

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1976)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS  
**Autor:** Kervaire, Michel  
**Kapitel:** §1. L'anneau des représentations virtuelles.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48172>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Les opérations d'Adams ont été introduites dans le contexte des schémas par R. Swan. (*Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, vol. XXI, Univ. of Wisconsin (1971), 155-159.)

Enfin, les opérations d'Adams proprement dites ont été introduites en topologie par J.F. Adams. (*Ann. of Math.* 75 (1962), 603-632.)

## § 1. L'ANNEAU DES REPRÉSENTATIONS VIRTUELLES.

Soient  $G$  un groupe (multiplicatif) et  $F$  un corps commutatif. On notera  $FG$  l'algèbre de groupe de  $G$  sur  $F$ , i.e. l'espace vectoriel ayant pour base les éléments de  $G$  muni de la multiplication induite par la multiplication dans  $G$ .

Une représentation de  $G$  sur  $F$  est une classe d'isomorphie de  $FG$ -modules (à gauche) de dimension finie sur  $F$ . Si  $V$  est un  $FG$ -module (de dimension finie), on dira par abus de langage que  $V$  est une représentation.

Soient  $V$  un  $FG$ -module et  $e_1, \dots, e_n$  une  $F$ -base de  $V$ . L'action d'un élément  $s \in G$  sur  $V$  exprimée dans cette base, i.e.

$$s \cdot e_j = \sum_{i=1}^n S_{ij} e_i$$

fournit un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow GL_n(F)$  qui associe à  $s$  la matrice inversible  $\rho(s) = (S_{ij})$ . L'homomorphisme  $\rho$  est appelé la forme matricielle de la représentation  $V$  associée à la base choisie.

Soient  $G$  un groupe (fini) et  $F$  un corps commutatif. A ces données on associe l'anneau  $R(FG)$  des  $F$ -représentations virtuelles de  $G$  dont nous rappelons brièvement la construction.

Soit  $L$  la groupe abélien libre ayant pour  $\mathbf{Z}$ -base l'ensemble des représentations de  $G$  sur  $F$ . Soit  $L_0$  le sous-groupe de  $L$  engendré par les éléments de la forme  $V - V' - V''$  chaque fois qu'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$  de  $FG$ -modules.

**DÉFINITION.**  $R(FG) = L/L_0$ . Un élément de  $R(FG)$  s'appelle une  $F$ -représentation virtuelle de  $G$ .

La classe de  $V$  dans  $R(FG)$  sera notée  $[V]$ , ou même quelquefois simplement  $V$ .

*Remarques.* On voit facilement que tout élément de  $R(FG)$  peut s'écrire sous la forme  $[U] - [V]$ , où  $U$  et  $V$  sont des représentations de  $G$  sur  $F$ . Rappelons que si la caractéristique de  $F$  ne divise pas l'ordre de

$G$ , l'existence d'une suite exacte  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$  entraîne que  $V \cong V' \oplus V''$ . Ceci n'est plus vrai si  $\text{caract}(F)$  divise l'ordre de  $G$  et il est important pour la suite de ne pas faire d'hypothèse inutilement restrictive sur le corps  $F$ .

La structure d'anneau sur  $R(FG)$  est fournie par le produit tensoriel sur  $F$  des représentations. Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux  $FG$ -modules,  $G$  opère sur  $V_1 \otimes_F V_2$  par  $s \cdot (v_1 \otimes v_2) = sv_1 \otimes sv_2$ ,  $s \in G$ , et on vérifie sans difficulté que cette formule fournit bien une structure de  $FG$ -module sur  $V_1 \otimes_F V_2$ . On obtient ainsi un produit sur  $L$  et il est immédiat de vérifier que  $L_0$  est un idéal. Le produit tensoriel induit donc un produit sur  $R(FG)$ .

Comme  $V_1 \otimes_F V_2 \cong V_2 \otimes_F V_1$ , l'anneau  $R(FG)$  est commutatif. Le corps  $F$ , muni de la structure de  $FG$ -module « triviale » telle que  $sa = a$  pour tout  $a \in F$ , représente l'élément neutre pour la multiplication dans  $R(FG)$ . On écrira  $[V_1] \cdot [V_2]$  ou  $V_1 \cdot V_2$  pour le produit dans  $R(FG)$ .

La structure additive de  $R(FG)$  est facile à expliciter :

DÉFINITION. Un  $FG$ -module  $S$  est dit *simple* ou *irréductible* s'il est non-nul et s'il ne possède pas d'autres sous-modules que 0 et  $S$  lui-même.

THÉORÈME. Soient  $G$  un groupe fini et  $F$  un corps commutatif. L'ensemble  $S(FG)$  des classes d'isomorphie de  $FG$ -modules simples est un ensemble fini. Le groupe  $R(FG)$  est abélien libre avec pour base l'ensemble  $S(FG)$ .

Preuve. Soient  $S$  un  $FG$ -module simple et  $v \in S$ ,  $v \neq 0$ . L'application  $FG \rightarrow S$  donnée par  $a \rightarrow av$  définit un homomorphisme de  $FG$ -modules ( $FG$  étant regardé comme  $FG$ -module à gauche par la multiplication dans l'anneau  $FG$ .) Cet homomorphisme est surjectif puisque  $S$  est simple. On voit donc que  $S$  apparaît comme facteur de composition d'une suite de Jordan-Hölder pour le module  $FG$ . Ainsi, il y a au plus  $l$  classes d'isomorphisme de  $FG$ -modules simples, où  $l$  est la longueur d'une suite de Jordan-Hölder pour le module  $FG$ . (Pour le théorème de Jordan-Hölder, voir [Curtis-Reiner] cité dans l'introduction, § 13.)

Soit maintenant  $R$  le groupe abélien libre sur l'ensemble fini  $S(FG)$  des représentations irréductibles.

En associant à tout élément de  $S(FG)$  sa classe dans  $R(FG)$ , on obtient un homomorphisme

$$f : R \rightarrow R(FG).$$

Inversement, on définit  $g : R(FG) \rightarrow R$  comme suit. Si  $V$  est un  $FG$ -module (de dimension finie) et  $V = V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_k \supset V_{k+1} = 0$  une suite de Jordan-Hölder pour  $V$ , on pose

$$g_0(V) = \sum_{i=1}^k S_i,$$

où  $S_i$  est la classe d'isomorphie du facteur simple  $V_i/V_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

D'après le théorème de Jordan-Hölder,  $g_0(V)$  est un élément de  $R$  qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de  $V$ . On a donc un homomorphisme  $g_0 : L \rightarrow R$ . On constate que  $g_0$  s'annule sur les générateurs de  $L_0$ , donc sur  $L_0$  tout entier, et induit par conséquent un homomorphisme  $g : R(FG) \rightarrow R$ .

La vérification de  $gf = id$  est immédiate. Celle de  $fg = id$  facile.

*Exemple.* Pour tout  $\chi \in \text{Hom}(G, F^\cdot)$ , on définit sur  $F$  une structure de  $FG$ -module en posant  $s \cdot v = \chi(s) v$ ,  $v \in F$ . Ce module sera noté  $F_\chi$  ou  $F(\chi)$ . Il est évidemment simple. On a  $F(\chi_1) \otimes F(\chi_2) = F(\chi_1 \cdot \chi_2)$ . Le cas où  $G$  est abélien d'exposant  $n$ , disons, et où  $F$  contient les racines du polynôme  $X^n - 1$  est fondamental pour la théorie. Dans ce cas les classes d'isomorphie des  $FG$ -modules simples  $F(\chi)$ ,  $\chi \in \text{Hom}(G, F^\cdot)$  forment une liste complète sans répétition des  $F$ -représentations irréductibles de  $G$ . Donc,  $R(FG)$  pour  $G$  abélien et avec l'hypothèse faite sur  $F$  s'identifie à l'anneau de groupe  $\mathbb{Z} X$ , où  $X = \text{Hom}(G, F^\cdot)$ .

Revenons au cas général. Si  $f : G \rightarrow G'$  est un homomorphisme de groupes,  $f$  s'étend (de manière unique) à un homomorphisme d'algèbre  $f : FG \rightarrow FG'$  et tout  $FG'$ -module  $V$  devient un  $FG$ -module par  $\lambda v = f(\lambda) v$ ,  $\lambda \in FG$ ,  $v \in V$ . Cette construction fournit un homomorphisme d'anneau  $f^* : R(FG') \rightarrow R(FG)$  dit de *restriction*. (On a également un homomorphisme induit  $f^* : R(FG) \rightarrow R(FG')$  pour la structure additive de ces anneaux, et donné par  $V \rightarrow FG' \otimes_{FG} V$ . On ne s'en servira pas.)

Si  $F \rightarrow E$  est une extension de corps, tout  $FG$ -module  $V$  fournit un  $EG$ -module  $E \otimes_F V$  que l'on notera aussi  $EV$ . On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux  $i : R(FG) \rightarrow R(EG)$  dit d'*extension des scalaires*.

L'anneau  $R(FG)$  est encore muni d'une involution dont nous aurons besoin pour définir les opérations d'Adams d'indices négatifs.

Soit  $V$  un  $FG$ -module. On considère le dual  $V^* = \text{Hom}_F(V, F)$  qui est muni d'une structure de  $FG$ -module définie par la formule

$$(a \cdot f)(v) = \sum_{s \in G} a_s f(s^{-1}v),$$

$$a = \sum_{s \in G} a_s \cdot s \in FG, v \in V.$$



La classe d'isomorphisme de  $V^*$  ne dépend que de celle de  $V$ . La représentation  $V^*$  s'appelle la *duale* de  $V$ . On a  $V^{**} \cong V$ , canoniquement.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'opération  $*$  induit un automorphisme involutif

$$* : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

qui commute aux homomorphismes  $f^* : R(FG') \rightarrow R(FG)$  et  $f_* : R(FG) \rightarrow R(FG')$  pour  $f : G \rightarrow G'$  et  $i : R(FG) \rightarrow R(EG)$ .

Deux théorèmes classiques jouent un rôle essentiel dans la suite.

**THÉORÈME I.** *Soit  $F \rightarrow E$  une extension quelconque de corps commutatifs. L'homomorphisme  $i : R(FG) \rightarrow R(EG)$  d'extension des scalaires est injectif.*

Soit  $p$  un nombre premier. Un sous-groupe cyclique de  $G$  sera dit  *$p$ -régulier* si son ordre est premier à  $p$ . Tout sous-groupe cyclique est 0-régulier.

**THÉORÈME II.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $F$  un corps. Soit  $\mathcal{C}$  la famille des sous-groupes cycliques  $p$ -réguliers de  $G$ , où  $p = \text{caract}(F)$ . L'homomorphisme*

$$\text{res} : R(FG) \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} R(FC),$$

*produit des restrictions  $R(FG) \rightarrow R(FC)$ , est injectif.*

Ces théorèmes constituent un analogue du «splitting principle» en topologie et seront utilisés de façon similaire pour démontrer certaines propriétés des opérations d'Adams.

Pour démontrer les théorèmes I et II, les faits fondamentaux sont les suivants.

**LEMME 1.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $F \subset E$  une extension de corps quelconque. On a  $E \otimes_F \text{rad } FG = \text{rad } EG$ , où  $\text{rad}$  dénote le radical.*

Soit  $V$  un  $FG$ -module. On appelle caractère de  $V$  la fonction  $F$ -linéaire  $\chi : FG \rightarrow F$  définie par

$$\chi(s) = \text{Trace } \rho(s),$$

où  $\rho(s)$  est la transformation  $F$ -linéaire  $V \rightarrow V$  associée à  $s$ , i.e.  $\rho(s)(v) = s \cdot v$ .

**LEMME 2.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $X(FG)$  le sous-espace de  $\text{Hom}_F(FG, F)$  engendré par les caractères des  $F$ -représentations de  $G$ . Les carac-*

ères  $\chi_1, \dots, \chi_r$  des représentations irréductibles forment une  $F$ -base de  $X(FG)$ .

Esquisses de démonstrations.

Soit  $k$  un corps premier, i.e.  $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{F}_p$  pour  $p$  premier. D'après le théorème de Wedderburn, [Curtis-Reiner], § 26, l'algèbre semi-simple  $kG/\text{rad } kG$  se décompose en produit

$$kG/\text{rad } kG \cong D_1(n_1) \times \dots \times D_s(n_s)$$

d'algèbre de matrices  $D_i(n_i)$  sur des corps gauches  $D_i$ .

Les corps gauches  $D_i$  sont munis d'une forme trace non-dégénérée, i.e.  $(x, y) \rightarrow \text{Trace}_{D_i/k}(x.y)$  est bilinéaire de noyau nul.

En effet, pour  $k = \mathbf{Q}$  c'est évident et dans le cas où  $k = \mathbf{F}_p$ , les  $D_i$  sont des corps finis, donc en fait commutatifs et galoisiens, donc séparables sur  $\mathbf{F}_p$ .

On vérifie alors facilement que pour tout corps  $F \supset k$ , les  $F$ -algèbres  $F \otimes_k D_i$  ont également une trace sur  $F$  non-dégénérée et sont donc semi-simples.

Il en résulte que  $F \otimes_k (kG/\text{rad } kG) \cong FG/(F \otimes_k \text{rad } kG)$  est semi-simple. Donc,  $\text{rad } FG \subset F \otimes_k \text{rad } kG$ . Comme l'inclusion inverse est évidente, on a  $F \otimes_k \text{rad } kG = \text{rad } FG$ . Le lemme 1 s'ensuit immédiatement.

De plus, le fait que la forme trace sur  $F$  soit non-dégénérée dans  $F \otimes_k D_i$  entraîne aussi que dans la décomposition de Wedderburn

$$FG/\text{rad } FG \cong K_1(n_1) \times \dots \times K_r(n_r),$$

chaque corps (gauche)  $K_i, i = 1, \dots, r$ , possède une forme trace sur  $F$  non-dégénérée. En particulier, il existe des éléments  $\alpha_i \in K_i$  tels que  $\text{trace}_F(\alpha_i) \neq 0, i = 1, \dots, r$ .

Pour démontrer le lemme 2, on observe d'abord que les caractères  $\chi_1, \dots, \chi_r$  des  $FG$ -modules simples engendrent  $X(FG)$ . Il reste alors à démontrer que ces caractères sont linéairement indépendants sur  $F$ . Soit  $S_i$  le  $K_i(n_i)$ -module formé des matrices  $n_i \times n_i$  dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première. On sait que  $S_1, \dots, S_r$  regardés comme  $FG$ -modules forment une liste complète de  $FG$ -modules simples non-isomorphes.

Soient maintenant  $a_i \in FG$  des éléments se projetant sur  $\alpha_i e_{11} \in K_i(n_i)$  et sur 0 dans les autres facteurs  $K_j(n_j)$  pour  $j \neq i$ . ( $e_{11}$  dénote la matrice  $n_i \times n_i$  de  $K_i(n_i)$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (1, 1) qui est égal à 1.)

Un calcul de traces montre aisément que

$$\chi_i(a_j) = \delta_{ij} \cdot \text{trace}_F(\alpha_i).$$

L'indépendance linéaire de  $\chi_1, \dots, \chi_r$  en résulte.

Démonstration du théorème I:  $R(FG) \rightarrow R(EG)$  est injectif.

Il suffit de voir que si  $S$  et  $T$  sont deux  $FG$ -modules simples non-isomorphes, alors  $ES$  et  $ET$  sont semi-simples et sans facteur commun, i.e.  $ES$  somme directe de  $EG$ -modules simples  $S_i$ ,  $ET$  somme directe de  $EG$ -modules simples  $T_j$ , et  $S_i \not\cong T_j$  pour tout couple  $(i, j)$ .

$ES$  et  $ET$  sont semi-simples car ils sont annulés par  $E \otimes \text{rad } FG$ . Donc, par  $\text{rad } EG$ , en vertu du lemme 1.

Pour vérifier qu'ils n'ont pas de facteur simple commun, il suffit de calculer  $\text{Hom}_{EG}(ES, ET) = 0$ . Cela résulte de  $\text{Hom}_{EG}(ES, ET) = E \otimes_F \text{Hom}_{FG}(S, T) = 0$ .

Démonstration du théorème II:  $\text{res} : R(FG) \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} R(FC)$  est injectif.

Soit  $\chi : R(FG) \rightarrow X(FG)$  l'application qui associe à une représentation  $V$  son caractère  $\chi_V$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R(FG) & \rightarrow & X(FG) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} \\ \prod_{C \in \mathcal{C}} R(FC) & \rightarrow & \prod_{C \in \mathcal{C}} X(FC), \end{array}$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des sous-groupes cycliques  $p$ -réguliers de  $G$ ,  $p = \text{caract } F$ .

Si  $\text{res } \chi_\alpha = 0$ , cela veut dire que  $\chi_\alpha$  s'annule sur tous les éléments  $p$ -réguliers de  $G$ . Il en résulte que  $\chi_\alpha$  est identiquement nulle. En effet, tout élément  $x$  de  $G$  s'écrit  $x = y \cdot z$ , où  $y$  et  $z$  commutent,  $y$  est  $p$ -régulier et  $z$  d'ordre une puissance de  $p$ . (Si  $mq$  est l'ordre de  $x$ , avec  $m$  premier à  $p$  et  $q$  une puissance de  $p$ , prendre  $y = x^q$  et  $z = x^m$ .) Si  $V$  est une représentation de  $G$ , les valeurs propres de  $z$  sont toutes égales à 1. (C'est la seule racine  $p$ -ième de 1 dans  $F$ .) Donc les valeurs propres de  $x = yz$  sont les mêmes que celles de  $y$ . Il en résulte que  $\chi_V(x) = \chi_V(y)$ , et  $\chi_\alpha(x) = \chi_\alpha(y)$  pour tout  $\alpha \in R(FG)$ .

Donc,  $\text{res } \chi_\alpha = 0$  entraîne  $\chi_\alpha = 0$ . Comme d'autre part  $R(FG)$  est abélien libre avec pour  $\mathbf{Z}$ -base les représentations irréductibles  $S_1, \dots, S_r$  et que  $\chi_1 = \chi(S_1), \dots, \chi_r = \chi(S_r)$  est une  $F$ -base de l'espace des caractères  $X(FG)$  en vertu du lemme 2, on conclut que si  $\text{res } \chi_\alpha = 0$ , alors  $\alpha$  est contenu dans  $pR(FG)$ .

Le noyau de  $\text{res} : R(FG) \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} R(FC)$  est donc contenu dans  $pR(FG)$ . Comme maintenant  $\prod_{C \in \mathcal{C}} R(FC)$  est sans torsion, on a

$$\text{Ker}(\text{res}) = \bigcap_n p^n R(FG) = 0.$$

Au § 5 nous aurons besoin de  $K(FG)$  dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si  $F$  est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires  $K(FG) \rightarrow K(EG)$  est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où  $K(FG)$  est noté  $P_F(G)$ . Nous ne la reproduisons pas.

## § 2. PUISSANCES EXTÉRIEURES

Les puissances extérieures des  $FG$ -modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau  $R(FG)$ , appelé  $\lambda$ -structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier  $n$  un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit  $V$  un  $FG$ -module, toujours de dimension finie. On notera  $\lambda_m V$  la  $m$ -ième puissance extérieure de  $V$ . C'est le quotient de la puissance tensorielle  $V^m = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  ( $m$  facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme  $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$  avec  $v_i = v_j$  pour au moins un couple d'indices distincts  $(i, j)$ .

L'action de  $G$  sur  $\lambda_m V$  est induite de l'action de  $G$  sur  $V^m$ . On convient que  $\lambda_0 V = F$  avec action triviale, et  $\lambda_1 V = V$ .

Il s'avère que les puissances extérieures  $\lambda_m, m \geq 0$ , induisent des opérations

$$\lambda_m : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^m (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta).$$

Le point essentiel est le

LEMME. Soit  $0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow 0$  une suite exacte de  $FG$ -modules. Alors,

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^m [\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V]$$

dans  $R(FG)$  pour  $m = 0, 1, \dots$ .