Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: §2. THÉORÈMES DE DENSITÉ

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48187

Gal (K/E), où E est un sous-corps de K. On peut alors appliquer à $\log L(s,\chi)$ les méthodes classiques de Hadamard et de La Vallée Poussin, cf. par exemple [10], p. 336-337. [En fait, [10] se borne à prouver l'existence d'une région (1.8) où $L = L(s, \chi)$ est holomorphe $\neq 0$, et où $|L'/L| = O(\log^A T)$. Pour passer de là à la majoration

$$|\log L(s, \chi)| = O(\operatorname{loglog} T),$$

on distingue deux cas, suivant que $\mathscr{R}(s)$ est ou non $\geqslant 1 + 1/\log^A T$. Dans le premier cas, on a:

$$\begin{aligned} |\log L(s, \chi)| &\leqslant [E:Q] \log \zeta(\mathscr{R}(s)) \leqslant [E:Q] A \operatorname{loglog} T + O(1) \\ &= O(\operatorname{loglog} T). \end{aligned}$$

Le deuxième cas se ramène au premier: on applique le théorème des accroissements finis au segment horizontal I_s joignant s au point s_0 tel que

$$\mathscr{I}(s_0) = \mathscr{I}(s), \quad \mathscr{R}(s_0) = 1 + 1/\log^A T,$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} |\log L(s, \chi)| &\leqslant |\log L(s_0, \chi)| + |s - s_0| \sup_{\sigma \in I_s} |L'/L(\sigma, \chi)| \\ &= O(\operatorname{loglog} T) + O(1) = O(\operatorname{loglog} T).] \end{aligned}$$

§2. THÉORÈMES DE DENSITÉ

2.1. *Définitions.* Soit E une partie de l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers > 0; on note E' le complémentaire $\mathbf{N}^* - E$ de E. Si $x \in \mathbf{N}^*$, on note $E(x)$ le nombre des $n \leqslant x$ qui appartiennent à E; on a $E(x) + E'(x) = x$. Lorsque E est l'ensemble des n satisfaisant à une relation R, on écrit aussi

$$N\{n \leqslant x : R(n)\}$$

à la place de $E(x)$.

On dit que E est de *densité* c si $\lim_{x \to \infty} E(x)/x = c$, autrement dit si

$$E(x) = cx + o(x) \quad \text{pour} \quad x \to \infty.$$

Soit P un ensemble de nombres premiers. Nous dirons que P est *associé* à E si, pour tout $p \in P$ et tout entier $m \geqslant 1$ non divisible par p, on a $pm \in E$.

THÉORÈME 2.2. *Si P est associé à E, et si P jouit de la propriété* (1.1), *à savoir* $\sum_{p \in P} 1/p = +\infty$, *alors E est de densité* 1.

Soit I une partie finie de P, et soit E_I l'ensemble des entiers de la forme pm, avec $p \in I$ et $m \geqslant 1$ non divisible par p. Le complémentaire E_I' de E_I est l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que

$$n \not\equiv p\,,\ 2p\,,\ 3p\,,\ \ldots\,,\ (p-1)\,p \pmod{p^2} \quad \text{pour tout } p \in I\,.$$

Sa densité est $c_I' = \prod_{p \in I} (1 - (p-1)/p^2)$. Mais, vu (1.1), le produit infini $\prod_{p \in P} (1 - (p-1)/p^2)$ diverge, i. e. tend vers 0. Les c_I' tendent donc vers 0, et comme E' est contenu dans tous les E_I', on a

$$\lim\ \sup\ E'(x)/x \leqslant \lim\ c_I' = 0\,,$$

d'où le fait que E' est de densité 0.

Le cas régulier. D'après (2.2), on a $E'(x) = o(x)$ pour $x \to \infty$. Nous allons voir que l'on peut préciser ce résultat, à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur P. Tout d'abord:

THÉORÈME 2.3. *Supposons que P soit associé à E, et soit régulier de densité $\alpha > 0$. On a alors:*

(a) $E'(x) = O(x/\log^\alpha x)$ *si* $\alpha < 1$;

(b) $E'(x) = O(x^{1-\delta})$, *avec* $\delta > 0$, *si* $\alpha = 1$.

Disons d'autre part que E est *multiplicatif* s'il possède la propriété:

(M) *Si n_1 et n_2 sont des entiers $\geqslant 1$ premiers entre eux, on a*

$$n_1 n_2 \in E \Leftrightarrow \{n_1 \in E \quad \text{ou} \quad n_2 \in E\}\,.$$

THÉORÈME 2.4. *Supposons E multiplicatif, et soit P l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Alors:*

(a) *Si P est régulier de densité α, avec $0 < \alpha < 1$, on a*

$$E'(x) \sim cx/\log^\alpha x\,, \quad \textit{avec} \quad c > 0\,.$$

(b) *Si P est régulier de densité* 1, *on a*

$$E'(x) = O(x^{1-\delta})\,, \quad \textit{avec} \quad \delta > 0\,.$$

(Noter qu'il résulte de (M) que P est associé à E.)

Démonstration de (2.4) (d'après Raikov, Wintner, Delange). — Posons $b_n = 0$ si $n \in E$, et $b_n = 1$ si $n \in E'$, de sorte que:

$$E'(x) = \sum_{n \leqq x} b_n\,;$$

la condition (M) signifie que b_n est une fonction *multiplicative* de n. On a $b_1 = 1$ (mis à part le cas trivial où $E' = \varnothing$). Considérons la série de Dirichlet

$$f(s) = \sum b_n n^{-s} = \sum_{n \in E'} n^{-s},$$

qui converge absolument pour $\mathscr{R}(s) > 1$. On a

$$f(s) = \prod_p f_p(s), \quad \text{où} \quad f_p(s) = \sum_{p^m \in E'} p^{-ms}.$$

La série $f_p(s)$ commence par le terme $1 + p^{-s}$ si et seulement si p n'appartient pas à P. On peut donc écrire f sous la forme

$$f(s) = \prod_{p \notin P} (1 + p^{-s}) \prod_p h_p(s),$$

où le produit des h_p est absolument convergent pour $\mathscr{R}(s) > 1/2$. On a donc

$$\log f(s) = \sum_{p \notin P} p^{-s} + \theta_1(s), \tag{2.5}$$

où $\theta_1(s)$ est holomorphe et bornée dans tout demi-plan $\mathscr{R}(s) \geqslant c$, avec $c > 1/2$. Plaçons-nous dans le cas (a), i. e. supposons P régulier de densité α, avec $0 < \alpha < 1$; le complémentaire de P est régulier de densité $1 - \alpha$; vu (1.3), et la formule ci-dessus, on a

$$\log f(s) = (1 - \alpha) \log 1/(s-1) + \theta_2(s),$$

où $\theta_2(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. Revenant à f, on obtient

$$f(s) = \frac{1}{(s-1)^{1-\alpha}} h(s), \tag{2.6}$$

où $h(s) = \exp \theta_2(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. D'après une variante du théorème taubérien de Ikehara (cf. [2], [3], [14], [15], [29]), ceci entraîne

$$\sum_{n \leq x} b_n \sim cx/\log^\alpha x, \quad \text{avec} \quad c = h(1)/\Gamma(1-\alpha), \tag{2.7}$$

d'où (2.4) dans le cas $\alpha < 1$. Si d'autre part $\alpha = 1$, le même argument montre que $f(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$; comme c'est une série à coefficients positifs, il en résulte, d'après un lemme classique de Landau, qu'elle converge en un point $s = 1 - \delta$, avec $\delta > 0$; on en déduit aussitôt la majoration cherchée:

$$\sum_{n \leq x} b_n = O(x^{1-\delta}).$$

Démonstration de (2.3). Soit $E(P)$ l'ensemble des entiers de la forme pm, avec $p \in P$ et $m \geqslant 1$ premier à p. On a $E(P) \subset E$, d'où $E'(x) \leqslant E(P)'(x)$. D'autre part, $E(P)$ est multiplicatif, et son intersection avec l'ensemble des nombres premiers est P. En appliquant (2.4) à $E(P)$, on obtient

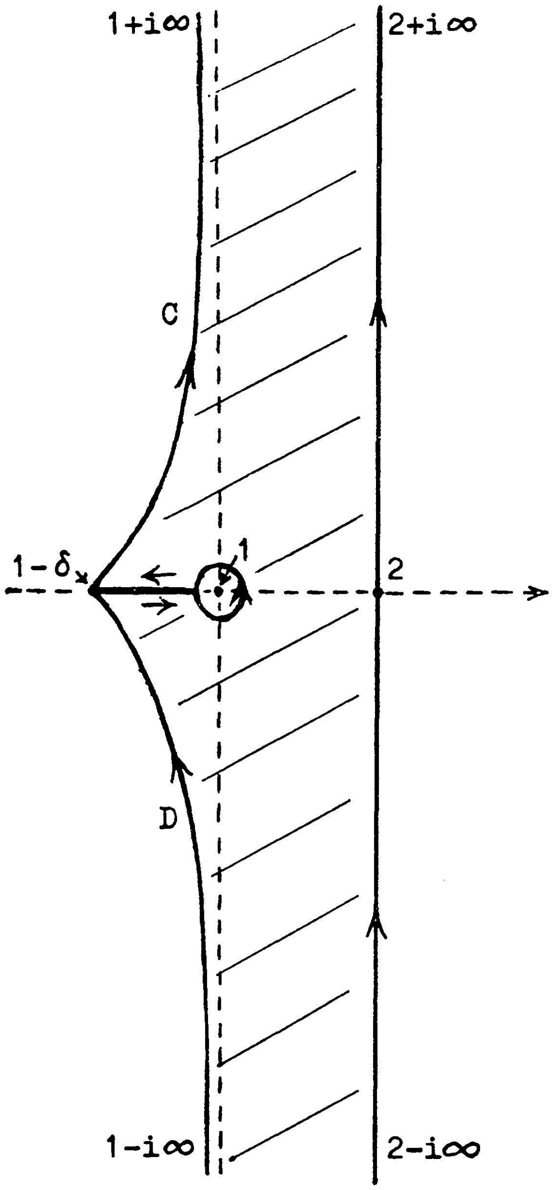
$$E(P)'(x) = O(x/\log^\alpha x) \qquad \text{dans le cas (a),}$$
$$E(P)'(x) = O(x^{1-\delta}), \text{ avec } \delta > 0, \qquad \text{dans le cas (b),}$$

d'où (2.3) puisque $E'(x) \leqslant E(P)'(x)$.

Le cas frobénien. Revenons aux hypothèses de (2.4 a); on a

$$E'(x) = cx/\log^\alpha x + o(x/\log^\alpha x)\,, \qquad \text{avec } c > 0\,.$$

Si P est *frobénien*, on peut remplacer le terme d'erreur $o(x/\log^\alpha x)$ par $O(x/\log^{1+\alpha} x)$, et même donner un *développement asymptotique* de $E'(x)$:



THÉORÈME 2.8. *Supposons que E soit multiplicatif, et que l'ensemble P des nombres premiers appartenant à E soit frobénien de densité α, avec $0 < \alpha < 1$. Il existe alors des nombres*

$$c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots, \quad \textit{avec} \quad c_0 > 0\,,$$

tels que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on ait

$$E'(x) = \frac{x}{\log^\alpha x}\left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right).$$

La démonstration utilise une méthode due à Landau [8]; je me bornerai à la résumer, renvoyant à [8] ou [28] pour plus de détails:

Soit $f(s) = \sum b_n n^{-s} = \sum_{n \in E'} n^{-s}$, comme ci-dessus. On montre au moyen de (2.5) et (1.7) que f se prolonge en une fonction holomorphe dans une région du type ci-contre (les branches infinies C et D étant définies par

$\mathscr{R}(s) = 1 - b/\log^A T$, avec $T = 2 + |\mathscr{I}(s)|$), et que l'on a dans cette région

$$|f(s)| = O(\log^A T) \quad \text{pour} \quad T \to \infty .$$

Posons alors

$$b(x) = \sum_{n \leq x} b_n \log(x/n) .$$

On vérifie que

$$b(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s)\, x^s ds/s^2 .$$

La formule de Cauchy montre que cette intégrale est égale à l'intégrale analogue prise sur le bord gauche de la région considérée. Les contributions des branches infinies C et D sont négligeables devant $x/\log^N x$, quel que soit N; celle du cercle centré en 1 tend vers 0 avec le rayon du cercle. Le terme principal est donc fourni par les deux intégrales sur le segment horizontal joignant $1 - \delta$ à 1; ces dernières s'évaluent sans difficulté, à partir du développement de $f(s)$ au voisinage de $s = 1$. On trouve que:

$$b(x) = \frac{x}{\log^\alpha x} \left(d_0 + d_1/\log x + \ldots + d_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right) .$$

En appliquant ce résultat à $x + \delta x$, avec $\delta \sim 1/\log^{K+1} x$, et en retranchant, on obtient facilement l'estimation cherchée pour $E'(x) = \sum_{n \leq x} b_n$ (cf. [17], p. 277, ou [28], p. 723-724).

De façon plus précise, si le développement de $f(s)/s$ au voisinage de $s = 1$ est:

$$f(s)/s = \frac{1}{(s-1)^{1-\alpha}} \left(e_0 + e_1 (s-1) + \ldots + e_k (s-1)^k + \ldots\right) ,$$

on trouve pour $E'(x)$ le développement asymptotique

$$E'(x) = \frac{x}{\log^\alpha x} \left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right),$$

avec

$$c_k = e_k/\Gamma(1-k-\alpha) . \tag{2.9}$$

Remarques.

(1) En utilisant (1.6) on peut ramener le calcul des e_i et des c_i à celui, d'une part de séries absolument convergentes (donc évaluables numériquement), et d'autre part de *valeurs des dérivées des* $L(s, \chi)$ *au point* $s = 1$; pour un exemple de tel calcul, voir [24].

(2) La méthode de Landau suivie ci-dessus a l'avantage, non seulement de donner un développement asymptotique, mais encore de fournir un terme d'erreur que l'on peut *effectivement* majorer, pourvu bien sûr que l'on dispose de majorations effectives de $f(s)$, ce qui est le plus souvent faisable (mais rarement fait...). On ne peut rien déduire de tel des théorèmes taubériens à la Ikehara, du moins sous leur forme actuelle.

(3) A la place de l'intégrale de $f(s)\,x^s/s^2$, on pourrait songer à utiliser celle de $f(s)\,x^s/s$, qui conduit directement à $\sum_{n \leq x} b_n$. Malheureusement, il ne semble pas facile de majorer cette dernière intégrale sur les branches infinies C et D.

Voici maintenant une variante du théorème (2.8), dans le cas où l'ensemble P est frobénien de densité 1, i. e. de complémentaire fini:

THÉORÈME 2.10. *Supposons que E soit multiplicatif, et contienne tous les nombres premiers, à l'exception d'un nombre fini. Alors :*

(a) *On a* $E'(x) = O(x^{1\ 2})$.

(b) *Si l'ensemble des nombres premiers p tels que $p^2 \in E'$ est régulier de densité $\delta > 0$, on a*

$$E'(x) \sim cx^{1/2}/\log^{1-\delta} x\,, \qquad \textit{avec} \quad c > 0\,.$$

L'assertion (a) est facile, et peut d'ailleurs se ramener à (b). Plaçons-nous donc dans le cas (b), et posons ici encore

$$f(s) = \sum_{n \in E'} n^{-s} = \sum b_n n^{-s}\,.$$

Les hypothèses faites sur E entraînent que

$$\log f(s) = \sum_{p^2 \in E'} p^{-2s} + \theta_1(s) = \delta \log 1/(2s-1) + \theta_2(s)\,,$$

où les $\theta_i(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1/2$. Il en résulte que

$$f(s/2) = \frac{1}{(s-1)^\delta}\, h(s)\,,$$

où $h(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. En appliquant à $f(s/2)$ les théorèmes taubériens cités plus haut (cf. [2], [14], [29]), on en déduit

$$\sum_{\sqrt{n} < x} b_n \sim c_1 x/\log^{1-\delta} x\,, \quad \text{avec } c_1 = h(1)/\Gamma(\delta)\,;$$

en remplaçant x par $x^{1/2}$, on obtient le résultat cherché:

$$E'(x) \sim cx^{1/2}/\log^{1-\delta} x\,, \qquad \text{avec } c = 2^{1-\delta} c_1\,.$$

Remarque. Dans le cas (b), si l'ensemble des p tels que $p^2 \in E'$ est *frobénien*, on peut utiliser la méthode de Landau pour obtenir un développement asymptotique de $E'(x)$.

Exemple. Prenons pour E l'ensemble des entiers de la forme pm, avec p premier, et $(p, m) = 1$; l'ensemble E' est formé des entiers $n \geqslant 1$ tels que $p \mid n \Rightarrow p^2 \mid n$ pour tout p premier; les hypothèses de (2.10 b) sont vérifiées avec $\delta = 1$. On a

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p (1 + p^{-2s} + p^{-3s} + p^{-4s} + \ldots) = \prod_p \frac{1 - p^{-s} + p^{-2s}}{1 - p^{-s}} \\ &= \prod_p \frac{1 + p^{-3s}}{1 - p^{-2s}} = \prod_p \frac{1 - p^{-6s}}{(1 - p^{-2s})(1 - p^{-3s})} \\ &= \zeta(2s)\zeta(3s)/\zeta(6s)\,. \end{aligned}$$

D'après (2.10 b), on a $E'(x) \sim cx^{1/2}$, avec $c = \zeta(3/2)/\zeta(3)$. On connaît en fait des résultats bien plus précis, par exemple celui-ci (Bateman-Grosswald, *Illinois J. Math.*, 2, 1958):

$$E'(x) = cx^{1/2} + dx^{1/3} + O\left(x^{1/6} \exp(-A \log^B x)\right), \qquad \text{avec } A, B > 0\,.$$

§ 3. PREMIERS EXEMPLES

3.1. *Sommes de deux carrés*. C'est l'exemple traité initialement par Landau [8] (voir aussi [6], [24], [26]):

On prend pour E' l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ qui sont de la forme $a^2 + b^2$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$ (ou $a, b \in \mathbf{Q}$, cela revient au même); on a ainsi:

$$E'(x) = N\{n \leqslant x : \ n = \boxed{2}\}\,.$$

Soit P l'ensemble des nombres premiers p tels que $p \equiv -1 \pmod 4$. On sait qu'un entier n appartient à E' si et seulement si, pour tout $p \in P$, l'exposant $v_p(n)$ de p dans n est pair. Il en résulte que le complémentaire E de E' est multiplicatif (au sens du § 2), et que P est l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Comme P est frobénien de densité 1/2, le théorème (2.8) montre l'existence de constantes c_0, c_1, ... telles que

$$E'(x) = \frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right)$$

pour tout $k > 0$. On trouvera dans Shanks [24] (rectifiant Ramanujan [6]