Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: §5. DIVISIBILITÉ DES COEFFICIENTS DE j
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48187

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On trouvera dans Lang-Trotter [9] une étude numérique du cas $k = 2$, ainsi qu'une conjecture plus précise que (4.11_2 ?), à savoir:

$$(4.11_2\,??) \qquad N\{p \leqslant x : a_p = 0\} \sim cx^{1/2}/\log x \qquad (\text{si } k = 2),$$

avec une valeur explicite de c.

(4.12) On peut se demander si (4.2 i) et (4.7 i) restent valables lorsque $f = \sum a_n q^n$ est une forme modulaire sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ qui *n'est pas un sous-groupe de congruence* (il est alors raisonnable de supposer, non plus que les a_n sont entiers, mais que ce sont des « S-entiers »). On manque d'exemples.

(4.13) Il est probable que l'on ne peut pas étendre (4.7 i) aux formes *de poids demi-entier*, du moins en dehors des deux cas suivants

(a) $O_F/\mathfrak{m}$ est de caractéristique 2: en effet, on se ramène alors au cas d'un poids entier en multipliant f par la série

$$\theta = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

qui est congrue à 1 (mod 2);

(b) la forme $f = \sum a_n q^n$ est de poids 1/2: on peut alors montrer qu'il existe des entiers $t_1, \ldots, t_r$ tels que $a_n = 0$ si n n'est pas produit de l'un des t_i par un carré; cela entraîne

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = O(x^{1/2}).$$

Il serait par exemple intéressant de voir ce qui se passe pour la forme modulaire $\theta^3 = \sum r_3(n) q^n$: comment se répartissent les $r_3(n)$ modulo 3, 5, etc ?

§ 5. DIVISIBILITÉ DES COEFFICIENTS DE j

5.1. Rappelons que l'invariant modulaire j est défini par $j = Q^3/\Delta$, où $Q = E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$, $\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$. On a

$$j = q^{-1} + 744 + 196884\, q + \ldots = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n.$$

Les résultats du § 4 ne s'appliquent pas directement à j, car j a un pôle simple à l'infini, et n'est donc pas une « forme » modulaire. J'ignore d'ailleurs si les $c(n)$ sont presque toujours divisibles par tout entier donné; c'est peu probable. On peut toutefois obtenir des renseignements sur certains des $c(n)$ grâce au résultat suivant:

THÉORÈME 5.2. *Soit l un nombre premier. Alors :*

(a) *Les séries*

$$j' = \sum c(ln)\, q^n \quad \text{et} \quad j'' = \sum_{n \equiv 0 \pmod{l}} c(n)\, q^n$$

sont des formes modulaires l-adiques de poids 0, *au sens de* [21], § 1.

(b) *Si $l \neq 2$, il en est de même de la série*

$$j_- = \sum_{\left(\frac{-n}{l}\right) = -1} c(n)\, q^n .$$

(c) *Si $l = 2$, il en est de même des trois séries*

$$j_i = \sum_{n \equiv i \pmod{8}} c(n)\, q^n \quad (i = 1, 3, 5) .$$

[Dans (b), la sommation porte sur les n premiers à l qui sont résidus quadratiques (mod l) si $l \equiv -1 \pmod 4$, et non résidus si $l \equiv 1 \pmod 4$. Dans les deux cas, cela exclut $n = -1$. Si $l = 2$, la même remarque s'applique aux j_i, pour $i = 1, 3, 5$.]

Si f est une forme modulaire l-adique, et r un entier > 0, il existe une forme modulaire au sens usuel, à coefficients entiers, qui est congrue à f modulo l^r. En appliquant (4.7 i) à cette forme, on obtient:

COROLLAIRE 5.3. *Pour tout l premier $\neq 2$, et tout r, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$N\left\{x \leqslant n : c(n) \not\equiv 0 \pmod{l^r} \text{ et } \left(\frac{n}{l}\right) \neq \left(\frac{-1}{l}\right)\right\} = O(x/\log^\alpha x) .$$

On trouvera d'autres applications de (5.2) dans les exercices du § 6.

Démonstration de (5.2).

(a) Le fait que $j' = j \mid U$ soit modulaire l-adique de poids 0 est dû à Deligne, cf. par exemple [21], p. 228. Comme $j'' = j' \mid V$, il en est de même de j'' ([21], th. 4, p. 209).

(b) Soit $n \mapsto \varepsilon(n) = \left(\frac{n}{l}\right)$ le caractère de Legendre, et notons j_ε la série déduite de j par « torsion » au moyen de ε, i.e.

$$j_\varepsilon = \sum_{n=-1}^{\infty} \varepsilon(n)\, c(n)\, q^n .$$

On a

$$2j_- = j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon - j'',$$

et il suffit donc de montrer que $g = j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon$ est modulaire l-adique de poids 0. Cela peut se faire de la manière suivante (pour une autre méthode, voir exerc. 6.15): tout d'abord, un argument standard, basé sur le fait que $\varepsilon^2 = 1$, montre que j_ε est une fonction modulaire de poids 0 sur le groupe $\Gamma_0(l^2)$, holomorphe en dehors des pointes. Il est donc de même de g; de plus, le développement en série de g montre que *g n'a pas de pôle à la pointe* ∞. Le fait que g soit modulaire l-adique résulte alors du théorème général suivant:

THÉORÈME 5.4. *Soit* $g = \sum a_n q^n$ *une fonction modulaire de poids* k *sur* $\Gamma_0(l^m)$, *à coefficients* $a_n \in \mathbf{Q}$. *On suppose que* g *est holomorphe dans le demi-plan* $\mathscr{I}(z) > 0$, *ainsi qu'à la pointe* ∞ (i.e. $a_n = 0$ si $n < 0$). *Alors* g *est une forme modulaire* l*-adique de poids* k *sur* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Commençons par le cas particulier où g est une *forme* modulaire de poids $k \geqslant 4$, et où les coefficients a_n sont *l-entiers*. On raisonne alors par récurrence sur m. Le cas $m = 1$ est traité dans [21], n° 3.2. Si $m \geqslant 2$, définissons des formes modulaires f_i, g_i de poids kl^i ($i \geqslant 0$) au moyen des formules de récurrence:

$$f_0 = 0\,,\quad g_0 = g\,,\quad f_i = (g_{i-1})^l \mid U\,,\quad g_i = \frac{1}{l}\,(E_{kli-1(l-1)}\, g_{i-1} - f_i)\ (i \geqslant 1).$$

(Rappelons que E_r désigne la série d'Eisenstein de poids r normalisée de telle sorte que son terme constant soit 1; on a $E_r \equiv 1 \pmod{l^{a+1}}$ si r est divisible par $l^a(l-1)$.)

On vérifie tout de suite que les coefficients des f_i et g_i sont l-entiers. De plus, les f_i sont des formes modulaires sur $\Gamma_0(l^{m-1})$, car il est bien connu que si $m \geqslant 2$, l'opérateur U fait passer de $\Gamma_0(l^m)$ à $\Gamma_0(l^{m-1})$. Vu l'hypothèse de récurrence, les f_i sont donc *des formes modulaires l-adiques de poids kl^i*.

Pour tout $i \geqslant 0$, posons

$$A_i = \prod_{a=i}^{\infty} E_{kl^a(l-1)}\,,$$

le produit infini ayant un sens du fait que $E_{kl^a(l-1)}$ est congru à 1 (mod l^{a+1}). La série A_i est une forme modulaire l-adique de poids

$$\sum_{a=i}^{\infty} kl^a(l-1) = (0, -kl^i) \quad \text{dans} \quad \mathbf{Z}/(l-1)\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_l\,.$$

On vérifie sans peine l'identité

$$A_0 g = A_1 f_1 + l A_2 f_2 + \ldots + l^{i-1} A_i f_i + \ldots$$

Les séries $A_i f_i$ sont modulaires l-adiques de poids

$$(0\,,\ -kl^i) + (kl^i\,,\ kl^i) = (kl^i\,,\ 0) = (k\,,\ 0)\,.$$

Il en résulte que $A_0\, g$ est modulaire l-adique de poids $(k, 0)$. Mais le fait que $A_0 \equiv 1 \pmod{l}$ entraîne que $A_0^{-1} = \lim_{s\to\infty} A_0^{l^s-1}$ est modulaire l-adique de poids $(0, k)$. Comme $g = A_0^{-1}(A_0 g)$, on voit bien que g est modulaire l-adique de poids $(k, k) = k$, ce qui démontre (5.4) dans le cas particulier considéré.

Passons au cas général. Si N est assez grand, la fonction $g' = \Delta^N g$ est holomorphe en toutes les pointes, et son poids $k' = k + 12N$ est $\geqslant 4$. C'est donc une forme modulaire, et ses coefficients a'_n ont des dénominateurs bornés (cf. [5], prop. 2.7 ou bien [25], Th. 3.52). Quitte à la multiplier par une puissance de l, on peut donc s'arranger pour que ses coefficients soient l-entiers. D'après ce que l'on vient de voir, c'est donc une forme modulaire l-adique de poids $k + 12N$ sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. De plus, ses coefficients a'_n sont nuls pour $n < N$. Le fait que $g = g'/\Delta^N$ soit modulaire l-adique résulte alors du lemme élémentaire suivant (appliqué N fois):

LEMME 5.5. *Soit* $G = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ *une forme modulaire* l*-adique de poids* K. *Si* $c_0 = 0$, *la série* $H = G/\Delta$ *est une forme modulaire* l*-adique de poids* $K - 12$.

Par hypothèse, G est limite de formes modulaires usuelles G_i, de poids K_i tendant vers K (au sens de [21], § 1). Les termes constants $c_{0,i}$ des G_i tendent vers 0. Choisissons, pour chaque i, un monôme M_i en les séries d'Eisenstein $Q = E_4$ et $R = E_6$ qui soit de poids K_i. On peut alors écrire G_i sous la forme

$$G_i = c_{0,i} M_i + \Delta\, H_i\,,$$

où H_i est une forme modulaire de poids $K_i - 12$. On a

$$\lim . \Delta\, H_i = G = \Delta\, H\,, \quad \text{d'où} \quad \lim . H_i = H\,,$$

ce qui montre bien que H est modulaire l-adique de poids $K - 12$.

(c) Si $l = 2$, notons $\varepsilon, \varphi, \psi$ les trois caractères d'ordre 2 de $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*$, et soient $j_\varepsilon, j_\varphi, j_\psi$ les séries déduites de j par torsion au moyen de ε, φ, ψ. On a

$$4j_i = j - j'' + \varepsilon(i) j_\varepsilon + \varphi(i) j_\varphi + \psi(i) j_\psi\,.$$

Le même argument que dans (b) montre que les j_i sont des fonctions modulaires sur $\Gamma_0(2^6)$, puis, en appliquant (5.4), que ce sont des formes modulaires 2-adiques de poids 0 sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Remarques.

(a) On peut aussi déduire (5.4) et (5.5) de la définition « géométrique » des formes modulaires l-adiques adoptée par Katz dans son exposé à Anvers (*Lect. Notes* 350, p. 69-190).

(b) Le théorème (5.2) « explique » que l'on ait des congruences sur $c(n) \pmod{l}$ lorsque n est, soit divisible par l, soit tel que $\left(\frac{n}{l}\right) = -\left(\frac{-1}{l}\right)$, cf. Kolberg [7], ainsi que les exercices du § 6.

(c) Lorsque $l = 2$, on a $j_1 \equiv j_3 \equiv j_5 \equiv j' \equiv j'' \equiv 0 \pmod 2$, de sorte que

$$j \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c(8n-1)\, q^{8n-1} \pmod 2,$$

et le théorème (5.2) ne fournit aucun renseignement sur ces coefficients (mod 2). Il serait intéressant de voir s'ils sont répartis « au hasard », comme cela semble le cas pour la fonction de partition, cf. [13].

§ 6. EXERCICES

Formes modulaires de poids 1.

(6.1) Les hypothèses étant celles de (4.2 ii), montrer que $\alpha \leqslant 3/4$, et qu'il y a égalité si et seulement si l'image de $\mathrm{Gal}(K_f/\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})/\mathbf{C}^*$ est isomorphe au groupe diédral $\mathbf{D}_2$ d'ordre 4 (cf. exemple (4.4)).

(6.2) On suppose que f est de type $(1, \varepsilon)$ sur $\Gamma_0(N)$ (mais pas nécessairement que c'est une fonction propre des opérateurs de Hecke). Montrer que, si

$$(*) \qquad N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = o(x/\log^{3/4} x),$$

on a $f = 0$. (Observer que l'espace des f satisfaisant à (*) est stable par les opérateurs de Hecke; s'il n'est pas nul, il contient un vecteur propre; conclure en appliquant (6.1).)