Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN FEUILLETAGE DE R^3

Autor: Diener, Marc

Kapitel: Exemple de feuilletage P & T de R^3 qui n'est pas de type image-réciproque

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48174

tage est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$, donc que le feuilletage est de type image-réciproque.

Le feuilletage ci-dessous montre que dès que f et g sont de degré total en y et z supérieur à un, le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qu'ils permettent de définir peut ne plus être de type image-réciproque.

Exemple de feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas de type image-réciproque

Soit $\mathscr{F}_0$ le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ associé au champ de vecteurs

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2x(y^2+1) \\ z' &= 2yz\,. \end{aligned}$$

Effectuons un changement de variables. En posant

$$x = X\,,\ y = tg\,(X^2+Y) \qquad \text{et} \qquad z = tg\,Z$$

on ramène $\mathbf{R}^3\,xyz$ sur l'ouvert $A = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3, \,|\, X^2 + Y \,|\, < \frac{\pi}{2}, \right.$ $\left. |\, Z \,| < \frac{\pi}{2}\right\}$ (voir figure 2), transformant ainsi les feuilles de $\mathscr{F}_0$ en les trajectoires contenues dans A du champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3\ XYZ$

$$\begin{aligned} X' &= \cos\,(X^2+Y) \\ Y' &= 0 \\ Z' &= \sin\,2Z \cdot \sin\,(X^2+Y)\,. \end{aligned}$$

De l'étude du signe des composantes de ce champ et de ses trajectoires (évidentes) dans la frontière de A, on déduit que ses trajectoires dans A ont le comportement indiqué ci-dessous, selon le plan d'équation Y = constante = Y_0 dans lequel elles sont contenues. On voit que tout voisinage saturé (i.e. réunion de trajectoires) de la trajectoire γ_0 rencontre nécessairement tout voisinage d'une trajectoire quelconque γ_1 contenue dans la région hachurée $\mathscr{R}$. On en déduit que toute application continue de A dans $\mathbf{R}^2$, constante sur les trajectoires, sera nécessairement constante sur $\mathscr{R}$ et donc ne sera pas une submersion topologique. Le feuilletage a bien la propriété annoncée.

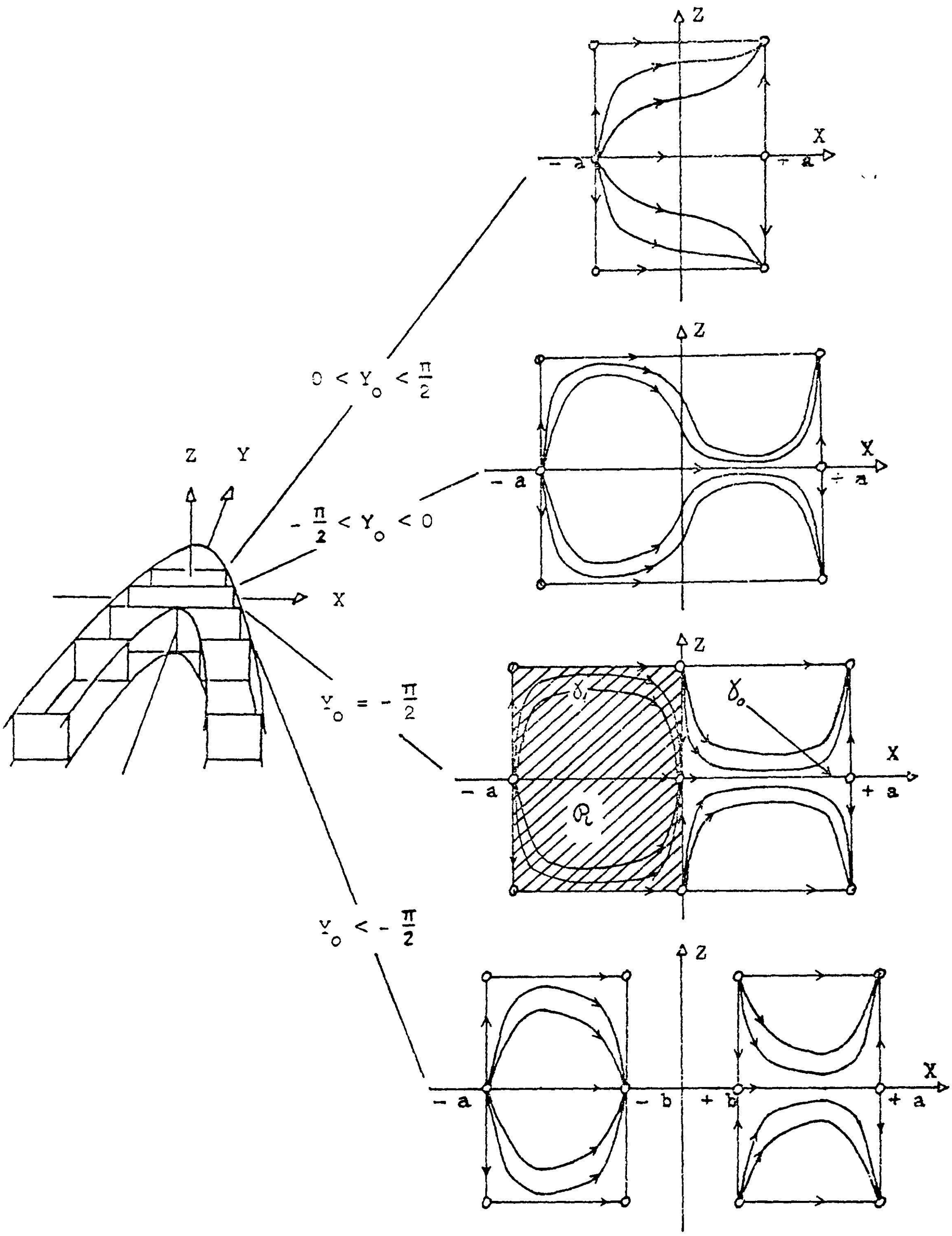

Fig. 2.

$$\left(a = \sqrt{\frac{\pi}{2} - Y_0} \ ; \ b = \sqrt{-\frac{\pi}{2} - Y_0} \right)$$

Remarque: On voit facilement que l'espace des feuilles du feuilletage $\mathscr{F}_0$ est un branchement de plans. D'autre part, on montre [4] qu'un branchement de plans ayant la propriété de $\mathbf{R}^3/\mathscr{F}_0$ d'avoir un point et un seul (γ_0) non séparé d'une partie homéomorphe à une droite $(\mathscr{R}/\mathscr{F}_0)$ est nécessairement homéomorphe au BPP. Ainsi, l'espace des feuilles de $\mathscr{F}_0$ est identifié, à homéomorphisme près: c'est le BPP.

Il serait intéressant de savoir si un feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qui, à la différence de $\mathscr{F}_0$, n'a aucune feuille non séparée d'une infinité non dénombrable d'autres feuilles, est nécessairement de type image-réciproque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Haefliger, A. et G. Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *L'enseignement mathématique (2), 3* (1957), pp. 105-125.

[2] Fedida, E. et F. Pluvinage, Sur les structures feuilletées déterminées par des équations polynômiales. *C.R.A.S. 267* (1968), pp. 101-104.

[3] Sec, A. Sur certains feuilletages de dimension un de R^3. *C.R.A.S. 266* (1968), pp. 351-353.

[4] Rabinowicz, M. Sur l'étude de l'espace quotient de certains systèmes différentiels. *(Thèse de 3e Cycle soutenue à Strasbourg, non publiée).*

(Reçu le 26 septembre 1975)

Marc Diener

Institut de Mathématique de l'Université d'Oran
Es Sénia (Oran)
Algérie