Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN FEUILLETAGE DE R^3

Autor: Diener, Marc

Kapitel: Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48174

$u = 0$ de P_1 sont non séparés du point $0_2 = (0, 0)$ de P_2. Toute application continue $h : \sum(\varphi_0) \to \mathbf{R}^2$ sera donc constante sur D_1, avec $h(D_1) = \{h(0_2)\}$. On en déduit que le BPP n'est pas régulier.

Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

Nous appelons *feuilletage polynômial et transverse* (P & T) de $\mathbf{R}^3$ tout feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^3$ dont les feuilles sont les trajectoires (courbes intégrales) d'un champ de vecteurs du type suivant:

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

où f et g sont des polynômes en x, y et z.

On dira qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de *type image-réciproque* s'il existe une submersion topologique [1]) $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ constante sur les feuilles de $\mathscr{F}$.

Remarque: Si $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ est une submersion topologique, les composantes connexes des images réciproques par p des éléments de $\mathbf{R}^n$ constituent les feuilles d'un feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$. Un feuilletage est donc de type image-réciproque s'il peut être obtenu de cette manière. La notion de feuilletage de type image-réciproque constitue une généralisation naturelle aux feuilletages de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$ de la notion d'intégrale première d'un champ de vecteurs de $\mathbf{R}^2$. Elle est liée à la notion de variété régulière: un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de type image-réciproque si et seulement si son espace des feuilles est régulier. On sait [1] que l'espace des feuilles de tout feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est régulier. Un feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est donc toujours de type image-réciproque. D'autre part, on déduit facilement de la théorie générale des équations différentielles linéaires que si les polynômes f et g définissant un feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ sont de degré total en y et z inférieur ou égal à un, alors l'espace des feuilles de ce feuille-

[1]) On entend par submersion topologique p de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}^n$ une application continue telle que tout point de $\mathbf{R}^{n+1}$ admet un voisinage sur lequel est défini un homéomorphisme k sur un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, tel que $p \circ k^{-1}$ soit égal à la projection sur les n premières coordonnées. En particulier, toute submersion (différentiable) est une submersion topologique.

tage est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$, donc que le feuilletage est de type image-réciproque.

Le feuilletage ci-dessous montre que dès que f et g sont de degré total en y et z supérieur à un, le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qu'ils permettent de définir peut ne plus être de type image-réciproque.

Exemple de feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas de type image-réciproque

Soit $\mathscr{F}_0$ le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ associé au champ de vecteurs

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2x(y^2+1) \\ z' &= 2yz\,. \end{aligned}$$

Effectuons un changement de variables. En posant

$$x = X\,,\; y = tg\,(X^2+Y) \qquad \text{et} \qquad z = tg\,Z$$

on ramène $\mathbf{R}^3\,xyz$ sur l'ouvert $A = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3, \left| X^2 + Y \right| < \frac{\pi}{2}, \left| Z \right| < \frac{\pi}{2}\right\}$ (voir figure 2), transformant ainsi les feuilles de $\mathscr{F}_0$ en les trajectoires contenues dans A du champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3\,XYZ$

$$\begin{aligned} X' &= \cos\,(X^2+Y) \\ Y' &= 0 \\ Z' &= \sin\,2Z \cdot \sin\,(X^2+Y)\,. \end{aligned}$$

De l'étude du signe des composantes de ce champ et de ses trajectoires (évidentes) dans la frontière de A, on déduit que ses trajectoires dans A ont le comportement indiqué ci-dessous, selon le plan d'équation Y = constante = Y_0 dans lequel elles sont contenues. On voit que tout voisinage saturé (i.e. réunion de trajectoires) de la trajectoire γ_0 rencontre nécessairement tout voisinage d'une trajectoire quelconque γ_1 contenue dans la région hachurée $\mathscr{R}$. On en déduit que toute application continue de A dans $\mathbf{R}^2$, constante sur les trajectoires, sera nécessairement constante sur $\mathscr{R}$ et donc ne sera pas une submersion topologique. Le feuilletage a bien la propriété annoncée.