Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Autor: Kervaire, Michel

Kapitel: §3. DÉFINITION DES OPÉRATIONS D'ADAMS.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48172

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i\alpha) \,.\, (\lambda_{m-i}\,\beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha+\beta) = (\lambda\alpha) \,.\, (\lambda\beta) \,.$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $* : R(FG) \to R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction $f^* : R(FG') \to R(FG)$ pour $f : G \to G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. Définition des opérations d'Adams.

Soient $t_1, \ldots, t_N$ des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leqq n \leqq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1{}^n + t_2{}^n + \ldots + t_N{}^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires $s_1, \ldots, s_n$ de degré $\leqq n$ des indéterminées $t_1, \ldots, t_N$. Les fonctions $s_1, \ldots, s_k, \ldots$ sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + \ldots + (-1)^i s_i X^{N-i} + \ldots + (-1)^N s_N = \prod_{\nu=1}^{N} (X - t_\nu)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = \ldots = t_N = 0$ (où $N' \leqq N$), que

$$s_i(t_1, \ldots, t_{N'}, 0, \ldots, 0) = s_i(t_1, \ldots, t_{N'})$$

pour $i \leqq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1,\ Q_2(s_1, s_2) = s_1{}^2 - 2s_2\,,$$
$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1{}^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3\,,$$
$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1{}^4 - 4s_1{}^2 s_2 + 2s_2{}^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4\,,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n)$ en tant que polynôme en $s_1, \ldots, s_n$ est indépendant de N pourvu que $N \geqq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t_1', \ldots, t_N'$ et $t_1'', \ldots, t_{N''}''$ deux suites d'intéderminées et $t_1, \ldots, t_N$ leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t_i'$ pour $1 \leqq i \leqq N'$, $t_{N'+j} = t_j''$ pour $1 \leqq j \leqq N''$. Soient $s_1', \ldots, s_{N'}'$ et $s_1'', \ldots, s_{N''}''$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1', \ldots, t_{N'}'$ et $t_1'', \ldots, t_{N''}''$ respectivement. Enfin, soient $s_1, \ldots, s_N$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1, \ldots, t_N$.

LEMME 1. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} s_i' \cdot s_{n-i}'' .$$

De plus,

$$Q_n^N(s_1, \ldots, s_n) = Q_n^{N'}(s_1', \ldots, s_n') + Q_n^{N''}(s_1'', \ldots, s_n'') .$$

La première formule résulte immédiatement des identités de définition des s_i' et s_j'' en calculant leur produit et en le comparant à l'identité de définition des s_n.

La deuxième identité est une trivialité après avoir remplacé les polynômes Q_n par leur expression en fonction des t.

Il résulte tout d'abord du lemme que $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n)$ est indépendant de N pour $N \geqq n$. En effet, si l'on envoie $t_1'', \ldots, t_{N''}''$ sur 0, on obtient $s_i' = s_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$ si $n \leqq N'$, comme on l'a observé ci-dessus, et $s_j'' = 0$ pour $j > 0$. Donc, $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n) = Q_n^{N'}(s_1, \ldots, s_n)$ pourvu que $N \geqq N' \geqq n$.

On écrira Q_n pour Q_n^N avec $n \leqq N$.

On a aussi

$$Q_n - s_1 Q_{n-1} + \ldots + (-1)^i s_i Q_{n-i} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} s_{n-1} Q_1 + (-1)^n n s_n = 0$$

en remplaçant successivement X par $t_1, \ldots, t_n$ dans l'identité de définition des s_i et en sommant membre à membre. Ceci montre par récurrence sur n que $Q_n(s_1, \ldots, s_n)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On voit aussi que $Q_n(s_1, 0, \ldots, 0) = s_1^n$.

On peut alors définir l'opération d'Adams Ψ_n, $n \in \mathbf{Z}$ sur un FG-module V comme suit.

DÉFINITION. $\Psi_0 V = (\dim V) \cdot 1$,
où 1 est l'élément unité de $R(FG)$;

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, \lambda_2 V, \ldots, \lambda_n V) \text{ pour } n > 0 ,$$

le membre de droite étant regardé comme un élément de $R(FG)$;

$$\Psi_{-n} V = \Psi_n V^*, \text{ où } n > 0 .$$

Pour démontrer que ces formules déterminent une opération $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$ nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 2. *Soient* R *un anneau commutatif avec élément unité, et* $\{\lambda_i'\}$, $\{\lambda_i''\}$ *et* $\{\lambda_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$ *trois suites d'éléments de* R *telles que* $\lambda_0' = \lambda_0'' = \lambda_0 = 1$, *et*

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \cdot \lambda_{m-i}''$$

pour tout $m \geqq 0$. *Alors pour tout* $n \geqq 1$, *on a*

$$Q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Q_n(\lambda_1', \ldots, \lambda_n') + Q_n(\lambda_1'', \ldots, \lambda_n'') .$$

Ceci résulte immédiatement de l'indépendance algébrique des fonctions symétriques élémentaires. Il existe un homomorphisme

$$h : \mathbf{Z}[s_1', \ldots, s_N', s_1'', \ldots, s_{N''}''] \to R ,$$

tel que $h(s_i') = \lambda_i'$ et $h(s_j'') = \lambda_j''$. Cet homomorphisme envoie s_m sur λ_m en vertu du lemme 1 et de l'hypothèse

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \cdot \lambda_{m-i}'' .$$

Il s'ensuit que h envoie $Q_n(s_1, \ldots, s_n)$ sur $Q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et l'assertion résulte de l'identité $Q_n = Q_n' + Q_n''$ du lemme 1.

LEMME 3. *Pour tout* n *entier, l'opération* Ψ_n *sur les* FG*-modules induit un endomorphisme de groupe additif*

$$\Psi_n : R(FG) \to R(FG) .$$

En outre, pour $n > 0$, *on a*

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$$

pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, le lemme du paragraphe précédent dit que

$$\lambda_m V = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i V') \cdot (\lambda_{m-i} V'') .$$

D'après le lemme 2 ci-dessus appliqué avec

$$\lambda_m = \lambda_m V, \ \lambda_i' = \lambda_i V', \ \lambda_j'' = \lambda_j'' V'' ,$$

on a donc

$$\Psi_n V = \Psi_n V' + \Psi_n V'' ,$$

pour $n > 0$.

Il en résulte immédiatement que $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$ est bien définie et additive pour tout entier n.

La formule

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$$

pour $\alpha \in R(FG)$ quelconque est conséquence de l'additivité de Ψ_n et de celle en α de $Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$.