

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.  
**Kapitel:** §3. Théorème de Riemann-Roch  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

pour toute forme différentielle holomorphe  $v$  montre que la classe de  $w$  dans  $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$  est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à  $u$  est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

### § 3. THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Pour tout fibré vectoriel holomorphe  $\pi$  sur  $X$ , les espaces vectoriels complexes  $\mathbf{H}^0(X, \pi)$  et  $\mathbf{H}^1(X, \pi)$  sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité (*loc. cit.*) montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

PROPOSITION 1. Désignons par  $\pi$  un fibré vectoriel holomorphe de rang  $p$  sur  $X$  et par  $\rho$  un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur  $u$  de  $X$ . On a alors

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p \, 0(u).$$

On se ramène aisément au cas où  $u$  est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point  $x$  de  $X$ . Désignons par  $s$  une section holomorphe de  $\rho$  ayant  $u$  pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ d'' \downarrow & & \downarrow d'' \\ \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel  $\sigma$  sur  $X$ , le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \rightarrow & V(\sigma) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ 0 \rightarrow A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \rightarrow & W(\sigma) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où  $V(\sigma)$  et  $W(\sigma)$  désignent les conoyaux de  $\otimes s$  et  $\otimes s_x$  respectivement. La section  $s$  ne s'annulant qu'au point  $x$ , les lignes de ce diagramme sont exactes et l'application  $\alpha$  est un isomorphisme. Ceci montre que le diagramme (\*) se complète en un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) & \rightarrow & W(\pi) & \rightarrow 0 \\ & d'' \downarrow & & d'' \downarrow & & \downarrow \beta & \\ 0 \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho) & \rightarrow & W(\pi \otimes \Omega^{0,1}) & \rightarrow 0 \end{array}$$

On a alors (diagramme du serpent),

$$\chi(\pi) - \chi(\pi \otimes \rho) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\beta) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(\beta) = 0$$

et il suffit de vérifier les égalités

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\beta) = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(\beta) = 0.$$

Ceci étant un problème de germes, on peut supposer que  $x$  est l'origine dans  $\mathbb{C}$ , que  $\pi$  est le fibré produit de rang  $p$  et  $\rho$  le fibré produit de rang 1. L'application

$$\beta : (A_0^\infty)^p / s_0 (A_0^\infty)^p \rightarrow (A_0^\infty)^p / s_0 (A_0^\infty)^p$$

étant induite par l'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , elle est surjective (chap. III, § 1, remarque 2). D'autre part, pour tout germe  $u$  de  $(A_0^\infty)^p$  vérifiant la relation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = s_0 v$$

pour un certain  $v$ , on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - s_0 w) = 0$$

pour un certain  $w$  (*loc. cit.*). Le germe  $u - s_0 w$  étant holomorphe, il existe un germe  $h$  de  $(A_0^\infty)^p$  tel que

$$u - s_0 w - u(0) = s_0 h.$$

Ceci montre que le noyau de  $\beta$  est constitué des germes d'applications constantes de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^p$  ce qui achève la démonstration de la proposition.

**COROLLAIRE.** *Tout fibré en droites holomorphes  $\pi$  sur  $X$  est associé à un diviseur.*

Pour tout fibré en droites holomorphes  $\rho$  sur  $X$  associé à un diviseur  $u$ , on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho) \geq \chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + 0(u).$$

Si l'ordre de  $u$  est bien choisi, le fibré  $\pi \otimes \rho$  possède une section holomorphe non nulle  $s$ . On en déduit que le fibré  $\pi$  est associé au diviseur  $(s) - u$ .

**THÉOREME 1 (Riemann-Roch).** *Pour tout fibré en droites holomorphe  $\pi$  sur  $X$ , on a*

$$\chi(\pi) = 1 - g + \text{ch}(\pi)$$

où  $g$  désigne le genre de  $X$ .

On peut supposer que  $\pi$  est associé à un diviseur  $u$  (proposition 1, corollaire). On a donc

$$\chi(\pi) = \chi(\mathbf{C}_X) + 0(u) = 1 - g + \text{ch}(\pi)$$

(proposition 1 et § 1, proposition 3), ce qui démontre l'assertion.

**COROLLAIRE.** *Pour tout fibré en droites holomorphe  $\pi$  sur  $X$ , on a la relation*

$$\text{ch}(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = 2g - 2 - \text{ch}(\pi).$$

*En particulier, la classe de Chern du fibré  $\Omega^{1,0}$  est égale à  $2g - 2$ .*

Il suffit de remarquer que l'on a

$$\chi(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = -\chi(\pi) = -(1 - g + \text{ch}(\pi))$$

et d'appliquer le théorème de Riemann-Roch.

**PROPOSITION 2.** *Pour tout fibré en droites holomorphe  $\pi$  sur  $X$ , on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{ch}(\pi) < 0 & \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0. \\ (2) \quad \text{ch}(\pi) = 0 & \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0 & \text{si } \pi \text{ n'est pas (holo-} \\ & \text{morphiquement) trivial.} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 & \text{si } \pi \text{ est (holo-} \\ & \text{morphiquement) trivial.} \end{cases} \\ (3) \quad \text{ch}(\pi) = 2g - 2 & \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g - 1 & \text{si } \pi \text{ n'est pas iso-} \\ & \text{morphe à } \Omega^{1,0}. \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g & \text{si } \pi \text{ est isomorphe à} \\ & \Omega^{1,0}. \end{cases} \\ (4) \quad \text{ch}(\pi) > 2g - 2 & \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \text{ch}(\pi). \end{aligned}$$

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées (§ 1, proposition 3). Pour démontrer les deux dernières, il suffit de remarquer que l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \text{ch}(\pi) + \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$$

et d'appliquer ce qui précède au fibré  $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$ .

*Remarque 1.*

Pour tout diviseur  $u$  sur  $X$ , on pose

$$\begin{aligned} L(u) &= \{ h \in \mathcal{K}(X) \mid h = 0 \text{ ou } (h) \geq -u \} \\ I(u) &= \{ s \in \mathcal{K}(X, \Omega^{1,0}) \mid s = 0 \text{ ou } (s) \geq u \}. \end{aligned}$$

Désignons par  $\pi$  un fibré en droites holomorphes associé à  $u$ . Nous avons vu que l'espace vectoriel  $L(u)$  (resp.  $I(u)$ ) est canoniquement isomorphe à l'espace  $\mathbf{H}^0(X, \pi)$  (resp.  $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ ) (chap. I, § 3). En désignant sa dimension par  $l(u)$  (resp.  $i(u)$ ), le théorème de Riemann-Roch prend la forme plus classique suivante:

$$l(u) - i(u) = 1 - g + 0(u).$$

**THÉORÈME 2 (Riemann-Hurwitz).** *Soient  $X$  et  $Y$  deux courbes holomorphes compactes connexes de genre  $g(X)$  et  $g(Y)$  respectivement et soit  $h$  une application holomorphe non constante de  $X$  dans  $Y$ . On a la formule*

$$2g(X) - 2 = \deg(h)(2g(Y) - 2) + v(h)$$

où  $v(h)$  désigne l'indice de ramification de  $h$ <sup>1)</sup>.

Désignons par  $u$  une forme différentielle méromorphe non nulle sur  $Y$ . On a

$$0(h^*(u)) = \sum_{x \in X} 0_x(h^*(u)) = \sum_{x \in X} (v_x(h) + 1) 0_{h(x)}(u) + v(h)$$

(chap. I, § 4, lemme 2) et par conséquent

$$0(h^*(u)) = \sum_{y \in Y} \left( \sum_{x \in u^{-1}(y)} (v_x(h) + 1) \right) 0_y(u) + v(h) = \deg(h) 0(u) + v(h)$$

et l'on conclut en remarquant que l'ordre de  $h^*(u)$  (resp.  $u$ ) est égal à  $2g(X) - 2$  (resp.  $2g(Y) - 2$ ) (théorème 1, corollaire).

**COROLLAIRE.** *Pour qu'il existe une application holomorphe non constante de  $X$  dans  $Y$ , il faut que le genre de  $Y$  soit au plus égal au genre de  $X$ .*

<sup>1)</sup> C'est à dire la somme des indices de ramification de  $h$  aux différents points de  $X$  (chap. I, § 4).