

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1976)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS  
**Autor:** Kervaire, Michel  
**Kapitel:** §4. Propriétés élémentaires des opérations d'adams.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48172>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

#### § 4. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES OPÉRATIONS D'ADAMS.

Il est clair tout d'abord que les  $\Psi_n$  sont fonctorielles, i.e. si  $f : G \rightarrow G'$  est un homomorphisme de groupes finis, et  $f^* : R(FG') \rightarrow R(FG)$  l'homomorphisme de restriction, on a

$$\Psi_n f^* = f^* \Psi_n,$$

pour tout entier  $n$ . De même pour une extension de corps  $F \rightarrow E$ , on a  $i\Psi_n = \Psi_n i$ , avec  $i : R(FG) \rightarrow R(EG)$  l'homomorphisme d'extension de scalaires.

Ceci résulte du fait que  $f^*$  et  $i$  sont des homomorphismes de  $\lambda$ -anneaux, i.e. commutent avec les opérations  $\lambda_m$ .

Par contre  $\Psi_n$  ne commute *pas* en général aux homomorphismes *induits*. Exemple: Prendre  $f : \{1\} \rightarrow C_2$ , où  $C_2$  est cyclique d'ordre 2 et calculer  $\Psi_2 f_* - f_* \Psi_2$  sur l'élément unité de  $R(FC_2)$ , où  $F$  est de caractéristique  $\neq 2$ . On trouve  $2 - [FC_2] \neq 0$ .

Nous commençons une liste des propriétés des  $\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$ , où comme ci-dessus,  $G$  est un groupe fini et  $F$  un corps commutatif.

(1) Les opérations  $\Psi_n$  sont des homomorphismes de  $\lambda$ -anneaux, i.e.

$$\Psi_n(\alpha \cdot \beta) = \Psi_n(\alpha) \cdot \Psi_n(\beta), \text{ et } \Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n.$$

(2) Pour  $m, n$  entiers quelconques, on a

$$\Psi_{m \cdot n} = \Psi_m \cdot \Psi_n = \Psi_n \cdot \Psi_m.$$

(3) Si  $\alpha$  est la classe d'un  $FG$ -module de dimension 1 sur  $F$ , on a

$$\Psi_n(\alpha) = \alpha^n, \text{ où } \alpha^{-m} = (\alpha^*)^m \text{ pour } m > 0.$$

(4) Pour tout  $p$  premier et tout  $\alpha \in R(FG)$ , on a

$$\Psi_p(\alpha) = \alpha^p \bmod p R(FG).$$

Ces propriétés sont les analogues des propriétés des opérations d'Adams en topologie. On a en outre quelques propriétés plus typiquement algébriques qui proviennent de relations entre les opérations  $\Psi_n$  et l'action des automorphismes du corps de base sur l'anneau des représentations virtuelles.

Soient  $E$  un corps commutatif et  $\sigma \in \text{Aut}(E)$  un automorphisme de  $E$ . A tout  $EG$ -module  $V$  on associe un nouveau  $EG$ -module  $\sigma V$  obtenu comme

suit. En tant que groupes abéliens  $\sigma V$  et  $V$  sont égaux. L'élément  $v \in V$  considéré comme élément de  $\sigma V$  sera noté  $\sigma v$ . L'action de  $EG$  sur  $\sigma V$  est définie par

$$a \cdot \sigma(v) = \sigma(\sigma^{-1}(a) v),$$

où

$$\sigma^{-1}(a) = \sum_{s \in G} \sigma^{-1}(a_s) s,$$

si

$$a = \sum_{s \in G} a_s s.$$

Dans cette formule,  $\sigma^{-1}(a) v$  est défini par l'action de  $EG$  sur  $V$ , et  $\sigma(\sigma^{-1}(a) v)$  est l'élément de  $\sigma V$  correspondant à  $\sigma^{-1}(a) v \in V$ .

Il est facile de voir que si  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $EG$ -modules, la suite  $0 \rightarrow \sigma V' \rightarrow \sigma V \rightarrow \sigma V'' \rightarrow 0$  est également une suite exacte de  $EG$ -modules. Il en résulte que  $\sigma$  induit un automorphisme  $\sigma : R(EG) \rightarrow R(EG)$ . C'est un automorphisme d'anneau.

On vérifie sans difficulté que  $\sigma$  commute aux homomorphismes de restriction, induits, d'extension de scalaires, à l'involution, aux puissances extérieures et opérations d'Adams.

*Exercice.* Si  $\rho(s) = (S_{ij})$  est la forme matricielle de  $V$  associée à la base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$ , alors la forme matricielle de  $\sigma V$  par rapport à  $\sigma e_1, \dots, \sigma e_n$  est donnée par  $(\sigma \rho)(s) = (\sigma S_{ij})$ .

**DÉFINITIONS.** Soient  $G$  un groupe fini et  $p$  un nombre premier. On dira que  $s \in G$  est *p-régulier* si l'ordre de  $s$  est premier à  $p$ . Par convention tout élément de  $G$  est 0-régulier.

Le p.p.c.m. des ordres des éléments  $p$ -réguliers de  $G$  sera appelé l'*exposant p-régulier* de  $G$ . L'exposant 0-régulier est donc simplement l'exposant de  $G$ .

Nous pouvons continuer la liste des propriétés des  $\Psi_n$ .

(5) Les opérations  $\Psi_n$  sont périodiques, i.e. si  $m$  est l'exposant  $p$ -régulier de  $G$ , où  $p = \text{caract}(F)$ , on a

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

pour tout entier  $n$ .

(6) Si  $F$  contient les racines du polynôme  $X^m - 1$ , où  $m$  est l'exposant  $p$ -régulier de  $G$ ,  $p = \text{caract}(F)$ , et si  $\sigma \in \text{Aut}(F)$  et  $s \in \mathbb{Z}$  sont liés par  $\sigma(\xi) = \xi^s$  pour toute racine  $\xi$  de  $X^m - 1$ , alors  $\Psi_s(\alpha) = \sigma(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in R(FG)$ .

*Remarque.* Il existe un théorème de périodicité des opérations d'Adams en topologie. (Cf. J.F. Adams, *On the groups J(X)*—III, *Topology*, Vol. 3

(1965), 193-222, en particulier le § 5.) Mais il ne semble pas y avoir de rapport entre ce théorème et la propriété (5) ci-dessus.

Enfin, en considérant l'injection de  $\mathbf{F}_q$  (le corps fini à  $q$  éléments) dans une clôture algébrique et en prenant  $\sigma =$  automorphisme de Frobenius, on obtient comme corollaire la propriété suivante:

(7) *L'opération  $\Psi_q : R(\mathbf{F}_q G) \rightarrow R(\mathbf{F}_q G)$  est l'identité.*

Toutes ces propriétés sont faciles à démontrer en tenant compte des théorèmes I et II du § 1.

Les propriétés (3) et (4) se vérifient comme en topologie.

Démonstration de (3). Si  $V$  est un  $FG$ -module de dimension 1 sur  $F$ , il s'agit de voir que  $\Psi_n(V) = V^n$ . Or, l'hypothèse entraîne que

$$\lambda_2 V = \lambda_3 V = \dots = 0.$$

Donc pour  $n$  positif, on a

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, 0, \dots, 0) = (\lambda_1 V)^n = V^n.$$

On en déduit immédiatement la propriété (3).

*Remarque.* On a donc en fait  $\Psi_n(\alpha) = \alpha^n$  dès que  $\lambda_i \alpha = 0$  pour  $i > 1$ . Cependant cette formulation n'est pas plus générale que la précédente. En effet, si  $\alpha \in R(FG)$  satisfait à  $\lambda_i \alpha = 0$  pour  $i > 1$ , alors  $\alpha$  est la classe d'un  $FG$ -module de dimension 1. Pour le voir, il suffit de remarquer que les classes de  $FG$ -modules de dimension 1 sont inversibles dans l'anneau  $R(FG)$ , i.e. si  $\dim V = 1$ , le produit  $V \otimes V^*$  est isomorphe au  $FG$ -module trivial  $F$ . (Ceci justifie la convention  $[V]^{-1} = [V^*]$  pour  $\dim V = 1$  faite précédemment.) L'isomorphisme est donné par  $v \otimes v^* \rightarrow v^*(v)$ . Si alors  $\alpha = U - V$  et  $\lambda_i \alpha = 0$  pour  $i > 1$ , on compare les termes de plus haut degré en  $t$  dans l'identité  $\lambda(\alpha) \cdot \lambda(V) = \lambda(U)$ . On trouve  $\alpha \cdot \det(V) = \det(U)$ , où  $\det(V) = \lambda_{\dim V}(V)$  est de dimension 1. Donc,  $\alpha$  est la classe dans  $R(FG)$  de  $\det(U) \cdot \{\det(V)\}^{-1} = \det(U) \cdot \det(V^*)$ .

D'une manière générale, pour que  $\alpha \in R(FG)$  soit la classe d'une représentation il est évidemment nécessaire que  $\lambda(\alpha)$  soit un polynôme. Mais cette condition n'est pas suffisante.

*Exemple.* Soient  $G = S_4$ , le groupe des permutations de  $\{1, 2, 3, 4\}$  et  $F = \mathbf{C}$ . Il existe un  $\mathbf{C}S_4$ -module simple  $V$  de dimension 3 avec la forme matricielle

$$\rho(12) = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}, \quad \rho(12)(34) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$\rho(123) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \rho(1234) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

(C'est le produit de la représentation signe par la composante simple de degré 3 dans la représentation de permutation naturelle.)

En calculant les valeurs propres, on vérifie sans difficulté que  $\lambda V = 1 + Vt + Vt^2 + t^3$ . Donc,  $\lambda(V-1) = 1 + (V-1)t + t^2$ , un polynôme. Cependant  $V-1$  est strictement virtuelle.

La propriété (4), i.e.  $\Psi_p(\alpha) = \alpha^p \bmod pR(FG)$  résulte immédiatement de l'identité  $Q_p(s_1, \dots, s_p) = s_1^p \bmod p\mathbb{Z}[s_1, \dots, s_p]$ , elle-même conséquence directe de

$$t_1^p + \dots + t_p^p = (t_1 + \dots + t_p)^p \bmod p\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_p].$$

Pour démontrer les propriétés (1) et (2), on utilise les théorèmes I et II. Puisque  $\Psi_n$  commute aux homomorphismes  $i: R(FG) \rightarrow R(EG)$  d'extension de scalaires et commute également aux homomorphismes de restrictions  $R(FG) \rightarrow R(FC)$ , il suffit de démontrer (1) et (2) dans le cas d'un groupe cyclique et avec un corps de base algébriquement clos  $E$ .

Comme d'autre part  $R(EC)$  est engendré par les classes des  $EC$ -modules simples, il est suffisant de vérifier (1) et (2) lorsque les variables sont les classes de  $EC$ -modules simples. (On observera toutefois que cette réduction pour la formule  $\Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n$  exige de savoir déjà que  $\Psi_n$  est un homomorphisme d'anneau. La démonstration de  $\Psi_n(\alpha\beta) = \Psi_n(\alpha) \cdot \Psi_n(\beta)$  doit donc précéder celle de  $\Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n$ .)

Or, on a vu au § 1 que tous les  $EC$ -modules simples sont de dimension 1 sur  $E$ . Pour un  $EC$ -module de dimension 1, la vérification de (1) et (2) par calcul direct est immédiate.

Pour démontrer (5) et (6) il est également suffisant, en vertu du théorème II, de se borner au cas d'un groupe cyclique  $C$  dont l'ordre divise l'exposant  $p$ -régulier  $m$  du groupe donné  $G$ . ( $p = \text{caract}(F)$ .) On peut aussi supposer pour démontrer (5) que le corps de base  $E$  contient les racines du polynôme  $X^m - 1$ .

Tout  $EC$ -module simple est alors de dimension 1 sur  $E$  et de la forme  $E_\chi$ , où  $\chi \in \text{Hom}(C, E^\times)$ , l'action de  $C$  sur  $E_\chi$  étant donnée par

$$s \cdot z = \chi(s) z, \quad s \in C, \quad z \in E_\chi.$$

On a donc

$$\Psi_n(E_\chi) = E(\chi^n), \quad \text{et} \quad \Psi_{n+m} E_\chi = \Psi_n E_\chi$$

résulte de  $\chi^{n+m} = \chi^n$ . (Card  $C$  divise  $m$ .) Comme les classes des  $EC$ -modules simples engendrent  $R(EC)$ , il en résulte

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(EC) \rightarrow R(EC),$$

puis (5) en général par la réduction faite ci-dessus.

Pour (6), on se sert des mêmes remarques. On a

$$\Psi_s(E_\chi) = E(\chi^s)$$

comme on vient de le voir. Il reste à vérifier que  $\sigma(E_\chi) = E(\chi^s)$ , c.-à-d. que  $C$  opère sur  $\sigma(E_\chi)$  par

$$x \cdot \sigma z = \chi^s(x) \sigma z, \quad z \in E_\chi, \quad x \in C.$$

Or,

$$x \cdot \sigma z = \sigma(\sigma^{-1}(x) \cdot z) = \sigma(x \cdot z) = \sigma(\chi(x) z) = \sigma(\chi(x)) \cdot \sigma z,$$

et

$$\sigma(\chi(x)) = \chi^s(x),$$

puisque  $\chi(x)$  est racine  $m$ -ième de l'unité.

La propriété (7) est un corollaire facile de (6). Soit  $E$  une clôture algébrique de  $\mathbf{F}_q$ , le corps à  $q$  éléments et soit  $\sigma \in \text{Aut}(E/\mathbf{F}_q)$  l'automorphisme de Frobenius, i.e.  $\sigma(a) = a^q$  pour tout  $a \in E$ . Comme  $i : R(\mathbf{F}_q G) \rightarrow R(EG)$  est injectif et commute à  $\Psi_q$ , il est suffisant de voir que  $\Psi_q i = i$ . Or, d'après (6),  $\Psi_q \beta = \sigma \beta$  pour tout  $\beta \in R(EG)$ . Si  $\beta = i\alpha$  on vérifie facilement que  $\sigma \beta = \beta$ . (C'est trivial sur la forme matricielle d'une représentation.) Donc,  $\Psi_q i\alpha = i\alpha$ , et  $\Psi_q \alpha = \alpha$  en résulte.

*Remarque.* Si  $\sigma$  appartient au sous-groupe des commutateurs de  $\text{Aut}(F)$ , son action sur  $R(FG)$  est triviale.

## § 5. ACTION DE $\Psi_n$ DANS LE GROUPE DES CLASSES DE PROJECTIFS

Il existe un analogue  $K(FG)$  de  $R(FG)$  construit à l'aide des  $FG$ -modules projectifs. Soit  $L'$  le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphie de  $FG$ -modules projectifs de dimension finie. On considère le sous-groupe  $L'_0$  de  $L'$  engendré par les éléments  $P - P' - P''$  s'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$ . (On a alors nécessairement  $P \cong P' \oplus P''$ .)