

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	21 (1975)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
<b>Autor:</b>	Guenot, J. / Narasimhan, R.
<b>Kapitel:</b>	§4. Fonctions méromorphes sur une courbe holomorphe non compacte
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-47334">https://doi.org/10.5169/seals-47334</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

#### § 4. FONCTIONS MÉROMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

THÉORÈME 1 (Mittag-Leffler). *Toute partie principale d'un fibré en droites holomorphe sur  $X$  provient d'une section méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 2).

*Remarque 1.*

En fait, le théorème 1 est valable pour tout fibré vectoriel holomorphe sur  $X$  (voir théorème 3 ci-dessous).

THÉORÈME 2 (Weierstrass). *Tout diviseur de  $X$  est le diviseur d'une fonction méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 3).

COROLLAIRE. *Toute fonction méromorphe  $h$  sur  $X$  est le quotient de deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas simultanément.*

Il existe une fonction holomorphe  $v$  sur  $X$  dont le diviseur est  $\sup(-h, 0)$ . La fonction  $u$  définie par

$$u = vh$$

est holomorphe et ne s'annule pas en même temps que  $v$ , d'où l'assertion.

PROPOSITION 1. *Soit  $A$  un ensemble fermé discret de  $X$  et soit  $f$  une fonction à valeurs complexes définie sur  $A$ . Il existe alors une fonction holomorphe  $h$  sur  $X$  prolongeant  $f$ .*

Désignons par  $u$  une fonction holomorphe sur  $X$  dont le diviseur est donné par la formule

$$(u) = \sum_{x \in A} 1 \cdot x$$

(théorème 2) et par  $v$  une fonction méromorphe sur  $X$  vérifiant les relations

$$\begin{aligned} v_x - f(x) u_x^{-1} &\in \mathcal{O}_x & \text{si } x \in A \\ v_x &\in \mathcal{O}_x & \text{si } x \in X \setminus A \end{aligned}$$

(théorème 1). Il suffit alors de poser

$$h = uv.$$

PROPOSITION 2. *Désignons par  $\pi$  un fibré vectoriel holomorphe sur  $X$  et par  $\sigma$  le fibré quotient de  $\pi$  par un sous-fibré en droites holomorphe  $\rho$ . Pour toute section holomorphe  $t$  de  $\sigma$ , il existe une section holomorphe  $s$  de  $\pi$  relevant  $t$ .*

Par définition même du fibré quotient (chap. 0, § 2, exemple 3), il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  et, pour chaque indice  $i$ , une section holomorphe  $s_i$  de  $\pi$  sur  $U_i$  relevant  $t|_{U_i}$ . La section  $s_{\kappa i}$  définie sur  $U_i \cap U_{\kappa}$  par

$$s_{\kappa i} = s_i - s_{\kappa}$$

prend ses valeurs dans  $\rho$ . Il existe donc pour chaque indice  $i$  une section  $f_i$  de  $\mathcal{C}^\infty(U_i, \rho)$  telle que

$$s_{\kappa i} = f_i - f_{\kappa}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). Comme  $s_{\kappa i}$  est holomorphe, les formes différentielles  $d''f_i$  se recollent en une forme différentielle  $u$  de  $\mathcal{C}^\infty(X, \rho \otimes \Omega^{0,1})$ . Il existe donc une section  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(X, \rho)$  telle que

$$d''f = u$$

(§ 2, théorème 1, corollaire). Ceci montre que les sections  $s_i - f_i + f|_{U_i}$  qui se recollent en une section  $s$  de  $\pi$  sont holomorphes. Comme elles relèvent  $t|_{U_i}$ , ceci démontre l'assertion.

THÉORÈME 3. *Tout fibré vectoriel holomorphe  $\pi$  sur  $X$  est trivial.*

On va raisonner par récurrence sur le rang  $p$  de  $\pi$ . Si  $p$  est égal à 1, l'assertion résulte du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2. Supposons  $p$  au moins égal à 2 et le théorème démontré pour  $p - 1$ .

Nous allons tout d'abord construire une section holomorphe  $s_1$  de  $\pi$  partout non nulle. Le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une section holomorphe  $s$  de  $\pi$  non identiquement nulle. Pour toute carte  $\Phi$  de  $\pi$  ayant pour domaine un ensemble connexe  $U$ , on a

$$s_{\Phi} = (u_1, \dots, u_p)$$

où  $u_1, \dots, u_p$  sont des fonctions holomorphes sur  $U$  dont l'une au moins n'est pas nulle. On vérifie aisément que le diviseur  $v$  défini par

$$v|_U = \inf_{1 \leq j \leq p} (u_j)$$

est indépendant de  $\Phi$  et l'on désigne par  $f$  une fonction holomorphe sur  $X$  ayant  $v$  pour diviseur (théorème 2). Il est clair que la section

$$s_1 = \frac{s}{f}$$

est holomorphe et partout non nulle.

Désignons par  $\rho$  le fibré en droites holomorphe engendré par  $s_1$  et par  $\sigma$  le fibré quotient de  $\pi$  par  $\rho$ . Par hypothèse de récurrence, il existe des sections holomorphes  $t_2, \dots, t_p$  de  $\sigma$  qui engendent la fibre en tout point. Ces sections se relèvent en des sections holomorphes  $s_2, \dots, s_p$  de  $\pi$  (proposition 2). Il est clair que  $s_1, \dots, s_p$  engendent la fibre de  $\pi$  en tout point, ce qui démontre l'assertion.