**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 21 (1975)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.
**Kapitel:** §1. Théorème de Behnke-Stein
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-47334

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# CHAPITRE V

# COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

*Dans tout ce chapitre, on désigne par $X$ une courbe holomorphe connexe non compacte (dénombrable à l'infini) et par $\pi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$.*

## § 1. THÉORÈME DE BEHNKE-STEIN

Pour tout ensemble compact $K$ de $X$, on désigne par $B_K(X, \pi)$ le sous-espace fermé de $L^2_K(X, \pi)$ défini par

$$B_K(X,\pi) = \{ v \in L^2_K(X,\pi) \mid v|_{\mathring{K}} \text{ est holomorphe} \}$$

(chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

LEMME 1. *Considérons la forme bilinéaire*

$$\Delta : L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

*Pour qu'une section $u$ de $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur différentiel*

$$d'' : H^1_K(X,\pi) \to L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*il suffit qu'elle soit $\Delta$-orthogonale au sous-espace $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.*

Désignons par $\lambda$ une forme linéaire continue sur $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de $d''$. Par dualité, il existe une section $v$ de $L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ , v)\,.$$

En particulier, pour toute section $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathring{K}, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \lambda(d''h) = 0\,.$$

Le théorème de régularité (chap. III, § 1, théorème 2, corollaire) montre que

$v$ appartient à $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et l'on conclut en remarquant que l'image de $d''$ est fermée (chap. III, § 2, proposition 2).

LEMME 2. *Soit $K_1$ un ensemble compact de $X$ dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte dans $X$ et soit $K_2$ un voisinage compact de $K_1$. On désigne par $E$ (resp. $F$) le sous-espace de $L^2_{K_1}(X, \pi)$ formé des sections de la forme $\chi_{K_1} u$ où $u$ est une section de $B_{K_2}(X, \pi)$ (resp. une section de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de $K_1$). Alors l'espace $E$ est dense dans l'espace $F$ pour la topologie induite par $L^2_{K_1}(X, \pi)$.*

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire $\lambda$ continue sur $L^2_{K_1}(X, \pi)$ et nulle sur $E$ s'annule sur $F$. Par dualité, il existe une section $v$ de $L^2_{K_1}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ , v).$$

Montrons que $v$ est dans l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to L^2_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1}).$$

Pour cela, il suffit de montrer que $v$ est $\Delta$-orthogonale à $B_{K_2}(X, \pi)$ (lemme 1). Or, pour toute section $u$ de cet espace, on a

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v) = \int_X (\chi_{K_1} u, v) = \lambda(\chi_{K_1} u) = 0.$$

Il existe donc une section $w$ de $H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$v = d'' w.$$

Le théorème de régularité montre que $w$ est holomorphe sur $X \backslash K_1$ et puisque toutes les composantes connexes de $X \backslash K_1$ rencontrent $X \backslash K_2$, le principe du prolongement analytique montre que le support de $w$ est contenu dans $K_1$.

Pour toute section $u$ de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de $K_1$, on a

$$\lambda(\chi_{K_1} u) = \int_X (u, v) = \int_X (u, d'' w) = -\int_X (d'' u, w) = 0$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1 (Behnke-Stein). *Pour tout ensemble ouvert $U$ de $X$ dont le complémentaire n'a pas de composante connexe compacte, l'application de restriction de $\mathcal{O}(X, \pi)$ dans $\mathcal{O}(U, \pi)$ est d'image dense.*

Il faut montrer que pour toute section $u$ de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact $K$ de $U$ et tout nombre réel $\varepsilon$ strictement positif, il existe une section $v$ de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\| v - u \|_{L^2,K} \leqslant \varepsilon$$

la semi-norme $\| \ \|_{L^2,K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur $\Omega^1$ et $\pi$. On peut supposer que le complémentaire de $K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans $X$ et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de $X$ ayant la même propriété, telle que $K$ soit égal à $K_0$ (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u \, .$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section $u_1$ de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_1 - u_0 \|_{L^2,K_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2} \, .$$

Pour tout entier $j$ strictement positif, on construit de la même manière une section $u_j$ de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_j - u_{j-1} \|_{L^2,K_{j-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \, .$$

Pour tout entier $n$, la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geqslant n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par $v_n$ sa limite. Il est clair que les sections $v_n$ se recollent en une section $v$ de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier $n$ tel que

$$\| v - u_n \|_{L^2,K} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On a alors

$$\| v - u \|_{L^2,K} \leqslant \| v - u_n \|_{L^2,K} + \| u_n - u \|_{L^2,K} \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

## § 2. Calcul de quelques groupes de cohomologie

Lemme 1. *Pour tout point $x$ de $X$, il existe une fonction méromorphe $h$ sur $X$, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$ possédant un pôle simple au point $x$.*

Désignons par $\rho$ un fibré en droites holomorphe sur $X$ et par $s$ une section holomorphe de $\rho$ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de