Chapitre V COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

CHAPITRE V

COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X une courbe holomorphe connexe non compacte (dénombrable à l'infini) et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

§ 1. THÉORÈME DE BEHNKE-STEIN

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $B_K(X, \pi)$ le sous-espace fermé de $L^2_K(X, \pi)$ défini par

$$B_K(X,\pi) = \{ v \in L^2_K(X,\pi) \mid v|_{\mathring{K}} \text{ est holomorphe} \}$$

(chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

LEMME 1. *Considérons la forme bilinéaire*

$$\Delta : L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

Pour qu'une section u de $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H^1_K(X,\pi) \to L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

il suffit qu'elle soit Δ-orthogonale au sous-espace $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Désignons par λ une forme linéaire continue sur $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d''. Par dualité, il existe une section v de $L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ ,v)\,.$$

En particulier, pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathring{K}, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \lambda(d''h) = 0\,.$$

Le théorème de régularité (chap. III, § 1, théorème 2, corollaire) montre que

v appartient à $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et l'on conclut en remarquant que l'image de d'' est fermée (chap. III, § 2, proposition 2).

LEMME 2. *Soit K_1 un ensemble compact de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et soit K_2 un voisinage compact de K_1. On désigne par E (resp. F) le sous-espace de $L^2_{K_1}(X, \pi)$ formé des sections de la forme $\chi_{K_1} u$ où u est une section de $B_{K_2}(X, \pi)$ (resp. une section de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1). Alors l'espace E est dense dans l'espace F pour la topologie induite par $L^2_{K_1}(X, \pi)$.*

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire λ continue sur $L^2_{K_1}(X, \pi)$ et nulle sur E s'annule sur F. Par dualité, il existe une section v de $L^2_{K_1}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ ,v).$$

Montrons que v est dans l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to L^2_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1}).$$

Pour cela, il suffit de montrer que v est Δ-orthogonale à $B_{K_2}(X, \pi)$ (lemme 1). Or, pour toute section u de cet espace, on a

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v) = \int_X (\chi_{K_1} u, v) = \lambda(\chi_{K_1} u) = 0.$$

Il existe donc une section w de $H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$v = d'' w.$$

Le théorème de régularité montre que w est holomorphe sur $X \backslash K_1$ et puisque toutes les composantes connexes de $X \backslash K_1$ rencontrent $X \backslash K_2$, le principe du prolongement analytique montre que le support de w est contenu dans K_1.

Pour toute section u de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1, on a

$$\lambda(\chi_{K_1} u) = \int_X (u, v) = \int_X (u, d'' w) = -\int_X (d'' u, w) = 0$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1 (Behnke-Stein). *Pour tout ensemble ouvert U de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe compacte, l'application de restriction de $\mathcal{O}(X, \pi)$ dans $\mathcal{O}(U, \pi)$ est d'image dense.*

Il faut montrer que pour toute section u de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact K de U et tout nombre réel ε strictement positif, il existe une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\| v - u \|_{L^2, K} \leqslant \varepsilon$$

la semi-norme $\| \ \|_{L^2, K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur Ω^1 et π. On peut supposer que le complémentaire de K n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de X ayant la même propriété, telle que K soit égal à K_0 (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u .$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section u_1 de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_1 - u_0 \|_{L^2, K_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2} .$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit de la même manière une section u_j de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_j - u_{j-1} \|_{L^2, K_{j-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} .$$

Pour tout entier n, la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geq n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par v_n sa limite. Il est clair que les sections v_n se recollent en une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier n tel que

$$\| v - u_n \|_{L^2, K} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

On a alors

$$\| v - u \|_{L^2, K} \leqslant \| v - u_n \|_{L^2, K} + \| u_n - u \|_{L^2, K} \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

§ 2. Calcul de quelques groupes de cohomologie

Lemme 1. *Pour tout point x de X, il existe une fonction méromorphe h sur X, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$ possédant un pôle simple au point x.*

Désignons par ρ un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de

Behnke-Stein qu'il existe une section holomorphe t de ρ non nulle au point x. Il suffit alors de prendre pour h la fonction $\frac{t}{s}\cdot$

Remarque 1.

On conserve les notations du lemme 1. La fonction méromorphe h définit une application holomorphe de X dans $\mathbf{P}^1$ de rang 1 au point x, telle que

$$h^{-1}(h(x)) = \{x\}.$$

Pour tout voisinage U relativement compact de x dans X, il existe un voisinage ouvert V de x dans U vérifiant les conditions suivantes:

(1) La restriction de h à V est un isomorphisme de V sur un voisinage ouvert de $(0{:}1)$ dans $\mathbf{P}^1$.

(2) La trace de $h^{-1}(h(V))$ sur $\overline{U}$ est égale à V.

En effet, supposons qu'il existe un système fondamental de voisinage ouverts $(V_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de x dans U et, pour chaque entier j, un point x_j de V_j et un point y_j de $\overline{U}\backslash V_j$ tels que

$$h(x_j) = h(y_j).$$

On peut toujours supposer que la suite $(y_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge vers un point y de $\overline{U}$ et l'on a

$$h(y) = \lim_{j\to\infty} h(y_j) = \lim_{j\to\infty} h(x_j) = (0:1).$$

Ceci montre que l'on a

$$y = \lim_{j\to\infty} y_j = x$$

ce qui est absurde puisque h est de rang 1 au point x.

Lemme 2. *On désigne par U un ensemble ouvert relativement compact de X. Pour toute forme différentielle u de $L^2_c(U, \Omega^{0,1})$, il existe une fonction f de $H^1_{\mathrm{loc}}(U, \mathbf{C})$ telle que*

$$d''f = u.$$

Pour tout point x de U, il existe une application holomorphe h de X dans $\mathbf{P}^1$ et un voisinage ouvert V de x dans U vérifiant les conditions de la remarque 1. Par partition de l'unité, on se ramène aisément au cas où le support de u est contenu dans V. On définit alors une forme différentielle v de $L^2(\mathbf{P}^1, \Omega^{0,1})$ en posant

$$\begin{cases} v(z) = (h|_V)_*(u)(z) & \text{si } z\in h(V) \\ v(z) = 0 & \text{si } z\in \mathbf{P}^1\backslash h(V). \end{cases}$$

Comme $\mathbf{P}^1$ est de genre 0, il existe une fonction g de $H^1(\mathbf{P}^1, \mathbf{C})$ telle que

$$v = d''g .$$

Il suffit alors de poser

$$f = (g \cdot h)|_U .$$

THÉORÈME 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ *est nul.*

Désignons par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte. Soit u une forme différentielle de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{0,1})$. Pour tout entier j, on pose

$$u_j = \chi_{K_{j+1}} u .$$

Il existe une fonction f_j de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\chi_{K_{j+1}} d'' f_j = u_j$$

(lemme 2). En particulier, la fonction

$$\chi_{K_{j+1}}(f_{j+1} - f_j)$$

appartient à $B_{K_{j+1}}(X, \mathbf{C}_X)$ et le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une fonction holomorphe g_j sur X telle que

$$\| f_{j+1} - f_j - g_j \|_{L^2, K_j} \leqslant \frac{1}{2^j} ,$$

la semi-norme étant relative à une métrique hermitienne sur Ω^1. Pour tout entier n, la série

$$\sum_{j \geqq n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j)$$

converge vers un élément de $B_{K_n}(X, \mathbf{C}_X)$ et l'on pose

$$w_n = \chi_{K_n}(f_n - g_0 - \cdots - g_{n-1}) + \sum_{j \geqq n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j) .$$

Il est clair que les fonctions w_n se recollent en une fonction w de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et l'on a

$$d'' w = u$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphe* ρ *sur* X *est trivial. En particulier, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \rho)$ *est nul.*

On sait qu'il existe une section indéfiniment dérivable s de ρ partout non nulle (chap. 0, § 2, théorème 1, corollaire). Désignons par $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement de X par des domaines de cartes de ρ et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant ρ. La section s est représentée par des fonctions s_ι vérifiant les relations

$$s_\iota = g_{\iota\kappa}\, s_\kappa\,.$$

En particulier, les formes différentielles $\dfrac{d'' s_\iota}{2i\pi s_\iota}$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f)\, s$ de ρ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ *s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(X, \Omega^{1,0})\,.$$

L'injection canonique de $\mathscr{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ définit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et f dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f\,.$$

On peut écrire

$$u = v + df\,.$$

Si de plus u est fermée, la forme différentielle v est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de α est égal à l'image de d'. C'est immédiat.

§ 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble A de X, on pose

$$\hat{A} = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathscr{O}(X)\}\,.$$

On dit que A est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à $\hat{A}$.

Lemme 1. *Pour tout ensemble compact* K *de* X, *les ensembles* $\hat{K}$ *et* $\tilde{K}$ *sont égaux* [1]).

Soit x un point de $\tilde{K} \backslash K$ et soit V la composante connexe (relativement compacte) de x dans $X \backslash K$. Il est clair que ∂V est contenu dans K et le principe du maximum montre que l'on a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\partial V} \leqslant \|f\|_K$$

pour toute fonction holomorphe f sur X. Ceci montre que $\tilde{K}$ est contenu dans $\hat{K}$.

Réciproquement, soit x un point de $X \backslash \tilde{K}$. On vérifie aisément que l'on a

$$(K \cup \{x\})^{\sim} = \tilde{K} \cup \{x\}.$$

Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent que la fonction qui vaut 0 au voisinage de K et 1 au voisinage de x peut être uniformément approchée sur $\tilde{K} \cup \{x\}$ par une fonction holomorphe f sur X. Si l'approximation est bonne, on a

$$\|f\|_K \leqslant \|f\|_{\tilde{K}} < |f(x)|$$

ce qui montre que x n'appartient pas à $\hat{K}$.

Théorème 1 (Runge). *Pour tout ensemble compact* K *de* X, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'ensemble K *est holomorphiquement convexe.*

(2) L'ensemble $X \backslash K$ *n'a pas de composante connexe relativement compacte dans* X.

(3) Toute fonction holomorphe au voisinage de K *peut être uniformément approchée sur* K *par des fonctions holomorphes sur* X.

L'équivalence des deux premières conditions résulte du lemme 1. Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent qu'elles impliquent la troisième.

Supposons (3) vérifiée et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une composante connexe V de $X \backslash K$ relativement compacte dans X. On désigne par x un point de V et par h une fonction méromorphe sur X, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$, possédant un pôle simple au point x (§ 2, lemme 1) Cette fonction peut être uniformément approchée sur K par des fonctions

---

[1]) Pour la définition de $\tilde{K}$, voir l'appendice II.

holomorphes sur X et puisque ∂V est contenu dans K, le principe du maximum montre que h peut être uniformément approchée sur $K \cup V$ par des fonctions holomorphes sur X, ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. *(1) Les fonctions holomorphes sur* X *séparent les points.*

(2) Pour tout point x *de* X, *il existe une fonction holomorphe sur* X *de rang* 1 *au point* x.

(3) Pour tout ensemble compact K *de* X, *l'ensemble* $\hat{K}$ *est compact.*

On désigne par x et y des points distincts de X. Il est clair que l'on a

$$\{x, y\}^{\sim} = \{x, y\}$$

et la fonction qui vaut 0 (resp. 1) au point x (resp. y) peut être uniformément approchée sur $\{x, y\}$ par une fonction holomorphe sur X. Si l'approximation est bonne, elle prend des valeurs distinctes en x et y, ce qui démontre (1).

On désigne par x un point de X et par ϕ une carte de X dont le domaine contient x. Il existe un voisinage compact K de x dans le domaine de ϕ tel que $X \backslash K$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X. La fonction ϕ peut être uniformément approchée sur K par une fonction holomorphe f sur X. Si l'approximation est bonne, la fonction f est de rang 1 au point x (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4), ce qui démontre (2).

La dernière assertion résulte immédiatement du lemme 1 (appendice II, lemme 2).

Remarque 1.

On appelle *variété de Stein* toute variété holomorphe Y de dimension pure n, dénombrable à l'infini, vérifiant les conditions suivantes:

(1) Les fonctions holomorphes séparent les points de Y.

(2) Pour tout point x de Y, il existe une application holomorphe de Y dans $\mathbf{C}^n$ de rang n au point x.

(3) Pour toute partie compacte K de Y, l'ensemble

$$\hat{K} = \{ x \in Y \mid |u(x)| \leqslant \|u\|_K \text{ pour tout } u \in \mathcal{O}(Y) \}$$

est compact.

Le théorème 2 montre donc que toute courbe holomorphe ouverte dénombrable à l'infini est une variété de Stein.

§ 4. Fonctions méromorphes sur une courbe holomorphe non compacte

Théorème 1 (Mittag-Leffler). *Toute partie principale d'un fibré en droites holomorphe sur* X *provient d'une section méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 2).

Remarque 1.

En fait, le théorème 1 est valable pour tout fibré vectoriel holomorphe sur X (voir théorème 3 ci-dessous).

Théorème 2 (Weierstrass). *Tout diviseur de* X *est le diviseur d'une fonction méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 3).

Corollaire. *Toute fonction méromorphe* h *sur* X *est le quotient de deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas simultanément.*

Il existe une fonction holomorphe v sur X dont le diviseur est $\sup\big(-(h), 0\big)$. La fonction u définie par

$$u = vh$$

est holomorphe et ne s'annule pas en même temps que v, d'où l'assertion.

Proposition 1. *Soit* A *un ensemble fermé discret de* X *et soit* f *une fonction à valeurs complexes définie sur* A. *Il existe alors une fonction holomorphe* h *sur* X *prolongeant* f.

Désignons par u une fonction holomorphe sur X dont le diviseur est donné par la formule

$$(u) = \sum_{x \in A} 1 \cdot x$$

(théorème 2) et par v une fonction méromorphe sur X vérifiant les relations

$$\begin{aligned} &v_x - f(x)\, u_x^{-1} \in \mathcal{O}_x && \text{si } x \in A \\ &v_x \in \mathcal{O}_x && \text{si } x \in X \setminus A \end{aligned}$$

(théorème 1). Il suffit alors de poser

$$h = uv\,.$$

Proposition 2. *Désignons par* π *un fibré vectoriel holomorphe sur* X *et par* σ *le fibré quotient de* π *par un sous-fibré en droites holomorphe* ρ. *Pour toute section holomorphe* t *de* σ, *il existe une section holomorphe* s *de* π *relevant* t.

Par définition même du fibré quotient (chap. 0, § 2, exemple 3), il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une section holomorphe s_ι de π sur U_ι relevant $t|_{U_\iota}$. La section $s_{\kappa\iota}$ définie sur $U_\iota \cap U_\kappa$ par

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

prend ses valeurs dans ρ. Il existe donc pour chaque indice ι une section f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \rho)$ telle que

$$s_{\kappa\iota} = f_\iota - f_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). Comme $s_{\kappa\iota}$ est holomorphe, les formes différentielles $d'' f_\iota$ se recollent en une forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \rho \otimes \Omega^{0,1})$. Il existe donc une section f de $\mathscr{C}^\infty(X, \rho)$ telle que

$$d'' f = u$$

(§ 2, théorème 1, corollaire). Ceci montre que les sections $s_\iota - f_\iota + f|_{U_\iota}$ qui se recollent en une section s de π sont holomorphes. Comme elles relèvent $t|_{U_\iota}$, ceci démontre l'assertion.

Théorème 3. *Tout fibré vectoriel holomorphe* π *sur* X *est trivial.*

On va raisonner par récurrence sur le rang p de π. Si p est égal à 1, l'assertion résulte du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2. Supposons p au moins égal à 2 et le théorème démontré pour $p - 1$.

Nous allons tout d'abord construire une section holomorphe s_1 de π partout non nulle. Le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une section holomorphe s de π non identiquement nulle. Pour toute carte Φ de π ayant pour domaine un ensemble connexe U, on a

$$s_\Phi = (u_1, \ldots, u_p)$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions holomorphes sur U dont l'une au moins n'est pas nulle. On vérifie aisément que le diviseur v défini par

$$v|_U = \inf_{1 \leqq j \leqq p} (u_j)$$

est indépendant de Φ et l'on désigne par f une fonction holomorphe sur X ayant v pour diviseur (théorème 2). Il est clair que la section

$$s_1 = \frac{s}{f}$$

est holomorphe et partout non nulle.

Désignons par ρ le fibré en droites holomorphe engendré par s_1 et par σ le fibré quotient de π par ρ. Par hypothèse de récurrence, il existe des sections holomorphes $t_2, \ldots, t_p$ de σ qui engendrent la fibre en tout point. Ces sections se relèvent en des sections holomorphes $s_2, \ldots, s_p$ de π (proposition 2). Il est clair que $s_1, \ldots, s_p$ engendrent la fibre de π en tout point, ce qui démontre l'assertion.