

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: Classification des courbes différentielles
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

APPENDICE IV

Classification des courbes différentielles

Soit X une courbe différentielle (paracompacte) connexe. On munit le fibré cotangent Ω^1 d'une structure hermitienne (chap. 0, § 2, lemme 3). On dit qu'une carte ϕ de X est *normalisée* si son domaine U est connexe et si le vecteur $d\phi(x)$ est de longueur 1 pour tout point x de U . On laisse au lecteur le soin de démontrer qu'il existe de telles cartes.

Soient ϕ et ψ deux cartes normalisées de X de domaines respectifs U et V . Le changement de cartes γ de ϕ dans ψ est une application de $\phi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$ dont la dérivée est localement constante, égale à plus ou moins 1. Les ensembles $\phi(U)$ et $\psi(V)$ sont des segments ouverts de \mathbf{R} que l'on désigne par I et J .

LEMME 1. *Supposons l'ensemble $U \cap V$ non vide. Alors $U \cap V$ contient au plus deux composantes connexes. S'il contient une composante connexe, l'ensemble $U \cup V$ est le domaine d'une carte normalisée de X . S'il contient deux composantes connexes, la variété X est isomorphe à \mathbf{U} .*

L'ensemble A défini par

$$A = \{ (s, t) \in I \times J \mid \phi^{-1}(s) = \psi^{-1}(t) \}$$

est une sous-variété fermée de $I \times J$ isomorphe à $U \cap V$, formée de segments de droites parallèles à l'une des diagonales de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Les extrémités de ces segments appartiennent au bord de $I \times J$. Il est clair que chaque côté de $I \times J$ contient au plus une de ces extrémités (ce qui démontre la première assertion) et que ces segments sont simultanément parallèles à la diagonale ou à l'antidiagonale de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Si A est connexe, l'application γ se prolonge en une application linéaire f de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Les applications $f \cdot \phi$ et ψ coïncident sur $U \cap V$. Par recollement, elles fournissent la carte cherchée.

Si A contient deux composantes connexes, que l'on suppose parallèles à la diagonale de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, il existe des nombres réels

$$a_1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < a_2 \quad \text{et} \quad b_1 < \beta_1 \leq \beta_2 < b_2$$

tels que

$$I =]a_1, a_2[\quad \text{et} \quad J =]b_1, b_2[$$

et tels que les extrémités de A soient les points (a_1, β_2) , (α_1, b_2) , (α_2, b_1) , (a_2, β_1) . Quitte à translater J , on peut supposer que l'on a

$$b_1 = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = a_2$$

On vérifie aisément que l'application h de X dans \mathbf{U} définie par

$$\begin{cases} h(x) = \exp\left(2i\pi \frac{\phi(x)}{\beta_2 - a_1}\right) & \text{si } x \in U \\ h(x) = \exp\left(2i\pi \frac{\psi(x)}{\beta_2 - a_1}\right) & \text{si } x \in V \end{cases}$$

est un difféomorphisme.

THÉORÈME 1. *Toute courbe différentielle connexe (dénombrable à l'infini) est isomorphe à \mathbf{R} ou à \mathbf{U} .*

Désignons par \mathcal{N} l'ensemble des cartes normalisées de X , ordonné par la relation de prolongement. Cet ensemble est inductif et non vide. Le lemme de Zorn montre qu'il contient un élément maximal ϕ . Raisonnons par l'absurde en supposant que X n'est isomorphe ni à \mathbf{R} ni à \mathbf{U} . En particulier, le domaine U de ϕ est distinct de X (sinon X serait isomorphe à un segment ouvert de \mathbf{R}). Soit x un point de ∂U et soit ψ une carte normalisée de X dont le domaine V contient x . Il résulte du lemme 1 que $U \cup V$ est le domaine d'une carte normalisée de X ce qui contredit le caractère maximal de ϕ .