Il faut montrer que pour toute section $u$ de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact $K$ de $U$ et tout nombre réel $\varepsilon$ strictement positif, il existe une section $v$ de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\| v - u \|_{L^2, K} \leqslant \varepsilon$$

la semi-norme $\| \quad \|_{L^2, K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur $\Omega^1$ et $\pi$. On peut supposer que le complémentaire de $K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans $X$ et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de $X$ ayant la même propriété, telle que $K$ soit égal à $K_0$ (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u .$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section $u_1$ de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_1 - u_0 \|_{L^2, K_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2} .$$

Pour tout entier $j$ strictement positif, on construit de la même manière une section $u_j$ de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_j - u_{j-1} \|_{L^2, K_{j-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} .$$

Pour tout entier $n$, la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geqq n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par $v_n$ sa limite. Il est clair que les sections $v_n$ se recollent en une section $v$ de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier $n$ tel que

$$\| v - u_n \|_{L^2, K} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

On a alors

$$\| v - u \|_{L^2, K} \leqslant \| v - u_n \|_{L^2, K} + \| u_n - u \|_{L^2, K} \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

## § 2. Calcul de quelques groupes de cohomologie

Lemme 1. *Pour tout point $x$ de $X$, il existe une fonction méromorphe $h$ sur $X$, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$ possédant un pôle simple au point $x$.*

Désignons par $\rho$ un fibré en droites holomorphe sur $X$ et par $s$ une section holomorphe de $\rho$ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de

Behnke-Stein qu'il existe une section holomorphe $t$ de $\rho$ non nulle au point $x$. Il suffit alors de prendre pour $h$ la fonction $\frac{t}{s}\cdot$

*Remarque 1.*

On conserve les notations du lemme 1. La fonction méromorphe $h$ définit une application holomorphe de $X$ dans $\mathbf{P}^1$ de rang 1 au point $x$, telle que

$$h^{-1}(h(x)) = \{x\}.$$

Pour tout voisinage $U$ relativement compact de $x$ dans $X$, il existe un voisinage ouvert $V$ de $x$ dans $U$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) La restriction de $h$ à $V$ est un isomorphisme de $V$ sur un voisinage ouvert de $(0:1)$ dans $\mathbf{P}^1$.

(2) La trace de $h^{-1}(h(V))$ sur $\overline{U}$ est égale à $V$.

En effet, supposons qu'il existe un système fondamental de voisinage ouverts $(V_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $x$ dans $U$ et, pour chaque entier $j$, un point $x_j$ de $V_j$ et un point $y_j$ de $\overline{U} \backslash V_j$ tels que

$$h(x_j) = h(y_j).$$

On peut toujours supposer que la suite $(y_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers un point $y$ de $\overline{U}$ et l'on a

$$h(y) = \lim_{j \to \infty} h(y_j) = \lim_{j \to \infty} h(x_j) = (0:1).$$

Ceci montre que l'on a

$$y = \lim_{j \to \infty} y_j = x$$

ce qui est absurde puisque $h$ est de rang 1 au point $x$.

Lemme 2. *On désigne par $U$ un ensemble ouvert relativement compact de $X$. Pour toute forme différentielle $u$ de $L^2_c(U, \Omega^{0,1})$, il existe une fonction $f$ de $H^1_{\mathrm{loc}}(U, \mathbf{C})$ telle que*

$$d'' f = u.$$

Pour tout point $x$ de $U$, il existe une application holomorphe $h$ de $X$ dans $\mathbf{P}^1$ et un voisinage ouvert $V$ de $x$ dans $U$ vérifiant les conditions de la remarque 1. Par partition de l'unité, on se ramène aisément au cas où le support de $u$ est contenu dans $V$. On définit alors une forme différentielle $v$ de $L^2(\mathbf{P}^1, \Omega^{0,1})$ en posant

$$\begin{cases} v(z) = (h|_V)_*(u)(z) & \text{si } z \in h(V) \\ v(z) = 0 & \text{si } z \in \mathbf{P}^1 \backslash h(V). \end{cases}$$

Comme $\mathbf{P}^1$ est de genre 0, il existe une fonction $g$ de $H^1(\mathbf{P}^1, \mathbf{C})$ telle que

$$v = d''g .$$

Il suffit alors de poser

$$f = (g \cdot h)|_U .$$

THÉORÈME 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ *est nul.*

Désignons par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de $X$ dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte. Soit $u$ une forme différentielle de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{0,1})$. Pour tout entier $j$, on pose

$$u_j = \chi_{K_{j+1}} u .$$

Il existe une fonction $f_j$ de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\chi_{K_{j+1}} d'' f_j = u_j$$

(lemme 2). En particulier, la fonction

$$\chi_{K_{j+1}}(f_{j+1} - f_j)$$

appartient à $B_{K_{j+1}}(X, \mathbf{C}_X)$ et le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une fonction holomorphe $g_j$ sur $X$ telle que

$$\| f_{j+1} - f_j - g_j \|_{L^2, K_j} \leqslant \frac{1}{2^j} ,$$

la semi-norme étant relative à une métrique hermitienne sur $\Omega^1$. Pour tout entier $n$, la série

$$\sum_{j \geqq n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j)$$

converge vers un élément de $B_{K_n}(X, \mathbf{C}_X)$ et l'on pose

$$w_n = \chi_{K_n}(f_n - g_0 - \cdots - g_{n-1}) + \sum_{j \geqq n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j) .$$

Il est clair que les fonctions $w_n$ se recollent en une fonction $w$ de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et l'on a

$$d'' w = u$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphe* $\rho$ *sur* $X$ *est trivial. En particulier, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \rho)$ *est nul.*

On sait qu'il existe une section indéfiniment dérivable $s$ de $\rho$ partout non nulle (chap. 0, § 2, théorème 1, corollaire). Désignons par $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement de $X$ par des domaines de cartes de $\rho$ et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant $\rho$. La section $s$ est représentée par des fonctions $s_\iota$ vérifiant les relations

$$s_\iota = g_{\iota\kappa} s_\kappa .$$

En particulier, les formes différentielles $\dfrac{d'' s_\iota}{2i\pi s_\iota}$ se recollent en une forme $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction $f$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f)\, s$ de $\rho$ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ *s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X, \Omega^{1,0}) .$$

L'injection canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ définit par passage au quotient une application linéaire $\alpha$ de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec $u_1$ de bidegré $(1, 0)$ et $f$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f .$$

On peut écrire

$$u = v + df .$$

Si de plus $u$ est fermée, la forme différentielle $v$ est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de $\alpha$ est égal à l'image de $d'$. C'est immédiat.

## § 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble $A$ de $X$, on pose

$$\hat{A} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leqslant \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X) \} .$$

On dit que $A$ est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à $\hat{A}$.