Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: (2) Le théorème de Poincaré-Volterra
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Il est clair que U' est un voisinage ouvert de A dans U et la formule

$$X \setminus U' = (X \setminus \tilde{U}) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_j$$

montre que $X \setminus U'$ n'a pas de composante connexe compacte.

L'assertion relative aux voisinages compacts se déduit aisément de ce qui précède et du lemme 1.

LEMME 6. *Supposons X dénombrable à l'infini. Il existe alors une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composantes connexes relativement compactes.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.

(2) Le théorème de Poincaré-Volterra

THÉORÈME 1. *Soient X et Y deux variétés topologiques et soit u une application continue de X dans Y. On suppose que X est connexe et que les fibres de u sont discrètes. Si Y est de type dénombrable, il en est de même de X.*

On désigne par $(W_\iota)_{\iota \in I}$ une base dénombrable de la topologie de Y et par $\mathscr{U}$ l'ensemble des composantes connexes relativement compactes des ensembles de la forme $u^{-1}(W_\iota)$. Il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est un recouvrement dénombrable de X.

Pour tout point x de X, il existe un voisinage compact K de x tel que

$$K \cap u^{-1}(u(x)) = \{x\}.$$

En particulier, le point $u(x)$ n'appartient pas à $u(\partial K)$ et il existe un indice ι tel que W_ι contienne $u(x)$ et ne rencontre pas $u(\partial K)$. La composante connexe U de x dans $u^{-1}(W_\iota)$ est contenue dans K. On en déduit que $\mathscr{U}$ est un recouvrement de X.

Il reste à voir que $\mathscr{U}$ est dénombrable.

Remarquons tout d'abord que toute variété topologique Y de type dénombrable vérifie la propriété suivante:

(*) Toute famille d'ensembles ouverts non vides deux à deux disjoints de Y est dénombrable.

Soit U_0 un élément de $\mathscr{U}$. On définit par récurrence une famille $(\mathscr{U}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties de $\mathscr{U}$ en posant

$$\mathscr{U}_0 = U_0$$

$$\mathscr{U}_{j+1} = \{ U \in \mathscr{U} \mid \text{il existe } V \in \mathscr{U}_j \text{ tel que } U \cap V \neq \varnothing \}.$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{U}_j$ est dénombrable. Si $\mathcal{U}_j$ est dénombrable, la réunion de ses éléments est une variété topologique U_j de type dénombrable et, pour tout indice ι, la famille $\mathcal{F}_\iota$ des composantes connexes de $u^{-1}(W_\iota)$ qui rencontrent U_j est dénombrable (propriété (*)), ce qui démontre l'assertion puisque $\mathcal{U}_{j+1}$ est contenu dans la réunion des $\mathcal{F}_\iota$.

Démontrons finalement par l'absurde que $\mathcal{U}$ est la réunion des $\mathcal{U}_j$. Désignons par U la réunion des éléments de tous les $\mathcal{U}_j$ et par V la réunion des éléments de $\mathcal{U}$ n'appartenant à aucun des $\mathcal{U}_j$. Les ensembles U et V sont des ouverts non vides recouvrant X. Ils sont disjoints par construction ce qui contredit la connexité de X et démontre du même coup le théorème.

(3) Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe

PROPOSITION 1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe X est de génération finie.*

Recouvrons X par des domaines de cartes $V_0, ..., V_n$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_0, ..., x_n$. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par U_j une boule de centre x_j relativement compacte dans V_j et l'on suppose que $U_0, ..., U_n$ recouvrent encore X.

Pour tout couple d'entiers (j, k), on recouvre $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ par des domaines de cartes $U_1^{j,k}, ..., U_{n_{j,k}}^{j,k}$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_1^{j,k}, ..., x_{n_{j,k}}^{j,k}$ de $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$. Remarquons que $n_{j,k}$ est nul si $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ est vide.

Pour tout entier l compris entre 1 et $n_{j,k}$, on désigne par $\alpha_l^{j,k}$ un chemin joignant x_j à $x_l^{j,k}$ dans V_j et par $\beta_l^{j,k}$ un chemin joignant $x_l^{j,k}$ à x_k dans V_k. On pose

$$\gamma_l^{j,k} = \alpha_l^{j,k} \beta_l^{j,k} .$$

Nous allons montrer que tout lacet c de X au point x_0 est homotope à un produit de chemins $\gamma_l^{j,k}$, ce qui démontrera l'assertion.

Le lacet c se décompose en un produit de chemins $c_1, ..., c_p$ dont chacun est contenu dans l'un des ouverts $U_0, ..., U_n$.

Désignons par c_m et c_{m+1} deux tels chemins. Le premier joint un point a_{m-1} à un point a_m dans U_j, le second le point a_m à un point a_{m+1} dans U_k. Il existe un ensemble ouvert $U_l^{j,k}$ contenant a_m. On choisit alors un chemin α joignant a_{m-1} à x_j dans U_j, un chemin β joignant x_k à a_{m+1} dans U_k et un chemin γ joignant $x_l^{j,k}$ à a_m dans $U_l^{j,k}$. Le chemin $\alpha\, \alpha_l^{j,k}\, \gamma$ est homotope au chemin c_m dans V_j et le chemin $\gamma^{-1}\beta_l^{j,k}\beta$ est homotope au chemin c_{m+1} dans V_k. Par conséquent, le chemin $\alpha\, \gamma_l^{j,k}\beta$ est homotope au chemin $c_m c_{m+1}$ dans X. On en déduit aisément l'assertion.