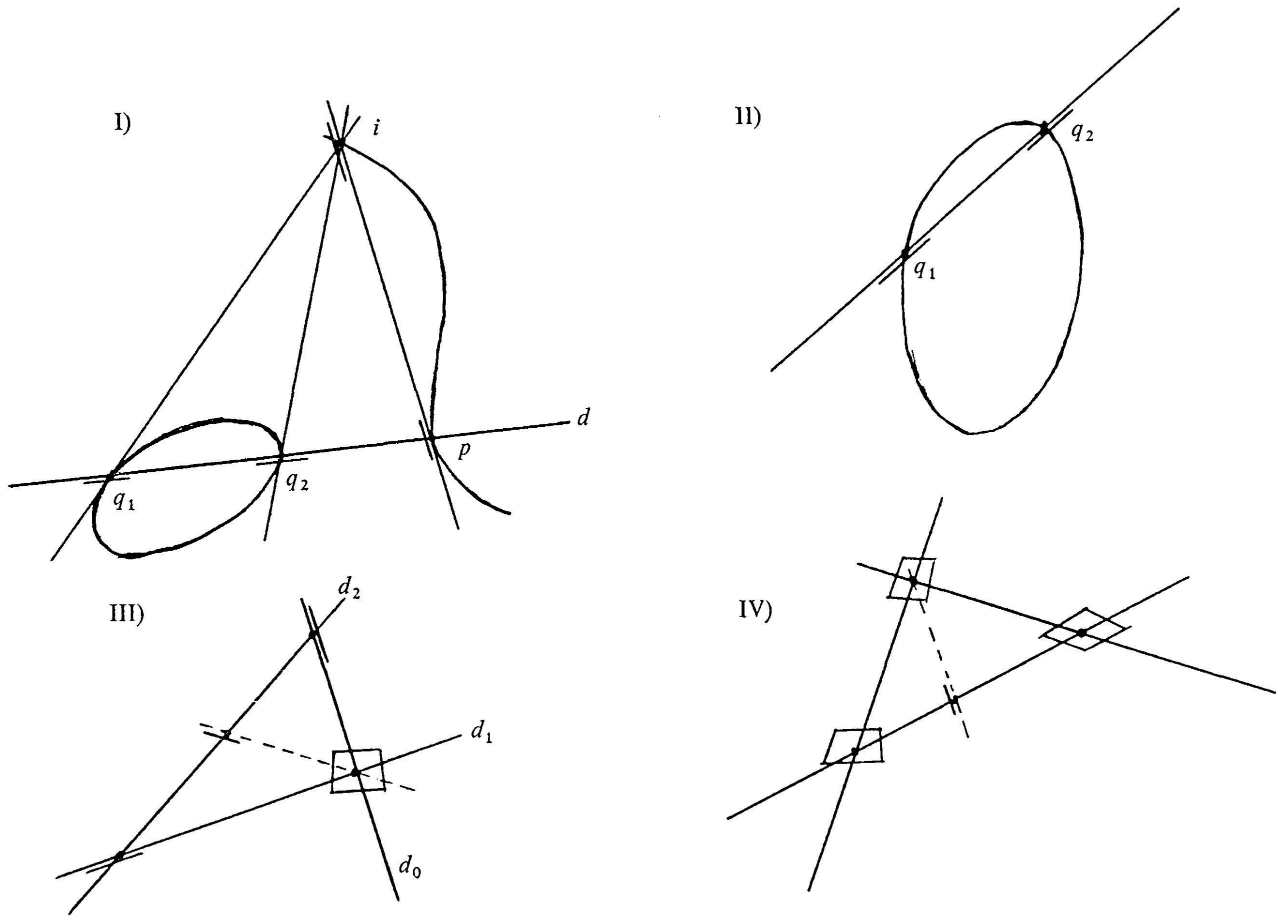
II) $t_0 = 0$, $t_1$ et $t_2 \neq 0$. Après un changement de coordonnées on est ramené à la forme $f^{II}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1)$. Le lieu singulier a pour équation $2z_0 \,.\, (4z_1 . z_2 - z_0^2) = 0$; c'est l'intersection d'une droite et d'une conique qui lui est transverse. Aux points d'intersection, le noyau de $df$ est de dimension un et parallèle à la droite $z_0 = 0$. Signalons que le cas $t_0$, $t_1$ et $t_2 \neq 0$, $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 = 8$, qui a été exclu sous I, se ramène au cas II après un changement de coordonnées convenable.

III) $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 \neq 0$. Se ramène à

$$f^{III}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2 + z_0 \,.\, z_1)\,.$$

Le lieu singulier a pour équation $z_0 \,.\, z_1 \,.\, z_2 = 0$; c'est la réunion des trois droites $d_0$, $d_1$, $d_2$ d'équation respectivement $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. En $d_0 \cap d_1$ ker $(df)$ est de dimension deux; en $d_0 \cap d_2$ il est de dimension un, parallèle à $d_0$, en $d_1 \cap d_2$ il est aussi de dimension un, parallèle à $d_1$.

IV) $t_0 = t_1 = t_2, f^{IV}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2)$. Le lieu singulier est le même que sous III, mais aux points d'intersection $d_i \cap d_j$, $i \neq j$, ker $(df)$ est toujours de dimension deux.




Allure des lieux singuliers: Les traits $//$ ou les petits carrés $\boxed{\cdot}$ indiquent les noyaux.

3.1. Théorème. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application de degré deux non constante.* $f$ *est équivalente à l'une des applications de* I *à* IV.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il ne peut arriver que $f^{-1}(p)$ = courbe, où $p$ est un point, car alors, si $d$ est une droite ne contenant pas $p$, $f^{-1}(p)$ et $f^{-1}(d)$ seraient deux courbes d'intersection vide.

Supposons que $\sum(f)$ ait pour équation $z_1^2 \,.\, z_2 = z_0^3$ et que ker $(df_p)$, où $p = (0, 0, 1)$, soit de dimension un et distinct de la droite $z_1 = 0$. Soit $p_n = (1/n^2, 1/n^3\ 1)$, $q_n = (1/n^2, -1/n^3, 1)$; on a que $p_n \to p$, $q_n \to p$ ker $(df_{p_n}) \to$ ker $(df_p)$, ker $(df_{q_n}) \to$ ker $(df_p)$. On en déduit facilement que la deuxième dérivée de la restriction de $f$ à la droite ker $(df_p)$ serait nulle, donc cette restriction serait elle-même constante, ce qui est impossible. Donc ker $(df_p)$ doit contenir la droite $z_1 = 0$; mais alors cette droite rencontre $\sum (f)$ seulement en $p$ et $f \mid$ ker $(df_p)$ aurait $p$ comme seul point singulier, ce qui contredit le lemme 2.2.

On déduit de ce qui précède que le lieu singulier de $f$ ne peut pas être une cubique avec un point cuspidal. Un raisonnement analogue permet d'exclure le cas où $f$ aurait comme lieu singulier une cubique avec point double, où encore la réunion d'une conique et d'une droite qui lui est tangente.

Cas I. Supposons que $\sum (f)$ soit une cubique non singulière; on va d'abord en déduire que $f$ est générique. Puisque l'équation de $\sum (f)$, dét $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=0,1,2} = 0$ définit une courbe non singulière, $f$ est $\sum^1$ et $\sum^2$ transverse. Si $p \in \sum^{1,1} (f)$, la restriction de $f$ à ker $(df_p)$ ne peut être constante et sa dérivée en $p$ doit donc s'annuller à l'ordre 1. Ainsi $f$ est $\sum^{1,1}$ — transverse. En résumé, $f$ est générique. Les propositions 2.5. et 2.6. permettent de conclure que $f$ est équivalente à $f_t^I$ pour un $t$ convenable.

Cas II. Supposons que le lieu singulier de $f$ soit constitué d'une conique $C$ et d'une droite $d$ qui lui est transverse. Posons $C \cap d = \{q_1, q_2\}$. On doit avoir que ker $(df_{q_i}) = d$, $i = 1, 2$, sans quoi on en concluerait que $f \mid$ ker $(df_{q_i})$ serait constante. Pour presque tout $r \in d - \{q_1, q_2\}$ ker $(df_r)$ recoupe $C$ en deux points distincts $s_1$ et $s_2$, qu'on numérote de sorte que ker $(df_{s_1})$ = ker $(df_r) = (s_1, s_2)$. Soit $f'$ une autre application ayant pour lieu singulier la réunion d'une droite et d'une conique, et soient $q_1'$, $q_2'$, $r'$, $s_1'$ et $s_2'$ les points construits de manière analogue pour $f'$. Soit $h$ l'automorphisme de $PC^2$ qui envoit $q_i'$ sur $q_i$ et $s_i'$ sur $s_i$, et soit $H$ l'automorphisme qui envoit $f'(q_i')$ sur $f(q_i)$ et $f'(s_i')$ sur $f(s_i)$; $f'' = H . f' . h^{-1}$ et $f$ coïncident sur les droites $d$ et $(s_1, s_2)$. Les fibrés ker $(df)$ et ker $(df'')$ coïncident sur $d$, car ils coïncident en $r$, $q_1$ et $q_2$; alors, si $p \in d - \{q_1, q_2\}$, $f \mid$ ker $(df_p)$ et $f'' \mid$ ker $(df_p)$ coïncident aux deux points de ker $(df_p) \cap C$, ainsi que leur dérivées en $p$. D'après 2.4., elles doivent coïncider sur ker $(df_p)$; il s'en suit que $f = f''$. En particulier, $f$ est équivalente à $f^{II}$.

Cas III et IV. Si le lieu singulier de $f$ est composé de trois droites distinctes $d_0$, $d_1$ et $d_2$, ces droites ne peuvent se rencontrer en un seul point $p$. Car alors $f$ serait constante sur toute droite passant par $p$ distincte de $d_0$, $d_1$ ou $d_2$. Posons: $d_0 \cap d_1 = p_2$, $d_1 \cap d_2 = p_0$ et $d_0 \cap d_2 = p_1$. On se convainc facilement que pour les noyaux en $p_0$, $p_1$ ou $p_2$ les seules possibilités sont celles rencontrées pour $f^{III}$ ou $f^{IV}$. On montre l'équivalence de $f$ et $f^{III}$ ou $f^{IV}$ en faisant coïncider les lieux singuliers et leurs images. Dans ces cas pour le choix de l'équivalence on a un degré de liberté dans le cas III, deux degrés dans le cas IV.

Il est clair que si $f$ est équivalente à l'une des applications du type I à IV, elle ne peut être équivalente à une application d'un autre type. Cela a donc un sens de dire que $f$ est de type I, II, III ou IV.

3.2. *Définition.* Les applications $f_0$ et $f_1 : PC^2 \to PC^2$ sont dites $C^\infty$-équivalentes s'il existe une famille d'applications $f_s : PC^2 \to PC^2$, où $s$ est un nombre réel compris entre 0 et 1, faisant passer de $f_0$ à $f_1$, $f_s(z)$ étant polynômiale par rapport à $z$ et différentiable par rapport à $s$, la famille étant différentiablement triviale. C'est dire qu'il existe des familles de difféomorphismes $h_s$ et $H_s$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, de $PC^2$ en tant que variété $C^\infty$, tels que $f_0 = H_s \cdot f_s \cdot h_s^{-1}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

3.3. THÉORÈME. *Si $f$ et $g$ sont des applications de degré deux de $PC^2$ dans $PC^2$ de même type* II, III *ou* IV, *elles sont équivalentes. Si elles sont de type* I, *elles sont $C^\infty$-équivalentes.*

Démonstration: Si $f$ est de type II, III ou IV l'affirmation suit de la démonstration de 3.1.

Si $f$ est de type I, désignons par $\Phi(PC^2)$ et $\Phi(f)^h$ respectivement les champs de vecteurs $C^\infty$ sur $PC^2$ et les champs de vecteurs holomorphes le long de $f$; $\Phi(PC^2)_x$ et $\Phi(f)^h_x$ désignent les germes de tels champs en $x$. On a:

(i) $df(\Phi(PC^2)_x) + f^*(\Phi(PC^2)_{f(x)}) \supset \Phi(f)^h_{f(x)}$ pour tout $x \in PC^2$

(ii) $f \mid \sum(f)$ est injective.

(i) suit du fait que $f$ est générique et donc localement stable (on pourrait mettre partout des champs holomorphes). (ii) suit du fait que, $\sum(f)$ étant une cubique, $f \mid \sum(f)$ doit avoir 9 points doubles, qui en l'occurence sont dégénérés en les 9 points de $\sum^{1,1}(f)$, et pas plus.

Il suit de (i) et (ii), en recollant par partitions de l'unité, que $df(\Phi(PC^2)) + f^*(\Phi(PC^2)) \supset \Phi(f)^h$. Par un théorème du type du théorème de Mather, qui est élémentaire dans nos circonstances, on en déduit que toute déformation assez petite de $f$ dans les applications holomorphes est différentiablement triviale. Donc $f$ est $C^{\infty}$-équivalente aux applications qui lui sont proches. L'affirmation que $f$ et $g$ sont $C^{\infty}$-équivalentes suit du fait que les applications de type I forment un ouvert de Zariski, donc connexe, de $P\mathbf{C}^{17}$.

## 4. Groupes d'isotropie

Soit $f$: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$. On pose $G_f = \{(h, H) \in \mathrm{Aut}(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}(P\mathbf{C}^2) \mid H.f.h^{-1} = f\}$. On va déterminer $G_f$ lorsque $f$ est de degré deux; sauf si $f$ est de type deux, il se trouve que si $h$ est un automorphisme qui laisse invariantes les singularités de $f$, il existe un unique $H$ tel que $(h, H) \in G_f$.

4.1. Proposition. I) *Si* $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *le groupe d'isotrophie de* $f_t^I$ *est engendré par les paires*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & v^2 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*et*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*où* $u$ *et* $v$ *sont les solutions de* $u^3 = t$ *et* $v^3 = 1$. *En fait, la troisième paire s'écrit comme composition des deux premières. Ce groupe est d'ordre* 18.

*Si* $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *on peut ajouter la paire* $(h, H)$, *où* $h$ *est l'automorphisme qui s'écrit, dans les coordonnées introduites sous* 2.6., $(z_0, z_1, z_2) \to (z_0, i.z_1, z_2)$, *et* $H$ *est construit selon le corollaire* 2.5. *appliqué à* $f_t.h^{-1}$ *et* $f_t$ *afin que* $H.f_t.h^{-1} = f_t$. *Le groupe d'isotropie est ici d'ordre* 36.

II) *Le groupe d'isotropie de* $f^{II}$ *est engendré par :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*où* $v^3 = 1$. *Il est d'ordre 6.*

III) *Le groupe d'isotropie de* $f^{III}$ *est engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*où* $x$ *est un nombre complexe non nul.*

IV) *Le groupe d'isotropie de* $f^{IV}$ *est engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix} \quad et \quad (A_s, A_s),$$

*où* $x$ *et* $y$ *sont des nombres complexes non nuls et* $A_s(z_0, z_1, z_2) = (z_{s(0)}, z_{s(1)}, z_{s(2)})$, *où* $s$ *parcourt les permutations de* $(0, 1, 2)$.

Démonstration: On vérifie que les automorphismes décrits laissent invariantes les applications en question.

I) Si $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ et $t \neq -4$, il ne peut y avoir d'autres automorphismes laissant $f_t^I$ invariante, puisque la projection du groupe décrit sur le premier facteur de Aut $(PC^2) \times$ Aut $(PC^2)$ donne tous les automorphismes qui laissent $\sum (f_t^I)$ invariante (voir remarque 2.7). Si $t = -4$, on a des automorphismes supplémentaires, mais ils ne laissent pas $\sum^{1,1} (f_t^I)$ invariant et ne donnent donc rien de nouveau.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ par contre, l'automorphisme qui échange $q_1$ et $q_2$ (notations de 2.7) laisse $p \in \sum^{1,1} (f_t^I)$ fixe et donne lieu, ainsi qu'on l'a énoncé, à un nouvel élément de $G_{f_t^I}$.

Pour II, III et IV les affirmations se vérifient facilement.

4.2. Théorème. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application de degré deux. Si* $f$ *est de type I, elle est* $C^\infty$*-stable. Si elle est de type III ou IV, elle est stable dans les applications* $G_f$*-équivariantes.*
*Si elle est de type* II, *elle n'est pas* $G_f$*-stable.*

Démonstration: Les applications de type I forment un ouvert; leur $C^\infty$-stabilité suit alors de 3.3.

Si $f$ est de type III, son groupe d'isotropie est de dimension un et son lieu singulier est la réunion de trois droites $d_0$, $d_1$ et $d_2$. Si $g$ est $G_f$ équivariante, son groupe d'isotropie est de dimension un ou deux. Supposons que dim $(\ker (df_p)) = 1$, où $p = d_0 \cap d_1$; si $g$ est assez proche de $f$, dim $(\ker (dg_q)) \leqslant 1$, pour $q$ dans un voisinage de $p$, donc $g$ ne peut être de type IV et doit donc être de type III.

Si $f$ est de type IV, son groupe d'isotropie est de dimension deux, de même que pour toute autre application $g$ $G_f$-équivariante. $g$ doit donc être aussi de type IV.

Si

$$f(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1),$$

l'application

$$(z_0^2 + t . z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1),$$

pour $t$ petit, est proche de $f$ et $G_f$-équivariante, mais de type I, donc non équivalente à $f$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] RONGA, F. Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux. *Commentarii Matematici Helvetici*, *47*, 1 (1972), pp. 15-35.

[2] VAN DER WAERDEN, B.L. *Einführung in die algebraische Geometrie*. Zweite Auflage, Springer Verlag, 1973.

*(Reçu le 15 octobre 1975)*

Felice Ronga

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24