

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1976)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UN FEUILLETAGE DE  $\mathbb{R}^3$   
**Autor:** Diener, Marc  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48174>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR UN FEUILLETAGE DE $\mathbf{R}^3$

par Marc DIENER

L'étude des propriétés générales de l'espace des feuilles des feuilletages du plan réel a été faite par A. Haefliger et G. Reeb [1], E. Fedida et F. Pluinage [2] ont donné un théorème permettant de déterminer, à homéomorphisme près, l'espace des feuilles d'un feuilletage du plan défini par une équation différentielle polynômiale par simple inspection de l'équation. Il ressort de ces études que l'espace des feuilles d'un feuilletage du plan est régulier: il se laisse toujours étaler sur la droite réelle. Cela résulte du fait que l'espace des feuilles d'un tel feuilletage est une variété topologique de dimension un — généralement non séparée — simplement connexe, donc composée de branchements simples de droites, et qu'une telle variété se laisse toujours étaler continument sur la droite réelle.

L'étude entamée par A. Sec [3] des feuilletages de dimension un de  $\mathbf{R}^3$  défini par un système de deux équations différentielles polynômiales — ce que nous appelons les feuilletages polynômiaux et transverses (P & T) de  $\mathbf{R}^3$  — révèle des similitudes entre l'espace des feuilles d'un tel feuilletage et celui d'un feuilletage du plan: il est encore simplement connexe et composé de *branchements de plans*. Les différences semblent, par contre, nombreuses; nous nous proposons d'examiner ci-dessous l'une d'entre elles: tout branchement de plans n'est pas nécessairement *régulier* (voir le *Branchement Pointé de Plans*) et nous verrons sur un exemple que, même pour des équations relativement simples, on peut trouver des feuilletages P & T non élémentaires, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas de *type image-réciproque*.

## BRANCHEMENTS DE PLANS — VARIÉTÉS RÉGULIÈRES

Nous appelons *branchement de plans* et notons  $\Sigma(\varphi)$  la variété topologique obtenue en identifiant, dans la somme topologique de deux exemplaires  $P_1$  et  $P_2$  du plan réel, les points du demi-plan ouvert  $H_1 = \{(u, v) \in P_1, u > 0\}$  de  $P_1$  à leur image par un homéomorphisme  $\varphi$  de  $H_1$  sur le demi-plan ouvert  $H_2 = \{(u, v) \in P_2, u > 0\}$  de  $P_2$ . L'homéomorphisme  $\varphi$  s'appellera l'*homéomorphisme attachant*.

On dira qu'une variété  $V^n$  de dimension  $n$  est *régulière* s'il existe un étalement continu  $h: V^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

*Exemples :*

Le *Branchement Simple de Plans* (BSP): c'est le branchement de plans obtenu en prenant l'identité pour homéomorphisme attachant. Il est homéomorphe au produit topologique du Branchement Simple (de droites) [1] et de la droite réelle. Le BSP est régulier.

Le *Branchement Pointé de Plans* (BPP): c'est le branchement de plans  $\Sigma(\varphi_0)$  associé à l'homéomorphisme  $\varphi_0$  de  $H_1$  sur  $H_2$  suivant:  $\varphi_0(u, v)$

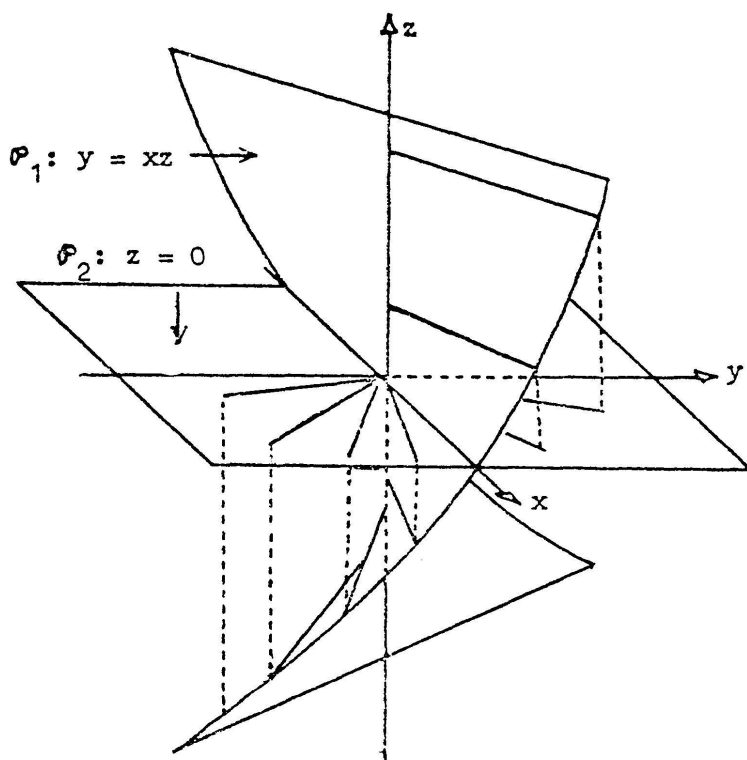


Fig. 1.

$= (u, uv)$ . Il peut se visualiser de la façon suivante: Dans  $\mathbf{R}^3$   $xyz$  soient  $\mathcal{P}_1$  le parabolôïde-hyperbolique d'équation  $y = xz$  et  $\mathcal{P}_2$  le plan horizontal d'équation  $z = 0$  (voir figure 1);  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont homéomorphes au plan réel. On obtient le BPP en identifiant, dans la somme disjointe de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les paires de points situés sur une même verticale du demi-espace ouvert  $\mathcal{U}$  des  $x > 0$ . On voit que, dans le BPP, lorsque l'on tend dans  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{U}$  vers un point quelconque de la droite verticale  $\mathcal{D}_1$  d'équations  $x = y = 0$  de  $\mathcal{P}_1$ , on tend simultanément vers le point  $\mathcal{O}_2$  de coordonnées  $(0, 0, 0)$  de  $\mathcal{P}_2$ . En d'autres termes, dans  $\Sigma(\varphi_0)$ , tous les points de la droite  $D_1$  d'équation

$u = 0$  de  $P_1$  sont non séparés du point  $0_2 = (0, 0)$  de  $P_2$ . Toute application continue  $h : \sum(\varphi_0) \rightarrow \mathbf{R}^2$  sera donc constante sur  $D_1$ , avec  $h(D_1) = \{h(0_2)\}$ . On en déduit que le BPP n'est pas régulier.

FEUILLETAGES POLYNÔMIAUX ET TRANSVERSES  
ET FEUILLETAGES DE TYPE IMAGE-RÉCIPROQUE

Nous appelons *feuilletage polynomial et transverse* (P & T) de  $\mathbf{R}^3$  tout feuilletage de dimension un de  $\mathbf{R}^3$  dont les feuilles sont les trajectoires (courbes intégrales) d'un champ de vecteurs du type suivant :

$$\begin{aligned}x' &= 1 \\y' &= f(x, y, z) \\z' &= g(x, y, z)\end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont des polynômes en  $x, y$  et  $z$ .

On dira qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  est de *type image-réciproque* s'il existe une submersion topologique <sup>1)</sup>  $p : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  constante sur les feuilles de  $\mathcal{F}$ .

REMARQUE: Si  $p : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une submersion topologique, les composantes connexes des images réciproques par  $p$  des éléments de  $\mathbf{R}^n$  constituent les feuilles d'un feuilletage de dimension un de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Un feuilletage est donc de type image-réciproque s'il peut être obtenu de cette manière. La notion de feuilletage de type image-réciproque constitue une généralisation naturelle aux feuilletages de dimension un de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de la notion d'intégrale première d'un champ de vecteurs de  $\mathbf{R}^2$ . Elle est liée à la notion de variété régulière: un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  est de type image-réciproque si et seulement si son espace des feuilles est régulier. On sait [1] que l'espace des feuilles de tout feuilletage de  $\mathbf{R}^2$  est régulier. Un feuilletage de  $\mathbf{R}^2$  est donc toujours de type image-réciproque. D'autre part, on déduit facilement de la théorie générale des équations différentielles linéaires que si les polynômes  $f$  et  $g$  définissant un feuilletage P & T de  $\mathbf{R}^3$  sont de degré total en  $y$  et  $z$  inférieur ou égal à un, alors l'espace des feuilles de ce feuille-

<sup>1)</sup> On entend par submersion topologique  $p$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  dans  $\mathbf{R}^n$  une application continue telle que tout point de  $\mathbf{R}^{n+1}$  admet un voisinage sur lequel est défini un homéomorphisme  $k$  sur un ouvert de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , tel que  $p \circ k^{-1}$  soit égal à la projection sur les  $n$  premières coordonnées. En particulier, toute submersion (différentiable) est une submersion topologique.

tage est homéomorphe à  $\mathbf{R}^2$ , donc que le feuilletage est de type image-réciproque.

Le feuilletage ci-dessous montre que dès que  $f$  et  $g$  sont de degré total en  $y$  et  $z$  supérieur à un, le feuilletage  $P$  &  $T$  de  $\mathbf{R}^3$  qu'ils permettent de définir peut ne plus être de type image-réciproque.

EXEMPLE DE FEUILLETAGE  $P$  &  $T$  DE  $\mathbf{R}^3$   
 QUI N'EST PAS DE TYPE IMAGE-RÉCIPROQUE

Soit  $\mathcal{F}_0$  le feuilletage  $P$  &  $T$  de  $\mathbf{R}^3$  associé au champ de vecteurs

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2x(y^2 + 1) \\ z' &= 2yz. \end{aligned}$$

Effectuons un changement de variables. En posant

$$x = X, \quad y = \operatorname{tg}(X^2 + Y) \quad \text{et} \quad z = \operatorname{tg} Z$$

on ramène  $\mathbf{R}^3_{xyz}$  sur l'ouvert  $A = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3, |X^2 + Y| < \frac{\pi}{2}, \right.$

$\left. |Z| < \frac{\pi}{2} \right\}$  (voir figure 2), transformant ainsi les feuilles de  $\mathcal{F}_0$  en les trajectoires contenues dans  $A$  du champ de vecteurs de  $\mathbf{R}^3_{XYZ}$

$$\begin{aligned} X' &= \cos(X^2 + Y) \\ Y' &= 0 \\ Z' &= \sin 2Z \cdot \sin(X^2 + Y). \end{aligned}$$

De l'étude du signe des composantes de ce champ et de ses trajectoires (évidentes) dans la frontière de  $A$ , on déduit que ses trajectoires dans  $A$  ont le comportement indiqué ci-dessous, selon le plan d'équation  $Y = \text{constante} = Y_0$  dans lequel elles sont contenues. On voit que tout voisinage saturé (i.e. réunion de trajectoires) de la trajectoire  $\gamma_0$  rencontre nécessairement tout voisinage d'une trajectoire quelconque  $\gamma_1$  contenue dans la région hachurée  $\mathcal{R}$ . On en déduit que toute application continue de  $A$  dans  $\mathbf{R}^2$ , constante sur les trajectoires, sera nécessairement constante sur  $\mathcal{R}$  et donc ne sera pas une submersion topologique. Le feuilletage a bien la propriété annoncée.

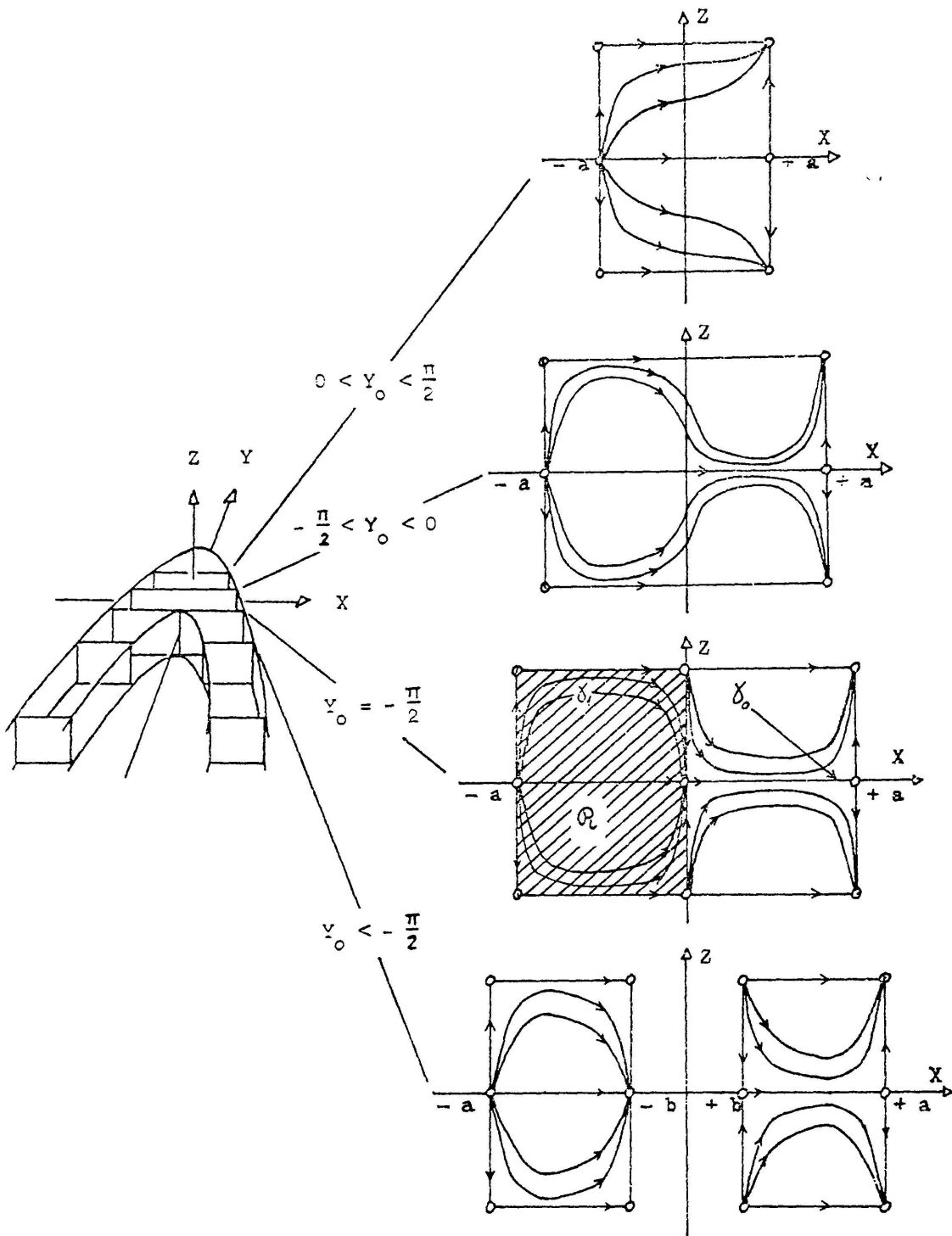


Fig. 2.

$$\left( a = \sqrt{\frac{\pi}{2} - Y_0}; b = \sqrt{-\frac{\pi}{2} - Y_0} \right)$$

REMARQUE: On voit facilement que l'espace des feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}_0$  est un branchement de plans. D'autre part, on montre [4] qu'un branchement de plans ayant la propriété de  $\mathbf{R}^3/\mathcal{F}_0$  d'avoir un point et un seul ( $\gamma_0$ ) non séparé d'une partie homéomorphe à une droite ( $\mathcal{R}/\mathcal{F}_0$ ) est néces-

sairement homéomorphe au BPP. Ainsi, l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_0$  est identifié, à homéomorphisme près: c'est le BPP.

Il serait intéressant de savoir si un feuilletage P & T de  $\mathbf{R}^3$  qui, à la différence de  $\mathcal{F}_0$ , n'a aucune feuille non séparée d'une infinité non dénombrable d'autres feuilles, est nécessairement de type image-réciproque.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAEFLIGER, A. et G. REEB. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *L'enseignement mathématique* (2), 3 (1957), pp. 105-125.
- [2] FEDIDA, E. et F. PLUVINAGE, Sur les structures feuilletées déterminées par des équations polynômiales. *C.R.A.S.* 267 (1968), pp. 101-104.
- [3] SEC, A. Sur certains feuilletages de dimension un de  $R^3$ . *C.R.A.S.* 266 (1968), pp. 351-353.
- [4] RABINOWICZ, M. Sur l'étude de l'espace quotient de certains systèmes différentiels. (*Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle soutenue à Strasbourg, non publiée*).

( Reçu le 26 septembre 1975 )

Marc Diener

Institut de Mathématique de l'Université d'Oran  
Es Sénia (Oran)  
Algérie