Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §1. Théorème de décomposition de Weyl
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE IV

COURBES HOLOMORPHES COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X une courbe holomorphe compacte et connexe.

§ 1. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE WEYL

PROPOSITION 1. *Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$), il existe une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que $u + d'v$ (resp. $u - d''v$) soit fermée.*

Pour qu'une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur $d' \cdot d''$, il faut et il suffit que son intégrale soit nulle (chap. III, § 3, proposition 4). La formule de Stokes montre qu'il en est ainsi de la forme différentielle du. Il existe par conséquent une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$du = (d' \cdot d'')(v) = -(d'' \cdot d')(v)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Les opérateurs différentiels*

$$d : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}}) = \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

$$d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1}) \quad \textit{et} \quad d' \cdot d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

ont même image.

En particulier, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{H}^1(X) = \mathbf{H}^1(X, \Omega^{1,0}) = \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

Les inclusions

$$\operatorname{Im}(d' \cdot d'') \subset \operatorname{Im}(d'') \subset \operatorname{Im}(d)$$

sont évidentes. Réciproquement, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + u_2$$

avec u_1 de bidegré (1, 0) et u_2 de bidegré (0, 1). La proposition 1 montre qu'il existe des fonctions v_1 et v_2 de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telles que

$$d(u_1 + d'v_1) = 0 \quad \text{et} \quad d(u_2 - d''v_2) = 0 .$$

On en déduit que

$$du = du_1 + du_2 = (d' \cdot d'')(v_1 + v_2)$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.

On vient de donner une autre démonstration du fait que $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{C}$ pour une surface différentielle compacte connexe sous-jacente à une courbe holomorphe (chap. 0, § 4, théorème 3).

THÉORÈME 1 (Weyl). *Toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit d'une manière et d'une seule*

$$u = u_1 + u_2 + dv$$

où u_1 et u_2 sont des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ respectivement et v une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$.

Montrons tout d'abord l'existence de la décomposition. On peut écrire

$$u = u_1' + u_2'$$

avec u_1' de bidegré (1, 0) et u_2' de bidegré (0, 1). Il existe une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d(u_1' - d'v) = 0$$

(proposition 1). Il suffit alors de poser

$$u_1 = u_1' - d'v \quad \text{et} \quad u_2 = u_2' - d''v .$$

Pour montrer l'unicité, on suppose que l'on a

$$u_1 + u_2 + dv = 0 .$$

En appliquant l'opérateur différentiel d' aux deux membres de cette équation, on voit que v est harmonique, donc constante, ce qui démontre la proposition.

Toute forme différentielle holomorphe de degré 1 étant fermée, l'inclusion canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ induit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Désignons par $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ l'ensemble des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. On définit une application linéaire $\tilde{\beta}$ de $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ en associant à toute forme fermée sa composante de bidegré (0, 1). Par passage aux quotients, cette application définit une application linéaire β de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

PROPOSITION 2. *La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires*

$$0 \to \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to 0$$

est exacte.

La surjectivité de β résulte de la proposition 1, et le seul point non absolument trivial est de démontrer que tout élément u de $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ dont l'image par $\tilde{\beta}$ est de la forme $d''v$ est équivalent à une forme différentielle holomorphe. Or, la relation

$$u = u_1 + d''v$$

avec u_1 homogène de bidegré (1, 0) peut s'écrire

$$u = u_1 - d'v + dv\,.$$

La forme différentielle $u_1 - d'v$ étant fermée et homogène de bidegré (1,0), elle est holomorphe ce qui démontre l'assertion.

On appelle *genre de* X la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$. Par dualité (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire), c'est aussi la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. La proposition 2 montre que c'est un invariant différentiel (et même topologique): c'est la moitié de la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (chap. 0, § 5, remarque 2).

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ est nul. En effet, désignons par u une forme différentielle holomorphe sur $\mathbf{P}^1$. Pour chacune des cartes usuelles de $\mathbf{P}^1$, on peut écrire

$$u_{\phi_0} = v_0 dz \quad \text{et} \quad u_{\phi_1} = v_1 dz$$

où v_0 et v_1 sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. Par changement de cartes, on voit que l'on a

$$v_0(z) = -\frac{1}{z^2} v_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

en tout point z de $\mathbf{C}^*$. Ceci n'est possible que si v_0 et v_1 sont nulles.

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u\,dz$ sur $\mathbf{C}$. La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe π sur X est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de π. En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré π est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est de dimension 1, sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathscr{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x. On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u, v) = \sum_{x \in X} \text{Rés}\big((u, v), x\big).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Pour qu'une partie principale u de π provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire* $\text{Rés}(u, \ )$ *soit identiquement nulle sur* $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de X pour lesquels le germe u_x