

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.  
**Kapitel:** (1) Sur le bouchage des trous  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## APPENDICE II

*Les variétés topologiques considérées dans cet appendice ne sont pas nécessairement paracompactes.*

### (1) Sur le bouchage des trous

Soit  $X$  une variété topologique connexe. Pour toute partie  $A$  de  $X$ , on désigne par  $\tilde{A}$  la réunion de  $A$  et des composantes connexes de  $X \setminus A$  relativement compactes dans  $X$ .

LEMME 1. *Soit  $B$  une partie de  $X$  et soit  $A$  une partie de  $B$ .*

(1) *Pour toute composante connexe  $V$  de  $X \setminus A$ , l'ensemble  $V \setminus B$  est réunion de composantes connexes de  $X \setminus B$ .*

(2) *L'ensemble  $\tilde{A}$  est contenu dans  $\tilde{B}$ .*

(3) *L'ensemble  $\tilde{A}$  est égal à  $(\tilde{A})^\sim$ .*

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

LEMME 2. *Pour toute partie fermée  $A$  de  $X$ , l'ensemble  $\tilde{A}$  est fermé.*

*Pour toute partie compacte  $A$  de  $X$ , l'ensemble  $\tilde{A}$  est compact.*

La première assertion résulte de ce que  $X$  est localement connexe. Démontrons la seconde.

Soit  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $A$  dans  $X$  et soit  $V$  une composante connexe de  $X \setminus A$ . Puisque  $X$  est connexe, l'ensemble  $U \cap V$  est non vide et puisque  $V$  est connexe, ou bien  $V$  est contenu dans  $U$ , ou bien  $V$  rencontre  $\partial U$ . Comme les composantes connexes de  $X \setminus A$  rencontrant  $\partial U$  sont en nombre fini, ceci démontre l'assertion.

LEMME 3. *On désigne par  $Y$  un espace topologique localement compact et par  $Y_0$  une composante connexe compacte de  $Y$ . Alors  $Y_0$  possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés.*

On peut supposer  $Y$  compact. On désigne par  $F$  l'ensemble des voisinages ouverts et fermés de  $Y_0$  et l'on pose

$$A = \bigcap_{U \in F} U.$$

Il est clair que  $A$  est un sous-ensemble compact de  $Y$  contenant  $Y_0$  et que  $F$  est un système fondamental de voisinages de  $A$ . Il suffit alors de montrer que  $A$  est égal à  $Y_0$  ou ce qui revient au même que  $A$  est connexe. Raisonnons par l'absurde en supposant que  $A$  est la réunion de deux ensembles fermés disjoints non vides  $A_1$  et  $A_2$ . On peut trouver des voisinages disjoints  $U_1$  et  $U_2$  de  $A_1$  et  $A_2$  respectivement, ouverts et fermés dans  $Y$ . Comme  $Y_0$  est connexe, il est contenu dans l'un de ces voisinages, ce qui est absurde.

LEMME 4. *Pour toute partie ouverte  $A$  de  $X$ , l'ensemble  $\tilde{A}$  est ouvert.*

Toute composante connexe  $V$  de  $X \setminus A$  relativement compacte dans  $X$  est compacte. Le lemme 3 montre que  $V$  possède un voisinage compact  $U$  ouvert et fermé dans  $X \setminus A$ . En particulier,  $U$  est contenu dans  $\tilde{A}$  et l'on vérifie aisément que  $A \cup U$  est un voisinage ouvert de  $V$  dans  $X$  ce qui démontre l'assertion.

LEMME 5. *Soit  $A$  un ensemble compact de  $X$  égal à l'ensemble  $\tilde{A}$ . Il existe alors un système fondamental de voisinages ouverts (resp. compacts) de  $A$  dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte.*

Montrons tout d'abord que  $A$  possède un système fondamental de voisinages ouverts dont les complémentaires n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Soient  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $A$  dans  $X$  et soit  $K$  un voisinage compact de  $A$  dans  $U$ . On désigne par  $K'$  la réunion de  $K$  et des composantes connexes de  $X \setminus K$  contenues dans  $U$ . On démontre comme dans le lemme 2 que  $X \setminus K'$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. L'ensemble  $\overset{\circ}{K}'$  est alors un voisinage ouvert de  $A$  dans  $U$  dont le complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Soit  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $A$  dont le complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et soient  $V_1, \dots, V_n$  les composantes connexes compactes de  $X \setminus U$ . Chacun des ensembles  $V_j$  est contenu dans une composante connexe  $W_j$  de  $X \setminus A$  et l'hypothèse montre que  $W_j$  rencontre  $\partial \tilde{U}$  (car  $\tilde{U}$  est un voisinage ouvert relativement compact de  $A$ ). On désigne par  $c_j$  un chemin de  $W_j$  joignant  $V_j$  à  $\partial \tilde{U}$  et l'on pose

$$U' = U \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j.$$

Il est clair que  $U'$  est un voisinage ouvert de  $A$  dans  $U$  et la formule

$$X \setminus U' = (X \setminus \tilde{U}) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_j$$

montre que  $X \setminus U'$  n'a pas de composante connexe compacte.

L'assertion relative aux voisinages compacts se déduit aisément de ce qui précède et du lemme 1.

LEMME 6. *Supposons  $X$  dénombrable à l'infini. Il existe alors une suite exhaustive de parties compactes de  $X$  dont les complémentaires n'ont pas de composantes connexes relativement compactes.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.

## (2) Le théorème de Poincaré-Volterra

THÉORÈME 1. *Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés topologiques et soit  $u$  une application continue de  $X$  dans  $Y$ . On suppose que  $X$  est connexe et que les fibres de  $u$  sont discrètes. Si  $Y$  est de type dénombrable, il en est de même de  $X$ .*

On désigne par  $(W_i)_{i \in I}$  une base dénombrable de la topologie de  $Y$  et par  $\mathcal{U}$  l'ensemble des composantes connexes relativement compactes des ensembles de la forme  $u^{-1}(W_i)$ . Il suffit de montrer que  $\mathcal{U}$  est un recouvrement dénombrable de  $X$ .

Pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un voisinage compact  $K$  de  $x$  tel que

$$K \cap u^{-1}(u(x)) = \{x\}.$$

En particulier, le point  $u(x)$  n'appartient pas à  $u(\partial K)$  et il existe un indice  $i$  tel que  $W_i$  contienne  $u(x)$  et ne rencontre pas  $u(\partial K)$ . La composante connexe  $U$  de  $x$  dans  $u^{-1}(W_i)$  est contenue dans  $K$ . On en déduit que  $\mathcal{U}$  est un recouvrement de  $X$ .

Il reste à voir que  $\mathcal{U}$  est dénombrable.

Remarquons tout d'abord que toute variété topologique  $Y$  de type dénombrable vérifie la propriété suivante:

(\*) Toute famille d'ensembles ouverts non vides deux à deux disjoints de  $Y$  est dénombrable.

Soit  $U_0$  un élément de  $\mathcal{U}$ . On définit par récurrence une famille  $(\mathcal{U}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de parties de  $\mathcal{U}$  en posant

$$\mathcal{U}_0 = U_0$$

$$\mathcal{U}_{j+1} = \{ U \in \mathcal{U} \mid \text{il existe } V \in \mathcal{U}_j \text{ tel que } U \cap V \neq \emptyset \}.$$