Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Anhang: Appendice II
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Appendice II

Les variétés topologiques considérées dans cet appendice ne sont pas nécessairement paracompactes.

(1) Sur le bouchage des trous

Soit X une variété topologique connexe. Pour toute partie A de X, on désigne par $\tilde{A}$ la réunion de A et des composantes connexes de $X \backslash A$ relativement compactes dans X.

Lemme 1. *Soit B une partie de X et soit A une partie de B.*

(1) Pour toute composante connexe V de $X \backslash A$, l'ensemble $V \backslash B$ est réunion de composantes connexes de $X \backslash B$.

(2) L'ensemble $\tilde{A}$ est contenu dans $\tilde{B}$.

(3) L'ensemble $\tilde{A}$ est égal à $(\tilde{A})^{\sim}$.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Lemme 2. *Pour toute partie fermée A de X, l'ensemble $\tilde{A}$ est fermé. Pour toute partie compacte A de X, l'ensemble $\tilde{A}$ est compact.*

La première assertion résulte de ce que X est localement connexe. Démontrons la seconde.

Soit U un voisinage ouvert relativement compact de A dans X et soit V une composante connexe de $X \backslash A$. Puisque X est connexe, l'ensemble $U \cap V$ est non vide et puisque V est connexe, ou bien V est contenu dans U, ou bien V rencontre ∂U. Comme les composantes connexes de $X \backslash A$ rencontrant ∂U sont en nombre fini, ceci démontre l'assertion.

Lemme 3. *On désigne par Y un espace topologique localement compact et par Y_0 une composante connexe compacte de Y. Alors Y_0 possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés.*

On peut supposer Y compact. On désigne par F l'ensemble des voisinages ouverts et fermés de Y_0 et l'on pose

$$A = \bigcap_{U \in F} U .$$

Il est clair que A est un sous-ensemble compact de Y contenant Y_0 et que F est un système fondamental de voisinages de A. Il suffit alors de montrer que A est égal à Y_0 ou ce qui revient au même que A est connexe. Raisonnons par l'absurde en supposant que A est la réunion de deux ensembles fermés disjoints non vides A_1 et A_2. On peut trouver des voisinages disjoints U_1 et U_2 de A_1 et A_2 respectivement, ouverts et fermés dans Y. Comme Y_0 est connexe, il est contenu dans l'un de ces voisinages, ce qui est absurde.

LEMME 4. *Pour toute partie ouverte A de X, l'ensemble $\tilde{A}$ est ouvert.*

Toute composante connexe V de $X \backslash A$ relativement compacte dans X est compacte. Le lemme 3 montre que V possède un voisinage compact U ouvert et fermé dans $X \backslash A$. En particulier, U est contenu dans $\tilde{A}$ et l'on vérifie aisément que $A \cup U$ est un voisinage ouvert de V dans X ce qui démontre l'assertion.

LEMME 5. *Soit A un ensemble compact de X égal à l'ensemble $\tilde{A}$. Il existe alors un système fondamental de voisinages ouverts (resp. compacts) de A dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte.*

Montrons tout d'abord que A possède un système fondamental de voisinages ouverts dont les complémentaires n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Soient U un voisinage ouvert relativement compact de A dans X et soit K un voisinage compact de A dans U. On désigne par K' la réunion de K et des composantes connexes de $X \backslash K$ contenues dans U. On démontre comme dans le lemme 2 que $X \backslash K'$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. L'ensemble $\mathring{K}'$ est alors un voisinage ouvert de A dans U dont le complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Soit U un voisinage ouvert relativement compact de A dont le complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et soient $V_1, \ldots, V_n$ les composantes connexes compactes de $X \backslash U$. Chacun des ensembles V_j est contenu dans une composante connexe W_j de $X \backslash A$ et l'hypothèse montre que W_j rencontre $\partial \tilde{U}$ (car $\tilde{U}$ est un voisinage ouvert relativement compact de A). On désigne par c_j un chemin de W_j joignant V_j à $\partial \tilde{U}$ et l'on pose

$$U' = U \backslash \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j .$$

Il est clair que U' est un voisinage ouvert de A dans U et la formule

$$X \backslash U' = (X \backslash \tilde{U}) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_j$$

montre que $X \backslash U'$ n'a pas de composante connexe compacte.

L'assertion relative aux voisinages compacts se déduit aisément de ce qui précède et du lemme 1.

LEMME 6. *Supposons X dénombrable à l'infini. Il existe alors une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composantes connexes relativement compactes.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.

(2) Le théorème de Poincaré-Volterra

THÉORÈME 1. *Soient X et Y deux variétés topologiques et soit u une application continue de X dans Y. On suppose que X est connexe et que les fibres de u sont discrètes. Si Y est de type dénombrable, il en est de même de X.*

On désigne par $(W_\iota)_{\iota \in I}$ une base dénombrable de la topologie de Y et par $\mathscr{U}$ l'ensemble des composantes connexes relativement compactes des ensembles de la forme $u^{-1}(W_\iota)$. Il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est un recouvrement dénombrable de X.

Pour tout point x de X, il existe un voisinage compact K de x tel que

$$K \cap u^{-1}\big(u(x)\big) = \{x\}.$$

En particulier, le point $u(x)$ n'appartient pas à $u(\partial K)$ et il existe un indice ι tel que W_ι contienne $u(x)$ et ne rencontre pas $u(\partial K)$. La composante connexe U de x dans $u^{-1}(W_\iota)$ est contenue dans K. On en déduit que $\mathscr{U}$ est un recouvrement de X.

Il reste à voir que $\mathscr{U}$ est dénombrable.

Remarquons tout d'abord que toute variété topologique Y de type dénombrable vérifie la propriété suivante:

(*) Toute famille d'ensembles ouverts non vides deux à deux disjoints de Y est dénombrable.

Soit U_0 un élément de $\mathscr{U}$. On définit par récurrence une famille $(\mathscr{U}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties de $\mathscr{U}$ en posant

$$\mathscr{U}_0 = U_0$$
$$\mathscr{U}_{j+1} = \{\, U \in \mathscr{U} \mid \text{il existe } V \in \mathscr{U}_j \text{ tel que } U \cap V \neq \varnothing \,\}.$$

Démontrons par récurrence que $\mathscr{U}_j$ est dénombrable. Si $\mathscr{U}_j$ est dénombrable, la réunion de ses éléments est une variété topologique U_j de type dénombrable et, pour tout indice ι, la famille $\mathscr{F}_\iota$ des composantes connexes de $u^{-1}(W_\iota)$ qui rencontrent U_j est dénombrable (propriété (*)), ce qui démontre l'assertion puisque $\mathscr{U}_{j+1}$ est contenu dans la réunion des $\mathscr{F}_\iota$.

Démontrons finalement par l'absurde que $\mathscr{U}$ est la réunion des $\mathscr{U}_j$. Désignons par U la réunion des éléments de tous les $\mathscr{U}_j$ et par V la réunion des éléments de $\mathscr{U}$ n'appartenant à aucun des $\mathscr{U}_j$. Les ensembles U et V sont des ouverts non vides recouvrant X. Ils sont disjoints par construction ce qui contredit la connexité de X et démontre du même coup le théorème.

(3) Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe

Proposition 1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe X est de génération finie.*

Recouvrons X par des domaines de cartes $V_0, \dots, V_n$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_0, \dots, x_n$. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par U_j une boule de centre x_j relativement compacte dans V_j et l'on suppose que $U_0, \dots, U_n$ recouvrent encore X.

Pour tout couple d'entiers (j, k), on recouvre $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ par des domaines de cartes $U_1^{j,k}, \dots, U_{n_{j,k}}^{j,k}$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_1^{j,k}, \dots, x_{n_{j,k}}^{j,k}$ de $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$. Remarquons que $n_{j,k}$ est nul si $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ est vide.

Pour tout entier l compris entre 1 et $n_{j,k}$, on désigne par $\alpha_l^{j,k}$ un chemin joignant x_j à $x_l^{j,k}$ dans V_j et par $\beta_l^{j,k}$ un chemin joignant $x_l^{j,k}$ à x_k dans V_k. On pose

$$\gamma_l^{j,k} = \alpha_l^{j,k} \beta_l^{j,k} .$$

Nous allons montrer que tout lacet c de X au point x_0 est homotope à un produit de chemins $\gamma_l^{j,k}$, ce qui démontrera l'assertion.

Le lacet c se décompose en un produit de chemins $c_1, \dots, c_p$ dont chacun est contenu dans l'un des ouverts $U_0, \dots, U_n$.

Désignons par c_m et c_{m+1} deux tels chemins. Le premier joint un point a_{m-1} à un point a_m dans U_j, le second le point a_m à un point a_{m+1} dans U_k. Il existe un ensemble ouvert $U_l^{j,k}$ contenant a_m. On choisit alors un chemin α joignant a_{m-1} à x_j dans U_j, un chemin β joignant x_k à a_{m+1} dans U_k et un chemin γ joignant $x_l^{j,k}$ à a_m dans $U_l^{j,k}$. Le chemin $\alpha\, \alpha_l^{j,k}\, \gamma$ est homotope au chemin c_m dans V_j et le chemin $\gamma^{-1}\beta_l^{j,k}\beta$ est homotope au chemin c_{m+1} dans V_k. Par conséquent, le chemin $\alpha\, \gamma_l^{j,k}\beta$ est homotope au chemin $c_m c_{m+1}$ dans X. On en déduit aisément l'assertion.