

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.  
**Kapitel:** §6. Formes automorphes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**COROLLAIRE 2.** *Toute courbe holomorphe compacte connexe  $X$  plongée dans un espace projectif  $\mathbf{P}^n$  est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par  $\underline{a}$  l'idéal des polynômes de  $\mathbf{C}[T_0, \dots, T_n]$  qui s'annulent sur  $\psi^{-1}(X)$ , où  $\psi$  est la projection canonique de  $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$  dans  $\mathbf{P}^n$ , et par  $Y$  le lieu des zéros de  $\underline{a}$  dans  $\mathbf{P}^n$ . Puisque  $\psi^{-1}(X)$  est connexe, l'idéal  $\underline{a}$  est premier. Le corps  $\kappa(Y)$  des fonctions rationnelles sur  $Y$  est un sous-corps de  $\mathcal{K}(X)$ . Le théorème 1 montre alors que  $Y$  est une courbe algébrique de  $\mathbf{P}^n$ . Désignons par  $Y_0$  l'ensemble des points réguliers de  $Y$  et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X.$$

L'ensemble  $X_0$  est à la fois ouvert et fermé dans  $Y_0$ . Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que  $X$  est égal à  $Y$ , d'où l'assertion.

**THÉORÈME 2.** *Toute courbe holomorphe compacte connexe  $X$  se plonge dans  $\mathbf{P}^3$ .*

Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante de degré  $r$  sur  $X$ . On désigne par  $y$  une valeur régulière de  $f$ , par  $x_1, \dots, x_r$  les points de  $f^{-1}(y)$ , par  $x_{r+1}, \dots, x_n$  les points critiques de  $f$ . Il existe une fonction méromorphe  $g$  sur  $X$  séparant les points  $x_1, \dots, x_r$  et possédant un zéro simple aux points  $x_{r+1}, \dots, x_n$  (lemme 1). Désignons par  $\pi$  l'application  $(f:g)$  de  $X$  dans  $\mathbf{P}^2$  et par  $Y$  son image. L'application  $\pi$  est partout de rang 1 et le couple  $(X, \pi)$  est une normalisation de  $Y$  (théorème 1). Soit  $A$  l'ensemble des points singuliers de  $Y$  et soit  $h$  une fonction méromorphe sur  $X$  séparant les points de  $\pi^{-1}(A)$  (lemme 1). On montre aisément que l'application  $(f:g:h)$  est un plongement de  $X$  dans  $\mathbf{P}^3$ .

## § 6. FORMES AUTOMORPHES

Pour tout automorphisme  $\gamma$  du disque unité  $\mathbf{D}$ , on définit une fonction holomorphe sur  $\mathbf{D}$  en posant

$$J_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Pour tout couple  $(\gamma, \gamma')$  d'automorphismes et tout point  $z$  de  $\mathbf{D}$ , on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z) j_\gamma(z).$$

Nous supposons désormais que  $X$  est le quotient de  $\mathbf{D}$  par un groupe proprement discontinu  $\Gamma$  (chap. I, § 5, numéro 3) et nous désignerons par  $\pi$  la projection canonique de  $\mathbf{D}$  dans  $X$ .

Soit  $m$  un entier relatif. On appelle *forme automorphe de poids  $m$  relative à  $\Gamma$*  toute fonction méromorphe  $f$  sur  $\mathbf{D}$  telle que

$$f \cdot \gamma = j_\gamma^{-m} f$$

pour tout automorphisme  $\gamma$  de  $\Gamma$ . On désigne par  $\mathcal{K}(m, \Gamma)$  (resp.  $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ ) l'ensemble des formes automorphes (resp. des formes automorphes holomorphes) de poids  $m$  relatives à  $\Gamma$ .

Fixons une fois pour toutes une forme différentielle méromorphe non nulle  $\omega$  sur  $X$ . La forme différentielle  $\pi^*(\omega)$  s'écrit

$$\pi^*(\omega) = f dz$$

où  $f$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbf{D}$ . Pour tout automorphisme  $\gamma$  de  $\Gamma$  et tout point  $z$  de  $\mathbf{D}$ , on a

$$f(z) dz = \pi^*(\omega)(z) = \pi^*(\omega)(\gamma z) = f(\gamma z) j_\gamma(z) dz$$

ce qui montre que  $f$  est une forme automorphe de poids 1 relative à  $\Gamma$ .

Pour toute forme automorphe  $u$  de poids  $m$  relative à  $\Gamma$ , la fonction méromorphe  $uf^{-m}$  est  $\Gamma$ -invariante. On en déduit que l'application  $\Psi_m$  de  $\mathcal{K}(X)$  dans  $\mathcal{K}(m, \Gamma)$  définie par

$$\Psi_m(v) = (v \cdot \pi) f^m$$

est un isomorphisme pour tout entier  $m$ .

Nous allons chercher à quelles conditions une fonction méromorphe  $v$  sur  $X$  fournit une forme automorphe holomorphe sur  $\mathbf{D}$ .

Pour une telle fonction, on a

$$0_z(\Psi_m(v)) = 0_z(\pi^*(v)) + m 0_z(\pi^*(\omega)) \geq 0$$

pour tout point  $z$  de  $\mathbf{D}$ . Cette condition équivaut à

$$0_x(v) \geq -m 0_x(\omega) - \left[ m \left( 1 - \frac{1}{\rho_x} \right) \right] \quad {}^1)$$

pour tout point  $x$  de  $X$ , où  $\rho_x$  désigne le cardinal du groupe d'isotropie de  $\Gamma$  en tout point de  $\pi^{-1}(x)$ . On définit un diviseur  $a_m$  sur  $X$  en posant

<sup>1)</sup> Pour tout nombre réel  $c$ , on désigne par  $[c]$  la partie entière de  $c$ , i.e. l'entier relatif défini par

$$[c] = \sup \{ n \in \mathbf{Z} \mid n \leq c \} .$$

$$a_m(x) = \left( m 0_x(\omega) + \left[ m \left( 1 - \frac{1}{\rho_x} \right) \right] \right) x.$$

On voit donc que  $\Psi_m$  induit un isomorphisme de  $L(a_m)$  sur  $\mathcal{O}(m, \Gamma)$  (§ 3, remarque 1).

Pour toute fonction holomorphe  $u$  sur  $\mathbf{D}$  et pour tout entier relatif  $m$ , la série

$$p_\Gamma(u, m) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (u \cdot \gamma) j_\gamma^m$$

s'appelle la *série de Poincaré associée à  $u$* .

LEMME 1. *Si  $u$  est bornée et  $m$  au moins égal à 2, la série de Poincaré  $p_\Gamma(u, m)$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction de  $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ .*

Pour montrer que la série  $p_\Gamma(u, m)$  converge, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma^2$$

converge dans  $L_{\text{loc}}^1(\mathbf{D}, \mathbf{C})$  (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4). Désignons par  $z$  un point de  $\mathbf{D}$  et par  $K$  un voisinage compact de  $z$  dans  $\mathbf{D}$  tel que

$$\begin{cases} \gamma K = K & \text{si } \gamma \in \Gamma_z \\ \gamma K \cap K = \emptyset & \text{si } \gamma \notin \Gamma_z \end{cases}$$

(chap. I, § 5, lemme 3). La formule du changement de variable dans les intégrales doubles montre que l'on a

$$\|j_\gamma^2\|_{L^1, K} = \int_K |j_\gamma|^2 d\mu = \mu(\gamma K),$$

et par conséquent

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|j_\gamma^2\|_{L^1, K} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma K) = \text{Card}(\Gamma_z) \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \mu(\gamma K) \right)$$

en désignant par  $\Gamma_0$  un système de représentants de  $\Gamma/\Gamma_z$ . Ceci démontre l'assertion puisque les ensembles  $(\gamma K)_{\gamma \in \Gamma_0}$  sont deux à deux disjoints et contenus dans  $\mathbf{D}$ .

Montrons maintenant que  $p_\Gamma(u, m)$  est une fonction automorphe de poids  $m$ . Pour tout automorphisme  $\gamma$  de  $\Gamma$  et tout point  $z$  de  $\mathbf{D}$ , on a

$$\begin{aligned} p_\Gamma(u, m)(\gamma z) &= \sum_{\gamma' \in \Gamma} u(\gamma' \gamma z) j_{\gamma'}^m(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z) \sum_{\gamma' \in \Gamma} u(\gamma' \gamma z) j_{\gamma' \gamma}^m(z) \\ &= j_\gamma^{-m}(z) p_\Gamma(u, m)(z) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

LEMME 2. Pour  $m$  suffisamment grand, l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(m, \Gamma)$  est de dimension au moins 2.

On désigne par  $z_0$  un point de  $\mathbf{D}$  qui n'est pas un point fixe de  $\Gamma$  (i.e. un point régulier de l'application  $\pi$ ) et par  $K$  un voisinage compact de  $z_0$  tel que

$$\gamma K \cap K = \emptyset$$

pour tout automorphisme de  $\Gamma$  différent de l'identité.

Le lemme 1 montre qu'il existe un nombre fini d'automorphismes  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  de  $\Gamma$ , différents de l'identité tels que

$$\|j_\gamma\|_{L^\infty, K}^2 \leq \frac{1}{2}$$

pour tout automorphisme  $\gamma$  de  $\Gamma \setminus \{1, \gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ . On pose

$$z_v = \gamma_v(z_0)$$

pour tout entier  $v$  compris entre 1 et  $p$ . Soit  $u$  une fonction holomorphe bornée sur  $\mathbf{D}$ . Pour tout entier  $m$  au moins égal à 2, on peut écrire

$$p_\Gamma(u, m) - u - \sum_{1 \leq v \leq p} (u \cdot \gamma_v) j_{\gamma_v}^m = \sum_{\gamma \in \Gamma'} (u \cdot \gamma) j_\gamma^m$$

où l'on a posé

$$\Gamma' = \Gamma \setminus \{1, \gamma_1, \dots, \gamma_p\}.$$

Sur le compact  $K$  on a donc

$$\begin{aligned} & \left\| p_\Gamma(u, m) - u - \sum_{1 \leq v \leq p} (u \cdot \gamma_v) j_{\gamma_v}^m \right\|_{L^\infty, K} \\ & \leq 2^{-m+2} \|u\|_{L^\infty, \mathbf{D}} \sum_{\gamma \in \Gamma'} \|j_\gamma\|_{L^\infty, K}^2. \end{aligned}$$

Le membre de droite converge vers 0 lorsque  $m$  tend vers l'infini. Supposons que  $u$  possède un zéro d'ordre au moins 2 en chaque point  $z_1, \dots, z_p$ . Pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif et pour tout entier  $m$  suffisamment grand, on a

$$|p_\Gamma(u, m)(z_0) - u(z_0)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial p_\Gamma(u, m)}{\partial z}(z_0) - \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \right| \leq \varepsilon$$

(inégalités de Cauchy). Comme  $u(z_0)$  et  $\frac{\partial u}{\partial z}(z_0)$  sont arbitraires, ceci démontre l'assertion.

LEMME 3. Désignons par  $g$  le genre de  $X$ . Le nombre réel

$$2g - 2 + \sum_{x \in X} \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)$$

est strictement positif.

Désignons par  $m$  un entier suffisamment grand pour vérifier les conditions suivantes :

- (1) L'espace vectoriel  $\mathcal{O}(m, \Gamma)$  est de dimension au moins 2.
- (2) Pour tout point  $x$  de  $X$ , l'entier  $\rho_x$  divise  $m$ .

Désignons par  $\pi_m$  un fibré en droites holomorphe associé au diviseur  $a_m$ . Pour toute section holomorphe non nulle  $v$  de  $\pi_m$ , on a

$$\text{ch}(\pi_m) = 0(a_m) = 0(v) \geq 0.$$

Si l'ordre de  $a_m$  est nul, le fibré  $\pi_m$  est trivial ce qui contredit (1). Il est donc strictement positif et la condition (2) montre que l'on a

$$0(a_m) = m \left( 0(\omega) + \sum_{x \in X} \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right) \right)$$

ce qui démontre l'assertion (§ 3, théorème 1, corollaire).

THÉORÈME 1. Pour tout entier  $m$  au moins égal à 2, on a la relation

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(m, \Gamma) = (2m - 1)(g - 1) + \sum_{x \in X} \left[ m \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right) \right]$$

où  $g$  désigne le genre de  $X$ .

D'après la proposition 2 du paragraphe 3, il suffit de montrer que l'ordre de  $a_m$  est strictement supérieur à  $2g - 2$ .

Tout d'abord, pour tout couple  $(m, l)$  d'entiers strictement positifs, on a

$$\left[ m \left(1 - \frac{1}{l}\right) \right] \geq (m - 1) \left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

En effet, on peut écrire

$$m = ql + r$$

où  $q$  et  $r$  sont des entiers naturels tels que  $r$  soit compris entre 0 et  $l - 1$ .

Si  $r$  est nul, on a

$$\left[ m \left(1 - \frac{1}{l}\right) \right] = m \left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

Sinon  $q$  est au plus égal à  $\frac{m-1}{l}$  et l'on a

$$\left[ m \left( 1 - \frac{1}{l} \right) \right] = m - q - 1 \geq m - 1 - \frac{m-1}{l} = (m-1) \left( 1 - \frac{1}{l} \right)$$

ce qui établit l'assertion.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 0(a_m) &= m(2g-2) + \sum_{x \in X} \left[ m \left( 1 - \frac{1}{\rho_x} \right) \right] \\ &\geq m(2g-2) + (m-1) \sum_{x \in X} \left( 1 - \frac{1}{\rho_x} \right) \end{aligned}$$

ou encore

$$0(a_m) \geq (m-1) \left( 2g-2 + \sum_{x \in X} \left( 1 - \frac{1}{\rho_x} \right) \right) + 2g-2.$$

Si  $m$  est au moins égal à 2, le résultat est donc une conséquence du lemme 3

## § 7. VARIÉTÉS DE PICARD ET DE JACOBI

Désignons par  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension finie  $n$  et par  $\Gamma$  un réseau de  $E$  (i.e. un sous-groupe abélien de rang  $2n$ ). L'application canonique  $\pi$  de  $E$  dans  $E/\Gamma$  est un revêtement. On munit  $E/\Gamma$  de l'unique structure holomorphe faisant de  $\pi$  un isomorphisme local. On appelle *tore complexe* toute variété holomorphe isomorphe à une variété de la forme  $E/\Gamma$ .

Soit  $T$  (resp.  $T'$ ) un tore complexe de la forme  $E/\Gamma$  (resp.  $E'/\Gamma'$ ) et soit  $u$  un isomorphisme de  $T$  sur  $T'$ . On désigne par  $\pi$  (resp.  $\pi'$ ) l'application canonique de  $E$  dans  $T$  (resp. de  $E'$  dans  $T'$ ). Quitte à modifier  $u$  par un automorphisme de  $T'$ , on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \pi'(0).$$

Il existe alors un isomorphisme  $v$  de  $E$  sur  $E'$  et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \pi' \cdot v = u \cdot \pi.$$

Pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ , l'image  $v(\gamma)$  est un élément  $\gamma'$  de  $\Gamma'$  et l'on vérifie aisément que l'on a

$$v(z + \gamma) = v(z) + \gamma'$$