

| | |
|---------------------|---|
| Zeitschrift: | L'Enseignement Mathématique |
| Herausgeber: | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique |
| Band: | 21 (1975) |
| Heft: | 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE |
| | |
| Artikel: | INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN |
| Autor: | Guenot, J. / Narasimhan, R. |
| Kapitel: | §4. Fibrés amples |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-47334 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

§ 4. FIBRÉS AMPLES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par g le genre de X et par π un fibré en droites holomorphes sur X .

Soient s_0, \dots, s_n des sections holomorphes de π dont l'une au moins n'est pas nulle. Pour tout entier j compris entre 0 et n , on pose

$$X_j = \{x \in X \mid s_j(x) \neq 0\}$$

et l'on définit une application holomorphe de X_j dans \mathbf{P}^n par la formule

$$\phi_j(x) = \left(\frac{s_0}{s_j}(x) : \dots : \frac{s_n}{s_j}(x) \right).$$

Par définition même, les ϕ_j se recollent en une application holomorphe ϕ de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$ dans \mathbf{P}^n . Pour tout point x de $X \setminus \bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$, il existe un voisinage ouvert U de x , une fonction holomorphe h sur U et des sections holomorphes s'_0, \dots, s'_n de π sur U dont l'une au moins ne s'annule pas au point x , vérifiant les relations suivantes

$$s_0 = hs'_0, \dots, s_n = hs'_n.$$

Supposons par exemple $s'_j(x)$ non nul. On prolonge l'application ϕ en posant

$$\phi(x) = \left(\frac{s'_0}{s'_j}(x) : \dots : \frac{s'_n}{s'_j}(x) \right).$$

L'application holomorphe ϕ de X dans \mathbf{P}^n ainsi obtenue se désigne par $(s_0 : \dots : s_n)$.

On dit que le fibré π est *ample* si pour toute base (s_0, \dots, s_n) de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$, l'application $(s_0 : \dots : s_n)$ est un plongement de X dans \mathbf{P}^n .

Remarque 1.

Désignons par h_1, \dots, h_n des fonctions méromorphes sur X dont l'une au moins n'est pas nulle. On définit un diviseur u sur X en posant

$$u = -\inf((h_1), \dots, (h_n), 0).$$

Soit ρ un fibré en droites holomorphes sur X et soit s_0 une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Les sections de ρ définies par

$$s_1 = h_1 s_0, \dots, s_n = h_n s_0$$

sont holomorphes et l'une d'entre elles au moins n'est pas nulle. L'application $(s_0 : \dots : s_n)$ se désigne (abusivement) par $(h_1 : \dots : h_n)$.

PROPOSITION 1. *Si la classe de Chern de π est au moins égale à $2g$, les sections holomorphes de π n'ont pas de zéro commun.*

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point x de X où toutes les sections holomorphes de π s'annulent. Désignons par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. L'application

$$\otimes s : \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) \rightarrow \mathbf{H}^0(X, \pi)$$

est injective. Elle est surjective en vertu de l'hypothèse faite sur x . D'autre part, la proposition 2 du paragraphe 3 montre que l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) = 1 - g + \text{ch}(\pi \otimes \rho^*) = \text{ch}(\pi) - g$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 + \text{ch}(\pi) - g$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. *On suppose que la classe de Chern de π est au moins égale à $2g$. Pour tout ensemble fini A de X , il existe une section holomorphe de π qui ne s'annule en aucun point de A .*

Il résulte en effet de la proposition 1 que l'ensemble des sections holomorphes de π qui s'annulent en un point de X forment un hyperplan de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$.

COROLLAIRE 2. *On suppose que la classe de Chern de π est au moins égale à $2g + 1$.*

(1) *Pour tout couple (x, y) de points distincts de X , il existe une section holomorphe de π qui s'annule au point x et ne s'annule pas au point y .*

(2) *Pour tout point x de X , il existe une section holomorphe de π qui possède un zéro simple au point x .*

On désigne par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. La classe de Chern du fibré $\pi \otimes \rho^*$ est au moins égale à $2g$ et la proposition 1 montre qu'il existe une section holomorphe t de ce fibré qui ne s'annule pas au point y (resp. x). La section $t \otimes s$ vérifie la condition (1) (resp. (2)).

THÉORÈME 1. *Si sa classe de Chern est au moins égale à $2g + 1$, le fibré π est ample.*

Désignons par (s_0, \dots, s_n) une base de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$. Pour tout couple (x, y) de points de X , il existe un entier j compris entre 0 et n tel que s_j ne s'annule pas sur $\{x, y\}$ (proposition 1, corollaire 1). Par définition, la relation

$$(s_0 : \dots : s_n)(x) = (s_0 : \dots : s_n)(y)$$

signifie qu'il existe un nombre complexe λ non nul tel que

$$\left(\frac{s_0}{s_j}(x), \dots, \frac{s_n}{s_j}(x) \right) = \lambda \left(\frac{s_0}{s_j}(y), \dots, \frac{s_n}{s_j}(y) \right).$$

Ceci n'est possible que si x et y coïncident (proposition 1, corollaire 2) et par conséquent l'application $(s_0 : \dots : s_n)$ est injective.

Il reste à montrer qu'elle est de rang 1. Désignons par x un point de X et par s une section holomorphe de π possédant un zéro simple au point x (*loc. cit.*). On a

$$s = \lambda_0 s_0 + \dots + \lambda_n s_n$$

et il existe un entier j compris entre 0 et n tel que $s_j(x)$ soit non nul. On a donc

$$\frac{s}{s_j} = \lambda_0 \frac{s_0}{s_j} + \dots + \lambda_n \frac{s_n}{s_j}$$

et par conséquent

$$d\left(\frac{s}{s_j}\right)(x) = \lambda_0 d\left(\frac{s_0}{s_j}\right)(x) + \dots + \lambda_n d\left(\frac{s_n}{s_j}\right)(x).$$

Le membre de gauche étant non nul, il existe un entier k compris entre 0 et n tel que $d\frac{s_k}{s_j}(x)$ soit non nul ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre g se plonge dans \mathbf{P}^{g+1} . En particulier, toute courbe holomorphe compacte connexe de genre 0 est isomorphe à \mathbf{P}^1 et toute courbe elliptique se plonge dans \mathbf{P}^2 .*

Il suffit d'appliquer le théorème 1 au fibré en droites holomorphe associé à un diviseur d'ordre $2g + 1$ et de remarquer que l'on a alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g + 2$$

(§ 3, proposition 2).