Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: §4. Fibrés amples

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

§ 4. Fibrés amples

Dans tout ce paragraphe, on désigne par g le genre de X et par π un fibré en droites holomorphes sur X.

Soient $s_0, \dots, s_n$ des sections holomorphes de π dont l'une au moins n'est pas nulle. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on pose

$$X_j = \{x \in X \mid s_j(x) \neq 0\}$$

et l'on définit une application holomorphe de X_j dans $\mathbf{P}^n$ par la formule

$$\phi_j(x) = \left(\frac{s_0}{s_j}(x) : \dots : \frac{s_n}{s_j}(x)\right).$$

Par définition même, les ϕ_j se recollent en une application holomorphe ϕ de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$ dans $\mathbf{P}^n$. Pour tout point x de $X \setminus \bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$, il existe un voisinage ouvert U de x, une fonction holomorphe h sur U et des sections holomorphes $s_0', \dots, s_n'$ de π sur U dont l'une au moins ne s'annule pas au point x, vérifiant les relations suivantes

$$s_0 = hs_0', \dots, s_n = hs_n'.$$

Supposons par exemple $s_j'(x)$ non nul. On prolonge l'application ϕ en posant

$$\phi(x) = \left(\frac{s_0'}{s_j'}(x) : \dots : \frac{s_n'}{s_j'}(x)\right).$$

L'application holomorphe ϕ de X dans $\mathbf{P}^n$ ainsi obtenue se désigne par $(s_0 : \dots : s_n)$.

On dit que le fibré π est *ample* si pour toute base $(s_0, \dots, s_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$, l'application $(s_0 : \dots : s_n)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^n$.

Remarque 1.

Désignons par $h_1, \dots, h_n$ des fonctions méromorphes sur X dont l'une au moins n'est pas nulle. On définit un diviseur u sur X en posant

$$u = -\inf((h_1), \dots, (h_n), 0).$$

Soit ρ un fibré en droites holomorphes sur X et soit s_0 une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Les sections de ρ définies par

$$s_1 = h_1 s_0, \dots, s_n = h_n s_0$$

sont holomorphes et l'une d'entre elles au moins n'est pas nulle. L'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ se désigne (abusivement) par $(h_1 : \ldots : h_n)$.

PROPOSITION 1. *Si la classe de Chern de* π *est au moins égale à* $2g$, *les sections holomorphes de* π *n'ont pas de zéro commun.*

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point x de X où toutes les sections holomorphes de π s'annulent. Désignons par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. L'application

$$\otimes s : \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) \rightarrow \mathbf{H}^0(X, \pi)$$

est injective. Elle est surjective en vertu de l'hypothèse faite sur x. D'autre part, la proposition 2 du paragraphe 3 montre que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi \otimes \rho^*) = \mathrm{ch}(\pi) - g$$

et

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 + \mathrm{ch}(\pi) - g$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. *On suppose que la classe de Chern de* π *est au moins égale à* $2g$. *Pour tout ensemble fini* A *de* X, *il existe une section holomorphe de* π *qui ne s'annule en aucun point de* A.

Il résulte en effet de la proposition 1 que l'ensemble des sections holomorphes de π qui s'annulent en un point de X forment un hyperplan de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$.

COROLLAIRE 2. *On suppose que la classe de Chern de* π *est au moins égale à* $2g + 1$.

(1) Pour tout couple (x, y) *de points distincts de* X, *il existe une section holomorphe de* π *qui s'annule au point* x *et ne s'annule pas au point* y.

(2) Pour tout point x *de* X, *il existe une section holomorphe de* π *qui possède un zéro simple au point* x.

On désigne par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. La classe de Chern du fibré $\pi \otimes \rho^*$ est au moins égale à $2g$ et la proposition 1 montre qu'il existe une section holomorphe t de ce fibré qui ne s'annule pas au point y (resp. x). La section $t \otimes s$ vérifie la condition (1) (resp. (2)).

THÉORÈME 1. *Si sa classe de Chern est au moins égale à* $2g + 1$, *le fibré* π *est ample.*

Désignons par $(s_0, \ldots, s_n)$ une base de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$. Pour tout couple (x, y) de points de X, il existe un entier j compris entre 0 et n tel que s_j ne s'annule pas sur $\{x, y\}$ (proposition 1, corollaire 1). Par définition, la relation

$$(s_0 : \ldots : s_n)(x) = (s_0 : \ldots : s_n)(y)$$

signifie qu'il existe un nombre complexe λ non nul tel que

$$\left(\frac{s_0}{s_j}(x), \ldots, \frac{s_n}{s_j}(x)\right) = \lambda \left(\frac{s_0}{s_j}(y), \ldots, \frac{s_n}{s_j}(y)\right).$$

Ceci n'est possible que si x et y coïncident (proposition 1, corollaire 2) et par conséquent l'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ est injective.

Il reste à montrer qu'elle est de rang 1. Désignons par x un point de X et par s une section holomorphe de π possédant un zéro simple au point x *(loc. cit.)*. On a

$$s = \lambda_0 s_0 + \ldots + \lambda_n s_n$$

et il existe un entier j compris entre 0 et n tel que $s_j(x)$ soit non nul. On a donc

$$\frac{s}{s_j} = \lambda_0 \frac{s_0}{s_j} + \ldots + \lambda_n \frac{s_n}{s_j}$$

et par conséquent

$$d\left(\frac{s}{s_j}\right)(x) = \lambda_0\, d\left(\frac{s_0}{s_j}\right)(x) + \ldots + \lambda_n\, d\left(\frac{s_n}{s_j}\right)(x).$$

Le membre de gauche étant non nul, il existe un entier k compris entre 0 et n tel que $d\,\frac{s_k}{s_j}(x)$ soit non nul ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre g se plonge dans $\mathbf{P}^{g+1}$. En particulier, toute courbe holomorphe compacte connexe de genre 0 est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et toute courbe elliptique se plonge dans $\mathbf{P}^2$.*

Il suffit d'appliquer le théorème 1 au fibré en droites holomorphe associé à un diviseur d'ordre $2g+1$ et de remarquer que l'on a alors

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g + 2$$

(§ 3, proposition 2).