**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 22 (1976)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

**Autor:** Kervaire, Michel

**Kapitel:** §5. Action de $\Psi_n$ dans le groupe des classes de projectifs

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-48172

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

résulte de $\chi^{n+m} = \chi^n$. (Card $C$ divise $m$.) Comme les classes des $EC$-modules simples engendrent $R(EC)$, il en résulte

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(EC) \to R(EC),$$

puis (5) en général par la réduction faite ci-dessus.

Pour (6), on se sert des mêmes remarques. On a

$$\Psi_s(E_\chi) = E(\chi^s)$$

comme on vient de le voir. Il reste à vérifier que $\sigma(E_\chi) = E(\chi^s)$, c.-à-d. que $C$ opère sur $\sigma(E_\chi)$ par

$$x \,.\, \sigma z = \chi^s(x)\,\sigma z, \quad z \in E_\chi, \quad x \in C.$$

Or,

$$x \,.\, \sigma z = \sigma(\sigma^{-1}(x) \,.\, z) = \sigma(x.z) = \sigma(\chi(x)\, z) = \sigma(\chi(x)) \,.\, \sigma z,$$

et

$$\sigma(\chi(x)) = \chi^s(x),$$

puisque $\chi(x)$ est racine $m$-ième de l'unité.

La propriété (7) est un corollaire facile de (6). Soit $E$ une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$, le corps à $q$ éléments et soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(E/\mathbf{F}_q)$ l'automorphisme de Frobenius, i.e. $\sigma(a) = a^q$ pour tout $a \in E$. Comme $i : R(\mathbf{F}_q G) \to R(EG)$ est injectif et commute à $\Psi_q$, il est suffisant de voir que $\Psi_q\, i = i$. Or, d'après (6), $\Psi_q\, \beta = \sigma\beta$ pour tout $\beta \in R(EG)$. Si $\beta = i\alpha$ on vérifie facilement que $\sigma\beta = \beta$. (C'est trivial sur la forme matricielle d'une représentation.) Donc, $\Psi_q\, i\alpha = i\alpha$, et $\Psi_q\, \alpha = \alpha$ en résulte.

*Remarque.* Si $\sigma$ appartient au sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{Aut}\,(F)$, son action sur $R(FG)$ est triviale.

## § 5. Action de $\Psi_n$ dans le groupe des classes de projectifs

Il existe un analogue $K(FG)$ de $R(FG)$ construit à l'aide des $FG$-modules projectifs. Soit $L'$ le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphie de $FG$-modules projectifs de dimension finie. On considère le sous-groupe $L_0'$ de $L'$ engendré par les éléments $P - P' - P''$ s'il existe une suite exacte $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$. (On a alors nécessairement $P \cong P' \oplus P''$.)

DÉFINITION. $K(FG) = L'/L'_0$.

$K(FG)$ est également un foncteur covariant en $F$. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, on a toujours un homomorphisme induit $f_* : K(FG) \to K(FG')$ déterminé par $P \to FG' \otimes_{FG} P$, mais la restriction n'existe que si $FG'$ est projectif de type fini sur $FG$ ce qui a lieu ($G$ et $G'$ étant finis) si $G$ est sous-groupe de $G'$. ($FG'$ est même alors $FG$-libre). Dans ce cas, $f : G \subset G'$ (finis), on a donc un homomorphisme de restriction $f^* : K(FG') \to K(FG)$.

Il est évident que l'on a un homomorphisme de groupes abéliens

$$c : K(FG) \to R(FG)$$

appelé homomorphisme de Cartan.

On va voir que $K(FG)$ est également muni d'opérations d'Adams qui sont compatibles, via $c$, avec les opérations sur $R(FG)$.

*Remarque.* $K(FG)$ n'a en général pas de $\lambda$-structure compatible via $c$ avec celle de $R(FG)$. Exemple: Soient $F$ le corps à 2 éléments et $G$ le groupe cyclique d'ordre 2. On constate que $K(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par $[FG]$, et $R(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par la classe de $F$. L'application $c : K(FG) \to R(FG)$ envoie $[FG]$ sur 2 fois le générateur $[F]$ de $R(FG)$. Or, $\lambda_2(FG)$ $F \notin cK(FG)$.

La définition des $\Psi_n$ du § 3 est donc inapplicable pour $K(FG)$.

On va donner une nouvelle définition des $\Psi_n$ inspirée par une construction analogue en topologie due à M. Atiyah. (*Quart. Journal of Math.* 17 (1966), 165-193. Cf. formule (2.7).)

Le point essentiel est la définition de $\Psi_l$ pour $l$ premier, $l \neq$ caract $(F)$. La définition ci-dessous fonctionne aussi bien pour $K(FG)$ que pour $R(FG)$.

Soient $V$ un $FG$-module et $V^l$ la $l$-ième puissance tensorielle de $V$. Le groupe $S_l$ de permutations des indices $\{1, ..., l\}$ opère sur $V^l$ par

$$\alpha . (v_1 \otimes \ldots \otimes v_l) = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_l}$$

où

$$i_k = \alpha^{-1}(k), \alpha \in S_l, \; k = 1, \ldots, l .$$

Soit $\gamma$ la permutation circulaire des indices $1, ..., l$, i.e. $\gamma(i) = i + 1 \bmod l$. On notera $C_l$ le sous-groupe (cyclique) de $S_l$ engendré par $\gamma$. Soit enfin $E$ le corps des racines sur $F$ du polynôme $X^l - 1$. Comme on a supposé $l \neq$ caract $(F)$, le $EC_l$-module $EV^l$ se décompose en une somme directe

$$E\,V^l = \oplus_{\xi \in \mu_l} (E\,V^l)_\xi ,$$

où $\mu_l$ est le groupe des racines de $X^l - 1$ dans $E$ et $(EV^l)_\xi$ est le sous-espace propre de $EV^l$ pour la valeur propre $\xi$ de $\gamma$, i.e. $(EV^l)_\xi = \mathrm{Ker}\,(\gamma - \xi)$.

Il est évident que $(EV^l)_\xi$ est sous $EG$-module de $EV^l$.

*On a* $(EV^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi)$, *où* $V(\xi)$ *est un* $FG$*-module univoquement déterminé.*

Ceci va résulter du lemme classique suivant.

LEMME. *Soient* $W$ *un* $EG$*-module et* $\pi$ *un groupe fini d'automorphismes de* $E$ *avec corps fixe* $F$. *Supposons que* $\pi$ *opère sur* $W$ *par automorphismes semi-linéaires*, i.e.

$$\sigma(aw) = \sigma(a)\,\sigma(w)\,,$$

*pour tout* $a \in E$, $w \in W$, $\sigma \in \pi$ *et que les actions de* $\pi$ *et* $G$ *commutent.*

*Soit* $S : W \to W$ *définie par* $S(W) = \sum_{\sigma\in\pi} \sigma(w)$. *Alors,* $S(W)$ *est un sous-*$FG$*-module de* $W$ *et* $W \cong E \otimes_F S(W)$.

*Remarque.* Si, par ailleurs, on dispose déjà d'un $FG$-module $U$ tel que $W = E \otimes_F U$, et si $1 \otimes U$ est stable pour l'action de $\pi$, alors $U \cong S(W)$, comme $FG$-modules.

En effet, soit $\{\sigma\, a\}_{\sigma\in\pi}$ une base normale de $E/F$. On définit $h : U \to \mathrm{S}\,(W)$ par $h(u) = \sum_{\sigma\in\pi} \sigma(a \otimes u)$. Il est clair que $h$ commute à l'action de $G$. D'autre part $h$ est injectif car

$$\sum_{\sigma\in\pi} \sigma(a \otimes u) = \sum_{\sigma\in\pi} \sigma(a)\,.\,\sigma(1 \otimes u) = 0$$

entraîne $u = 0$ puisque $\{\sigma(a)\}$ est une $F$-base de $E$ et $\sigma(1 \otimes u) \in 1 \otimes U$ par hypothèse. Comme $\dim_F U = \dim_E W = \dim_F S(W)$, il en résulte que $h$ est un isomorphisme.

Pour démontrer le lemme, on construit un $EG$-homomorphisme $f : E \otimes_F S(W) \to W$ par $f(\sum_i a_i \otimes w_i) = \sum_i a_i\, w_i$. On voit que $f$ est surjectif en prenant une forme $\phi \in \mathrm{Hom}_E\,(W, E)$ dont on suppose qu'elle s'annule sur $f(E \otimes_F S(W))$ et en utilisant le théorème de l'indépendance des automorphismes pour démontrer que $\phi = 0$. On constate l'injectivité de $f$ en écrivant les éléments de $E \otimes_F S(W)$ sous la forme $\sum_{\sigma\in\pi} \sigma a \otimes w_\sigma$, où $\{\sigma a\}_{\sigma\in\pi}$ est une base normale de $E/F$ et en observant que les éléments de $S(W)$ sont invariants par l'action de $\pi$.

On va appliquer ce lemme avec $W = (EV^l)_\xi$ et $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$.

On fait opérer $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$ sur $V^l$ comme suit:

On a l'injection $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F) \to U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ donnée par

$$\sigma \to s \bmod l \text{ si } \sigma(\xi) = \xi^s$$

pour tout $\xi \in \mu_l$. D'autre part, à $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ on associe la permutation $\alpha_s$ donnée par

$$\alpha_s(i+1) = is + 1 \bmod l .$$

La composition $\pi \to U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) \to S_l$, notée $\sigma \to \alpha_\sigma$, suivie de l'action de $S_l$ sur $V^l$ fournit une action de $\pi$ sur $V^l$.

On pose alors

$$\sigma(a \otimes v) = \sigma(a) \otimes \alpha_\sigma(v)$$

pour $a \in E$, $v \in V^l$.

Il est clair que cette formule définit une action semi-linéaire de $\pi$ sur $EV^l$ qui commute à l'action de $G$ et laisse stable $1 \otimes V^l$.

On vérifie que $\alpha_s \,.\, \gamma = \gamma^s \,.\, \alpha_s$ pour tout $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$. On a donc

$$\sigma\gamma(v) = \gamma^s \sigma(v), v \in E\,V^l$$

et $\sigma\,\xi = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$ et par suite l'action de $\pi$ préserve $(EV^l)_\xi$. En effet,

$$\gamma\,\sigma(v) = \sigma(\gamma^{s'}v) = \sigma(\zeta^{s'}v) = \sigma(\xi^{s'})\,\sigma(v) = \xi\,\sigma(v)\,,$$

où $ss' = 1 \bmod l$.

En vertu du lemme, on a donc

$$(E\,V^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi)\,,$$

avec

$$V(\xi) = S(E\,V^l)_\xi\,,$$

où

$$S(w) = \textstyle\sum_{\sigma\varepsilon\pi} \sigma(w),\ w \in (E\,V^l)_\xi\,.$$

Définition. $\Psi_l'(V) = [V(1)] - [V(\zeta)]$, où $\zeta$ est un générateur (quelconque) du groupe $\mu_l \subset E^\cdot$ des racines de $X^l - 1$ et [ ] désigne la classe du module entre crochets dans le groupe de Grothendieck $K(FG)$, resp. $R(FG)$.

Cette définition exige de vérifier

(1) que $V(1)$ et $V(\zeta)$ sont $FG$-projectifs si c'est le cas pour $V$,

(2) que $[V(\zeta)]$ est indépendant du générateur choisi $\zeta \in \mu_l$.

Pour contrôler (1), on observe que

$$S(E\,V^l) = \oplus_{\xi\in\mu_l} S(E\,V^l)_\xi = \oplus_{\xi\in\mu_l} V(\xi)\,.$$

Comme $V^l$ est stable par $\pi$, la remarque qui suit le lemme ci-dessus entraîne

$$V^l \cong S(E\,V^l) = \oplus_{\xi\in\mu_l} V(\xi)$$

ce qui montre bien que $V(\xi)$ est projectif si c'est le cas pour $V$, et donc pour $V^l$.

Pour démontrer (2) on va en fait exhiber un isomorphisme de $FG$-modules $V(\zeta) \cong V(\eta)$ pour deux générateurs quelconques $\zeta$, $\eta \in \mu_l$. Puisque $\zeta$, $\eta$ sont des générateurs de $\mu_l$, il existe un entier $n$ premier à $l$ et tel que $\eta = \zeta^n$. Soit, comme ci-dessus, $\alpha_n \in S_l$ la permutation donnée par la formule

$$\alpha_n(i+1) = in + 1 \bmod l\,.$$

On a vu que $\alpha_n \,.\, \gamma = \gamma^n \,.\, \alpha_n$. Il en résulte que l'on a un $EG$-homomorphisme $\alpha_n : (EV^l)_\eta \to (EV^l)_\zeta$. C'est évidemment un isomorphisme, par symétrie de la construction. D'autre part $\alpha_n$ commute à l'action de $\pi$ et fournit donc un $FG$-isomorphisme $\alpha_n : S(EV^l)_\eta \to S(EV^l)_\zeta$.

La définition a donc un sens. Pour démontrer que $\Psi_l'$ induit une opération (additive) sur $K(FG)$, resp. $R(FG)$, il suffit de vérifier que si $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ est une suite exacte de $FG$-modules, projectifs si l'on s'intéresse à $K(FG)$, on a

$$\Psi_l' V_1 = \Psi_l' V_0 + \Psi_l' V\,.$$

Soit $Q$ le $FG$-module défini par la suite exacte

$$0 \to Q \to V_1^l \to V^l \to 0\,.$$

Comme ci-dessus, on a des opérations semi-linéaires de $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$ sur $EV_1^l$, $EV^l$ et donc sur $EQ$, ainsi que des actions de $S_l$ sur ces modules. Il est clair que $EV_0^l \subset EQ$ et $EV_0^l$ est stable par $G$, $\pi$, $S_l$. On va démontrer que

$$[S(EQ/EV_0^l)_1] = [S(EQ/EV_0^l)_\xi]$$

pour tout $\xi \in \mu_l$, où l'indice $\xi$ signifie que l'on prend l'espace propre pour la valeur propre $\xi$ de $\gamma$, la permutation circulaire $(\gamma(i) = i + 1 \bmod l)$, et $S$ est définie comme ci-dessus $S = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma$.

La suite exacte

$$0 \to EQ/EV_0^l \to EV_1^l/EV_0^l \to EV^l \to 0$$

se décompose en somme directe de suites

$$0 \to (EQ/EV_0^l)_\xi \to (EV_1^l/EV_0^l)_\xi \to (EV^l)_\xi \to 0$$

exactes pour chaque $\xi \in \mu_l$. D'où

$$0 \to S(EQ/EV_0^l)_\xi \to S(EV_1^l/EV_0^l)_\xi \to S(EV^l)_\xi \to 0\,.$$

On a évidemment aussi les suites exactes

$$0 \to S(E\,V_0^l)_\xi \to S(E\,V_1^l)_\xi \to S(E\,V_1^l/E\,V_0^l)_\xi \to 0\,.$$

A condition d'avoir démontré que les modules considérés sont projectifs si $V_0$, $V_1$ et $V$ le sont, on a alors

$$[S(E\,V^l)_\xi] = [S(E\,V_1^l)_\xi] - [S(E\,V_0^l)_\xi] - [S(E\,Q/E\,V_0^l)_\xi]\,.$$

En soustrayant membre à membre ces égalités pour $\xi = 1$ et $\xi = \zeta$, un générateur de $\mu_l$, on obtient

$$\Psi_l'\,V = \Psi_l'\,V_1 - \Psi_l'\,V_0\,.$$

Reste donc à démontrer que $[S(EQ/EV_0^l)_\xi]$ a un sens dans $K(FG)$, resp. $R(FG)$ et ne dépend pas de $\xi \in \mu_l$.

Pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l)$ avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1, posons $V_\varepsilon = V_{\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2} \otimes ... \otimes V_{\varepsilon_l}$. C'est un sous $FG$-module de $V_1^l$. On note $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_l$. Les égalités $|\varepsilon| = 0$ et $|\varepsilon| = l$ caractérisent les suites $(0, ..., 0)$ et $(1, ..., 1)$ respectivement. D'autre part, les $V_\varepsilon$ avec $|\varepsilon| = \lambda$, constant, sont permutés entre eux par $S_l$. De même, les $EV_\varepsilon$ sont permutés entre eux par $\pi$. On voit que

$$Q = \sum_{|\varepsilon|<l} V_\varepsilon\,.$$

Les $FG$-modules $V_\varepsilon$ fournissent une filtration de $Q$. Pour tout $\lambda$ tel que $0 \leqq \lambda \leqq l-1$, on pose

$$Q_\lambda = \sum_{|\varepsilon|\leqq\lambda} V_\varepsilon\,.$$

Les $Q_\lambda$ sont des sous $FG$-modules de $Q$ et

$$Q = Q_{l-1} \supset ... \supset Q_1 \supset Q_0 = V_0^l\,.$$

De même $EQ = EQ_{l-1} \supset ... \supset EQ_1 \supset EQ_0 = EV_0^l$, et les groupes $\pi$ et $S_l$ préservent la filtration.

On va expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ pour $\lambda \neq 0, l$.

Notation. Soit $W_\varepsilon$ le produit tensoriel obtenu en remplaçant par $V$ chaque facteur $V_1$ dans $V_\varepsilon$. E.g. si $l = 5$, $\varepsilon = (1, 1, 0, 0, 1)$, on a

$$V_\varepsilon = V_1 \otimes V_1 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_1$$

et

$$W_\varepsilon = V \otimes V \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V\,.$$

On a une application évidente surjective $V_\varepsilon \to W_\varepsilon$ qui commute à l'action de $G$. Remarquons aussi que tous les $W_\varepsilon$ sont projectifs si $V$ et $V_0$ le sont.

Il est commode de faire opérer $S_l$ sur les suites $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l)$ par permutation des indices. Le fait essentiel est que $C_l$ opère *sans point fixe* sur l'ensemble des suites $\varepsilon$ telles que $|\varepsilon| \neq 0, l$. Il en résulte que les $C_l$-orbites de ces suites ont toutes la même cardinalité $l$ (qui est premier). Rappelons d'autre part que à $\sigma \in \pi$ tel que $\sigma\xi = \xi^s$, on a associé la permutation $\alpha_\sigma \in S_l$ donnée par $\alpha_\sigma(i+1) = is + 1 \bmod l$. Comme les $\alpha_\sigma$ normalisent $C_l$, il en résulte que $\pi$ opère sur les orbites de $C_l$. Comme de plus $\pi$ est abelien, il est facile de voir qu'il existe un système $R_\lambda$ de représentants des $C_l$-orbites dans l'ensemble des suites $\varepsilon$ telles que $|\varepsilon| = \lambda \neq 0$, qui est *stable par l'action de* $\pi$.

Ces remarques permettent d'expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$. Je dis que

$$E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \cong E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon)$$

par un isomorphisme qui commute avec les actions de $G$ sur le deuxième facteur et de $C_l$ sur le premier (dans le membre de droite). On s'occupera plus tard de l'action de $\pi$.

On définit $f_\lambda : EC_l \otimes_E (\otimes_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ comme suit. Soit $z = \gamma^i \otimes w$ avec $w = w_1 \otimes ... \otimes w_l \in W_\varepsilon$ et $\gamma$ le générateur choisi de $C_l$. Pour $\varepsilon_k = 1$, on a $w_k \in V$ et pour $\varepsilon_k = 0$, $w_k \in V_0$. Pour chaque indice $k$ tel que $\varepsilon_k = 1$, on choisit un élément $v_k \in V_1$ se projettant sur $w_k$ par la flèche donnée $V_1 \to V$. Si $\varepsilon_k = 0$, on définit $v_k$ par $v_k = w_k \in V_0$. On pose

$$f_\lambda(\gamma^i \otimes w) = \gamma^i . (v_1 \otimes ... \otimes v_l) \in E\,Q_\lambda/Q_{\lambda-1}\,.$$

Il est facile de voir que $f_\lambda$ est bien définie sur les éléments de la forme $\gamma^i \otimes w$. On l'étend à $EC_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon)$ tout entier par linéarité.

Il est clair que $f_\lambda$ commute à l'action de $G$ naturelle sur $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ et triviale sur $EC_l$. Il est également évident que $f_\lambda$ est surjective. Pour voir que $f_\lambda$ est un isomorphisme, on compare les dimension sur $E$ des deux membres.

$$\dim_E E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) = l\,.\frac{1}{l}\binom{l}{\lambda}.(\dim_F V)^\lambda (\dim_\lambda V_0)^{l-\lambda}\,.$$

On utilise ici le fait que $C_l$ opère sans point fixe sur $\{\varepsilon, |\varepsilon| \neq 0, l\}$ pour dénombrer Card $R_\lambda = \frac{1}{l}.\binom{l}{\lambda}$. Chacune de ces dimensions est supérieure ou égale à $\dim_F Q_\lambda/Q_{\lambda-1}$. Or,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1}\binom{l}{\lambda}.(\dim V)^\lambda(\dim V_0)^{l-\lambda} &= (\dim V + \dim V_0)^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim V_1^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim (Q/V_0^l) = \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1} \dim Q_\lambda/Q_{\lambda-1}\,.\end{aligned}$$

Donc, chaque $f_\lambda$, $\lambda = 1, ..., l-1$ est un isomorphisme.

Comme $f_\lambda$ commute à l'action de $C_l$, on a

$$E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong (E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon))_\xi$$
$$\cong (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon)\,,$$

puisque l'action de $C_l$ dans le deuxième membre se réduit à l'action sur le premier facteur $EC_l$.

En outre, on remarque que le membre de droite est $EG$-isomorphe à $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ puisque $(EC_l)_\xi$ est de dimension 1 et que $G$ y opère trivialement.

Le $EG$-module $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$ est donc finalement isomorphe à $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ qui est indépendant de $\xi \in \mu_l$.

Reste à voir comment ces isomorphismes se comportent pour l'action de $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$. On fait agir $\sigma \in \pi$ sur $EC_l$ par

$$\sigma(\textstyle\sum_i a_i\gamma^i) = \sum_i \sigma(a_i)\,\gamma^{is}\,,$$

où $s \bmod l$ est déterminé par $\sigma(\xi) = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$. On prend l'action diagonale de $\pi$ sur $EC_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon)$, en observant que $\pi$ opère bien sur le deuxième facteur car $R_\lambda$ est stable par $\pi$. On vérifie alors sans difficulté que $f_\lambda\,\sigma = \sigma f_\lambda$.

Un choix de vecteur base pour $(EC_l)_\xi$ est

$$u = \frac{1}{l}\sum_i \xi^{-i}\,\gamma^i$$

et cet élément est invariant par $\pi$. Donc,

$$f_\lambda : (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$$

commute à l'action de $\pi$, et il en est de même de l'isomorphisme

$$g_\lambda : (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \to \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon$$

puisque $\pi$ opère trivialement sur $u$.

Ainsi,

$$g_\lambda \cdot f_\lambda^{-1} : E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \to \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon$$

est un isomorphisme de $EG$-modules qui commute à l'action de $\pi$ et il en résulte:

$$S\,E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong S(\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \cong \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon\,.$$

(Le deuxième isomorphisme en vertu de la remarque qui suit le lemme.)

On conclut que

$$S\,E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon$$

est indépendant de $\xi$ à $FG$-isomorphisme près et est un $FG$-module projectif si $V_0$, $V$ et donc $W_\varepsilon$ le sont.

On considère les suites exactes

$$0 \to E(Q_{\lambda-1}/V_0^l) \to E(Q_\lambda/V_0^l) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \to 0$$

qui fournissent les suites exactes

$$0 \to SE(Q_{\lambda-1}/V_0^l)_\xi \to SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi \to SE(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \to 0\,.$$

On voit alors par récurrence sur $\lambda = 1, \ldots, l-1$ que $SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi$ est $FG$-projectif si $V_0$, $V$ le sont, et que sa classe $[SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi]$ est indépendante de $\xi$. Explicitement, on obtient

$$[SE(Q/V_0^l)_\xi] = \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1}(-1)^{l-\lambda-1}[\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon]\,.$$

On a donc démontré

$$\Psi_l'(V_1) = \Psi_l'(V_0) + \Psi_l'(V)\,.$$

Il reste à vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \\ \downarrow \Psi_l' & & \downarrow \Psi_l \\ K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \end{array}$$

commute. Ceci est facile. Il est suffisant de vérifier res . $i\,(c\Psi_l' - \Psi_l c) = 0$, avec res . $i : R(FG) \to R(LG) \to \prod_{C\in\mathscr{C}} R(LC)$, où $L$ est une clôture algébrique de $F$ et $\mathscr{C}$ est la famille des sous-groupes cycliques $p$-réguliers de $G$.

On sait que $\Psi_l$ commute à res . $i$. Pour $\Psi_l'$ le même résultat est de vérification facile. On est donc ramené à démontrer $c\,\Psi_l' V - \Psi_l\, c\, V = 0$ dans le cas où $F$ est algébriquement clos et $G$ est cyclique (d'ordre premier à caract $(F)$). On peut même supposer que $V$ est un $FG$-module simple, donc de dimension 1, puisque $\Psi_l'$ et $\Psi_l$ sont toutes deux additives.

Le groupe cyclique $C_l$ opère alors trivialement sur $V^l$ comme on le voit en identifiant $V$ à $F$ (comme $F$-espace vectoriel) puis $V^l$ à $F$ par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_l \to x_1 \ldots x_l \in F\,.$$

Dans ce cas, on a donc

$$\mathrm{Ker}\,(\gamma - 1) = V^l, \text{ et } \mathrm{Ker}\,(\gamma - \xi) = 0\,.$$

Comme $\pi = \{1\}$ puisque $F$ est algébriquement clos, on obtient

$$\Psi_l'(V) = [V^l] = [V]^l \in K(FG)\,.$$

Donc,

$$c\,\Psi_l'(V) = c\,[V]^l = \Psi_l\, c(V)\,.$$

On notera également $\Psi_l$ l'endomorphisme $\Psi_l' : K(FG) \to K(FG)$.

*Résumé.* Soient $F$ un corps de caractéristique $p$ et $G$ un groupe fini. Pour tout nombre premier $l \neq p$, il existe une opération d'Adams $\Psi_l : K(FG) \to K(FG)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(F\,G) & \xrightarrow{c} & R(F\,G) \\ \downarrow \Psi_l & & \downarrow \Psi_l \\ K(F\,G) & \xrightarrow{c} & R(F\,G) \end{array}$$

commute.

*Remarques.* On peut maintenant définir $\Psi_m : K(FG) \to K(FG)$ pour tout $m$ premier à $p$ = caract $(F)$ par

$$\Psi_m = \prod_i \Psi_{l_i}^{e_i}, \text{ ou } m = \prod_i l_i^{e_i}.$$

(Avant de savoir que $c$ est injectif, prendre les facteurs $\Psi_{l_i}$ dans un ordre fixé, par exemple celui prescrit par $l_1 < l_2 < \ldots$.)

On a $\Psi_m c = c\,\Psi_m$ pour tout $m$ premier à $p$.

Soit en particulier $m$ l'exposant $p$-régulier de $G$. Par définition $m$ est premier à $p$. Pour tout $FG$-module projectif $P$, on a par périodicité

$$(\dim_F P) \,.\, 1 = \Psi_0\, c(P) = \Psi_m\, c(P) = c\,\Psi_m(P) \in c\,K(F\,G)\,.$$

Il en résulte facilement que $R(FG)/c\,K(FG)$ a pour exposant *exact* le p.g.c.d. des dimensions des $FG$-modules projectifs.

Cet exposant est évidemment un diviseur de Card $G = \dim_F FG$.

Comme $R(FG)$ est de génération finie, $R(FG)/cK(FG)$ est un groupe fini.

On voit assez facilement que $K(FG)$ et $R(FG)$ sont abéliens libres de même rang. On retrouve donc le fait que $c$ est injective. (Cf.[Serre], p. 136, Cor. 2.)

Il est facile de montrer que l'exposant de Coker $c$ est la plus grande puissance de $p$ divisant Card $G$.

En effet, soient $l \neq p$ un nombre premier et $H = H_l$ un $l$-sous-groupe de Sylow de $G$. Puisque $l$ est premier à $p$, le $FH$-module trivial $F$ est $FH$-projectif. (La surjection $FH \to F$ admet la section $a \to \dfrac{a}{[H:1]} \sum_{s \in H} s$.) Donc $P_l = FG \otimes_{FH} F$ est $FG$-projectif. On a $\dim_F P_l = [G:H]$. Il est clair que

$$\text{p.g.c.d. } \{[G : H_l], \text{ pour } l \neq p\} = p^n,$$

la plus grande puissance de $p$ divisant Card $G$. Donc l'exposant de Coker $c$ divise $p^n$.

Soit maintenant $H$ un $p$-sous-groupe de Sylow de $G$. On a Card $H = p^n$. Si $P$ est $FG$-projectif, il est aussi $FH$-projectif par restriction, et on

voit facilement que cela implique $FH$-libre. Donc $\dim_F P$ est un multiple de $[H:1] = p^n$. (Cf. [Serre], p. 145, Exercice 3.)

L'exposant de Coker $c$ est donc exactement $p^n$.

Il reste encore à définir

$$\Psi_p : K(F\,G) \to K(F\,G)\,,$$

où $p$ = caract $(F)$

Dans le cas où $F$ est parfait, e.g. algébriquement clos, la définition est dictée par le fait que $F$ admet l'automorphisme de Frobenius $\sigma : F \to F$ tel que $\sigma(a) = a^p$. D'après la propriété (6) au § 4, $\Psi_p(\alpha) = \sigma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

On n'a donc pas le choix:

$$\Psi_p(P) = \sigma(P)\,,$$

où $\sigma(P)$ est évidemment $FG$-projectif si $P$ l'est.

Pour attraper $\Psi_p : K(FG) \to K(FG)$ pour $F$ quelconque, on peut utiliser le fait bien connu que $i_K : K(FG) \to K(LG)$ est une injection directe. (caract $(F) \neq 0$, $L$ une clôture algébrique de $F$. Cf. [Serre], p. 136.) Donc, Coker $i_K$ est sans torsion.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c_F} & R(FG) \\ \downarrow i_K & & \downarrow i_R \\ K(LG) & \xrightarrow{c_L} & R(LG) \end{array}$$

nous apprend alors que

$$c_L : \text{Coker } i_K \to \text{Coker } i_R$$

est injectif. (Compte tenu du fait démontré ci-dessus que Coker $c_F$ est fini.)

Or, pour tout $\alpha \in K(FG)$, on a

$$c_L\,\Psi_p\,i_K\,\alpha = \Psi_p\,c_L\,i_K\,\alpha = \Psi_p\,i_K\,c_F\,\alpha = i_R\,\Psi_p\,c_F\,\alpha\,.$$

Donc, $c_L\,\Psi_p\,i_K\,\alpha$ représente $0 \in \text{Coker } i_R$. Il en résulte que $\Psi_p\,i_K \in i_K\,K(FG)$ et il existe un élément $\beta \in K(FG)$, unique puisque $i_K$ est injectif, tel que $\Psi_p\,i_K\,\alpha = i_K\,\beta$. On pose $\Psi_p\,\alpha = \beta$.

La définition de $\Psi_n$ pour $n$ entier quelconque est immédiate et dictée par les propriétés $\Psi_{kn} = \Psi_k\,.\,\Psi_n$ et la périodicité ou la propriété $\Psi_{-n}(\alpha) = (\Psi_n\alpha)^*$.

*(Reçu le 5 mai 1975)*

M. Kervaire

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24