

8. Sums over intervals of length $h/10$.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

The congruences for $p \equiv 3 \pmod{4}$ follow from (7.6), (7.7), and (7.10).

COROLLARY 7.6. We have

$$h(-40p) \equiv 0 \pmod{8}, \text{ if } p \equiv 1, 9, 31, 39 \pmod{40}$$

and

$$h(-40p) \equiv 4 \pmod{8}, \text{ if } p \equiv 11, 19, 21, 29 \pmod{40}.$$

Proof. The congruences follow from (5.13) and Corollary 7.5.

The character sums of this section were studied in great detail from an elementary viewpoint by Osborn [50] and Glaisher [27], [28], [29]. Some of the class number formulas in this section can be traced back to Gauss [26] with the proofs given by Dedekind [21]. The formulas

$$(7.11) \quad \frac{1}{2} h(-8d) = S_{81}(\chi_d) - S_{84}(\chi_d)$$

and

$$(7.12) \quad \frac{1}{2} h(8d) = S_{82}(\chi_{-d}) + S_{83}(\chi_{-d})$$

are due to Dirichlet [23]. Proofs of (7.11) and (7.12) were also given by Lerch [44, pp. 407, 409]. Pepin [51], Hurwitz [40], Glaisher [29], Holden [39], Karpinski [42], and Rédei [57] have also derived class number formulas in terms of S_{8i} , $1 \leq i \leq 4$.

For $p \equiv 1 \pmod{8}$, Corollary 7.5 was first established by Lerch [45, p. 225]. Brown [14] has proven Corollary 7.5 and all the congruences of Corollary 7.4 involving a single class number. He has also pointed out (personal communication) that the remaining congruences of Corollary 7.4 may be deduced from his work [14] and a paper of Hasse [35]. The latter author [32] has also proved Corollary 7.5 for $p \equiv 7 \pmod{8}$. As indicated in the Introduction, Corollaries 7.4 and 7.5 have also been proven by Pizer [52]. The special case of Corollary 7.5 when $p \equiv 19 \pmod{24}$ was brought into prominence by Stark [59]. See also [13].

8. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/10$.

As with intervals of length $k/5$, we are able to establish theorems about positive sums for odd χ only.

THEOREM 8.1. Let χ be odd and put $\chi_{5k}(n) = \left(\frac{n}{5}\right) \chi(n)$. Then

$$S_{10,1} = \frac{G(\chi)}{4\pi i} \{ [4 + \{1 - \bar{\chi}(2)\} \{\bar{\chi}(5) - 1\}] L(1, \bar{\chi}) \\ - 5^{1/2} [1 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{5k}) \},$$

$$S_{10,2} = \frac{G(\chi)}{4\pi i} \{ [2 - \bar{\chi}(2)] [1 - \bar{\chi}(5)] L(1, \bar{\chi}) \\ + 5^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{5k}) \},$$

$$S_{10,3} = \frac{G(\chi)}{4\pi i} \{ [2 - \bar{\chi}(2)] [\bar{\chi}(5) - 1] L(1, \bar{\chi}) \\ + 5^{1/2} [2 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{5k}) \},$$

$$S_{10,4} = \frac{G(\chi)}{4\pi i} \{ [2 - \bar{\chi}(2)] [1 - \bar{\chi}(5)] L(1, \bar{\chi}) \\ - 5^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{5k}) \},$$

and

$$S_{10,5} = \frac{G(\chi)}{4\pi i} \{ [3 - 4\bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(5)] L(1, \bar{\chi}) \\ - 5^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{5k}) \}.$$

COROLLARY 8.2. If $d < 0$, we have

$$S_{10,1} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1 \text{ and } \chi(5) \neq -1;$$

$$S_{10,1} = 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1 \text{ and } \chi(5) = -1;$$

$$S_{10,2} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1, \text{ or if } \chi(2) = 0 \text{ and } \chi(5) \neq 1;$$

$$S_{10,2} = 0, \quad \text{if } \chi(2) = 0 \text{ and } \chi(5) = 1;$$

$$S_{10,2} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1 \text{ and } \chi(5) = 1;$$

$$S_{10,3} > 0, \quad \text{if } \chi(5) = 1;$$

$$S_{10,4} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1, \text{ or if } \chi(2) = 0 \text{ and } \chi(5) \neq 1;$$

$$S_{10,4} = 0, \quad \text{if } \chi(2) = 0 \text{ and } \chi(5) = 1;$$

$$S_{10,4} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = \chi(5) = 1;$$

and

$$S_{10,5} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1.$$

We shall refrain from writing down any of the class number formulas arising from Theorem 8.1, since no further congruences for class numbers may be deduced. The sums $S_{10,i}$, $1 \leq i \leq 5$, appear to have been previously discussed only by Karpinski [42] and by Rédei [57] in connection with class numbers.