

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: (1) Sur l'existence de certaines fonctions dérivables
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

APPENDICE I

(1) Sur l'existence de certaines fonctions dérivables

LEMME 1. *Il existe une fonction croissante f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, nulle sur $]-\infty, 0]$, égale à 1 sur $[1, +\infty[$.*

Désignons par g la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$\begin{cases} g(x) = \exp(-x^{-2}) & \text{si } x > 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Il est clair que g est indéfiniment dérivable. Il suffit alors de poser

$$f(x) = \left(\int_{-\infty}^x g(t) g(1-t) dt \right) / \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) g(1-t) dt \right).$$

Ceci a bien un sens puisque $g(t) g(1-t)$ est nul si $t \leq 0$ ou si $t \geq 1$, strictement positif si $0 < t < 1$.

LEMME 2. *Pour tout point k de \mathbf{Z}^n et tout nombre réel ε strictement positif, il existe une fonction $\alpha_{k,\varepsilon}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, à valeurs positives, dont le support est contenu dans le cube de côté 2ε centré au point εk et telle que*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

pour tout point x de \mathbf{R}^n .

Désignons par f une fonction vérifiant les conditions du lemme 1. On définit une fonction g de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ à valeurs positives en posant

$$g(x) = f(x+1) - f(x).$$

Le support de g est contenu dans l'intervalle $[-1, +1]$ et l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = g(x-j_0) + g(x-j_0-1)$$

pour tout point x de \mathbf{R} , en désignant par j_0 la partie entière de x (i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x). On en déduit que l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = f(x-j_0+1) = 1.$$

Il suffit alors de poser

$$\alpha_{k,\varepsilon}(x_1, \dots, x_n) = g\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - k_1\right) \dots g\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - k_n\right).$$

LEMME 3. *Pour tout ensemble compact K de \mathbf{R}^n et tout voisinage U de K , il existe une fonction α de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs positives, dont le support est contenu dans U et égale à 1 sur K .*

Munissons \mathbf{R}^n de la norme

$$|(x_1, \dots, x_n)| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Pour tout nombre réel ε strictement positif, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |x - y| \leq \varepsilon\}$$

est compact. Pour ε suffisamment petit, il est contenu dans U . Désignons par A l'ensemble des points k de \mathbf{Z}^n pour lesquels le cube de centre εk et de côté 2ε rencontre K et posons

$$\alpha = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable à valeurs positives. D'autre part, on a

$$\text{supp}(\alpha) \subset \bigcup_{k \in A} \text{supp}(\alpha_{k,\varepsilon}) \subset K_\varepsilon$$

et, pour tout point x de K ,

$$\alpha(x) = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. *Soit r un nombre réel strictement positif et soit C le cube de côté $2r$ et de centre l'origine dans \mathbf{R}^n . Pour tout point a de C , il existe un difféomorphisme u de \mathbf{R}^n sur lui-même tel que*

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u|_{\mathbf{R}^n \setminus C} = 1_{\mathbf{R}^n \setminus C}.$$

On se ramène aisément au cas où n est égal à 1. On désigne par α une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbf{R} dont le support est contenu dans $[0, r]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) dt = a \quad \text{et} \quad |\alpha| < 1$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 3, car $|a|$ est strictement inférieur à r). Il suffit alors de poser

$$u(x) = x - \int_{-\infty}^x (\alpha(t) - \alpha(-t)) dt.$$