Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: Chapitre IV COURBES HOLOMORPHES COMPACTES
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE IV

COURBES HOLOMORPHES COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X une courbe holomorphe compacte et connexe.

§ 1. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE WEYL

PROPOSITION 1. *Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$), il existe une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que $u + d'v$ (resp. $u - d''v$) soit fermée.*

Pour qu'une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur $d' \cdot d''$, il faut et il suffit que son intégrale soit nulle (chap. III, § 3, proposition 4). La formule de Stokes montre qu'il en est ainsi de la forme différentielle du. Il existe par conséquent une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$du = (d' \cdot d'')(v) = -(d'' \cdot d')(v)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Les opérateurs différentiels*

$$d : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}}) = \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

$$d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1}) \quad \textit{et} \quad d' \cdot d'' : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

ont même image.

En particulier, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{H}^1(X) = \mathbf{H}^1(X, \Omega^{1,0}) = \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

Les inclusions

$$\operatorname{Im}(d' \cdot d'') \subset \operatorname{Im}(d'') \subset \operatorname{Im}(d)$$

sont évidentes. Réciproquement, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + u_2$$

avec u_1 de bidegré (1, 0) et u_2 de bidegré (0, 1). La proposition 1 montre qu'il existe des fonctions v_1 et v_2 de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telles que

$$d(u_1 + d'v_1) = 0 \quad \text{et} \quad d(u_2 - d''v_2) = 0 .$$

On en déduit que

$$du = du_1 + du_2 = (d' \cdot d'')(v_1 + v_2)$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.

On vient de donner une autre démonstration du fait que $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{C}$ pour une surface différentielle compacte connexe sous-jacente à une courbe holomorphe (chap. 0, § 4, théorème 3).

THÉORÈME 1 (Weyl). *Toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit d'une manière et d'une seule*

$$u = u_1 + u_2 + dv$$

où u_1 et u_2 sont des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ respectivement et v une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$.

Montrons tout d'abord l'existence de la décomposition. On peut écrire

$$u = u_1' + u_2'$$

avec u_1' de bidegré (1, 0) et u_2' de bidegré (0, 1). Il existe une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d(u_1' - d'v) = 0$$

(proposition 1). Il suffit alors de poser

$$u_1 = u_1' - d'v \quad \text{et} \quad u_2 = u_2' - d''v .$$

Pour montrer l'unicité, on suppose que l'on a

$$u_1 + u_2 + dv = 0 .$$

En appliquant l'opérateur différentiel d' aux deux membres de cette équation, on voit que v est harmonique, donc constante, ce qui démontre la proposition.

Toute forme différentielle holomorphe de degré 1 étant fermée, l'inclusion canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ induit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Désignons par $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ l'ensemble des formes différentielles fermées de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. On définit une application linéaire $\tilde{\beta}$ de $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ en associant à toute forme fermée sa composante de bidegré (0, 1). Par passage aux quotients, cette application définit une application linéaire β de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

PROPOSITION 2. *La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires*

$$0 \to \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to 0$$

est exacte.

La surjectivité de β résulte de la proposition 1, et le seul point non absolument trivial est de démontrer que tout élément u de $Z(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ dont l'image par $\tilde{\beta}$ est de la forme $d''v$ est équivalent à une forme différentielle holomorphe. Or, la relation

$$u = u_1 + d''v$$

avec u_1 homogène de bidegré (1, 0) peut s'écrire

$$u = u_1 - d'v + dv\,.$$

La forme différentielle $u_1 - d'v$ étant fermée et homogène de bidegré (1,0), elle est holomorphe ce qui démontre l'assertion.

On appelle *genre de* X la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$. Par dualité (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire), c'est aussi la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. La proposition 2 montre que c'est un invariant différentiel (et même topologique): c'est la moitié de la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (chap. 0, § 5, remarque 2).

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ est nul. En effet, désignons par u une forme différentielle holomorphe sur $\mathbf{P}^1$. Pour chacune des cartes usuelles de $\mathbf{P}^1$, on peut écrire

$$u_{\phi_0} = v_0 dz \quad \text{et} \quad u_{\phi_1} = v_1 dz$$

où v_0 et v_1 sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. Par changement de cartes, on voit que l'on a

$$v_0(z) = -\frac{1}{z^2} v_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

en tout point z de $\mathbf{C}^*$. Ceci n'est possible que si v_0 et v_1 sont nulles.

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u\,dz$ sur $\mathbf{C}$. La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe π sur X est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de π. En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré π est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est de dimension 1, sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathscr{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x. On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u, v) = \sum_{x \in X} \text{Rés}\big((u, v), x\big).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Pour qu'une partie principale u de π provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire* $\text{Rés}(u, \ )$ *soit identiquement nulle sur* $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de X pour lesquels le germe u_x

n'est pas nul et par $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et n, l'ensemble U_j est le domaine d'une carte ϕ_j centrée au point x_j.

(2) Les ensembles $U_1, \ldots, U_n$ sont deux à deux disjoints.

(3) L'ensemble U_0 est égal à $X \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Quitte à diminuer $U_1, \ldots, U_n$, on peut supposer qu'il existe une section méromorphe u_j de π sur U_j représentant $u|_{U_j}$. On désigne par u_0 la fonction nulle sur U_0. Pour tout entier j compris entre 0 et n, il existe une section s_j de $\mathscr{C}^\infty(U_j, \pi)$ telle que

$$u_k - u_j = s_k - s_j$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les $d''s_j$ se recollent en une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la classe dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ est précisément $\delta(u)$.

En vertu du théorème de dualité, il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \text{Rés}(u, v)$$

pour toute section holomorphe v de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Les sections $s_j - u_j$ se recollent en une section h de $\mathscr{C}^\infty(U_0, \pi)$ et l'on a

$$d''h = t|_{U_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{X \backslash \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_{j,\varepsilon}} (d''h, v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (h, v)$$

où $V_{j,\varepsilon}$ désigne le disque de centre x_j et de rayon ε dans ϕ_j. D'autre part, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (s_j, v) = 0$$

car s_j est continue au point x_j et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (u_j, v) = \text{Rés}((u, v), x_j)$$

ce qui démontre l'assertion.

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ étant nul, toute partie principale u de $\mathbf{C}_{\mathbf{P}1}$ provient d'une fonction méromorphe, résultat qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement (chap. I, § 5, lemme 2).

Exemple 2.

Supposons que X soit une courbe elliptique. Pour qu'une partie principale u de $\mathbf{C}_X$ provienne d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, dz) = 0$$

(§ 1, exemple 2) (que le lecteur se souvienne de la fonction elliptique p de Weierstrass!).

Exemple 3.

Si X est une courbe holomorphe quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie principale u de $\Omega^{1,0}$ provienne d'une forme différentielle méromorphe est que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, 1) = 0\,.$$

Parmi les formes différentielles méromorphes, on distingue les espèces suivantes:

(1) Les formes différentielles holomorphes ou *formes différentielles abéliennes de première espèce.*

(2) Les formes différentielles méromorphes dont les seules singularités sont des pôles d'ordre au moins 2 à résidu nul ou *formes différentielles abéliennes de deuxième espèce.*

(3) Les formes différentielles méromorphes ayant comme seules singularités un nombre pair de pôles d'ordre 1, groupés deux par deux de résidus opposés, ou *formes différentielles abéliennes de troisième espèce.*

Avant d'aborder le deuxième problème de Cousin pour les courbes holomorphes compactes, il nous faut introduire quelques notions.

Pour toute forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty\,(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction h_ι de $\mathscr{C}^\infty\,(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$d''h_\iota = w\,|_{U_\iota}\,.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme de Grothendieck (chap. III, § 1, remarque 2). Sur $U_\iota \cap U_\kappa$, la fonction définie par

$$h_{\kappa\iota} = h_\kappa - h_\iota$$

est holomorphe et l'on vérifie aisément que la famille $(g_{\kappa\iota})$ avec

$$g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi h_{\kappa\iota})$$

est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à $(U_\iota)_{\iota\in I}$ dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. On obtient ainsi un homomorphisme canonique

$$\theta : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) .$$

Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X. On peut l'écrire sous la forme (chap. I, § 4, lemme 3)

$$u = \sum_{1\leq j\leq n} y_j - x_j$$

où $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des points de X (non nécessairement distincts).

On appelle *chaîne bordant* u toute famille $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ où c_j est un chemin joignant x_j à y_j dans X.

Le lemme suivant est à rapprocher d'un résultat démontré précédemment (chap. O, § 5, proposition 1).

LEMME 1. *Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X et soit $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ une chaîne bordant u. Il existe une forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal associé à u.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \sum_{1\leq j\leq n} \int_{c_j} v .$$

On se ramène aisément au cas d'un seul chemin c joignant un point z_0 à un point z_1 dans le domaine U_0 d'une carte ϕ de X dont l'image est un disque de $\mathbf{C}$. Il n'y a pas ici de problème de lissage *(loc. cit.)*.

On désigne par W et V deux disques de ϕ tels que W soit relativement compact dans V et V relativement compact dans U_0 et tels que l'image de c soit contenue dans W. Le diviseur u est représenté sur U_0 par la fonction méromorphe

$$u_0(z) = \frac{\phi(z) - \phi(z_1)}{\phi(z) - \phi(z_0)}$$

et sur le complémentaire U_1 de $\overline{V}$ par la fonction constante 1.

Désignons par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 sur $X\backslash V$, à 0 sur $\overline{W}$ et par h un logarithme de u_0 sur $U_0\backslash\overline{W}$. La forme différentielle définie par

$$\begin{cases} w = 0 & \text{sur } (X \backslash U_0) \cup \overline{W} \\ w = \dfrac{1}{2i\pi} d''(\alpha h) & \text{sur } U_0 \backslash \overline{W} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$.

La propriété (1) résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer (2), on remarque que la restriction de v à U_0 est exacte. On a donc

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} v \wedge d''(\alpha h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} df \wedge d(\alpha h)$$

où f est une fonction holomorphe sur U_0. Il résulte alors de la formule de Stokes que l'on a

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V} f \frac{du_0}{u_0} = f(z_1) - f(z_0)$$

ce qui démontre l'assertion.

THÉORÈME 2 (Abel). *Pour qu'un diviseur u d'ordre 0 soit le diviseur d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit qu'il existe une chaine $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ bordant u telle que*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v sur X.

Montrons que la condition est nécessaire. On peut supposer u non nul. On désigne par h une fonction méromorphe sur X dont u est le diviseur, par n le degré de h (chap. I, § 4) et par B l'ensemble des valeurs critiques de h.

Soit c un chemin joignant $(0:1)$ à $(1:0)$ dans $\mathbf{P}^1$, ne rencontrant pas B, sauf peut-être en ses extrémités. Il existe n chemins distincts $c_1, \ldots, c_n$ relevant c, chacun joignant un pôle de h à un zéro de h. La chaîne $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ borde u et l'on a

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = \int_c h_*(v)$$

(chap. I, § 4, proposition 3). On conclut en remarquant que $h_*(v)$ est nulle (§ 1, exemple 1).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Désignons par w une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions du lemme 1. La relation

$$\int_X v \wedge w = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v montre que la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à u est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

§ 3. Théorème de Riemann-Roch

Pour tout fibré vectoriel holomorphe π sur X, les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité *(loc. cit.)* montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

Proposition 1. *Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe de rang p sur X et par ρ un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur u de X. On a alors*

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p\, 0(u).$$

On se ramène aisément au cas où u est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point x de X. Désignons par s une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ d'' \downarrow & & \downarrow d'' \\ \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel σ sur X, le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \to & V(\sigma) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \to & A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \to & W(\sigma) & \to & 0 \end{array}$$

où $V(\sigma)$ et $W(\sigma)$ désignent les conoyaux de $\otimes s$ et $\otimes s_x$ respectivement. La section s ne s'annulant qu'au point x, les lignes de ce diagramme sont exactes et l'application α est un isomorphisme. Ceci montre que le diagramme (*) se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathscr{C}^\infty(X,\pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X,\pi\otimes\rho) & \to & W(\pi) & \to 0 \\
 & d'' \downarrow & & d'' \downarrow & & \downarrow \beta & \\
0 \to & \mathscr{C}^\infty(X,\pi\otimes\Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X,\pi\otimes\Omega^{0,1}\otimes\rho) & \to & W(\pi\otimes\Omega^{0,1}) & \to 0
\end{array}$$

On a alors (diagramme du serpent),

$$\chi(\pi) - \chi(\pi\otimes\rho) + \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}(\beta) - \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Coker}(\beta) = 0$$

et il suffit de vérifier les égalités

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}(\beta) = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Coker}(\beta) = 0\,.$$

Ceci étant un problème de germes, on peut supposer que x est l'origine dans $\mathbf{C}$, que π est le fibré produit de rang p et ρ le fibré produit de rang 1. L'application

$$\beta : (A_0^\infty)^p/s_0(A_0^\infty)^p \to (A_0^\infty)^p/s_0(A_0^\infty)^p$$

étant induite par l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$, elle est surjective (chap. III, § 1, remarque 2). D'autre part, pour tout germe u de $(A_0^\infty)^p$ vérifiant la relation

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}} = s_0 v$$

pour un certain v, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(u - s_0\, w) = 0$$

pour un certain w *(loc. cit.)*. Le germe $u - s_0 w$ étant holomorphe, il existe un germe h de $(A_0^\infty)^p$ tel que

$$u - s_0 w - u(0) = s_0 h\,.$$

Ceci montre que le noyau de β est constitué des germes d'applications constantes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^p$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphes π sur X est associé à un diviseur.*

Pour tout fibré en droites holomorphes ρ sur X associé à un diviseur u, on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho) \geqslant \chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + 0(u).$$

Si l'ordre de u est bien choisi, le fibré $\pi \otimes \rho$ possède une section holomorphe non nulle s. On en déduit que le fibré π est associé au diviseur $(s) - u$.

THÉORÈME 1 (Riemann-Roch). *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a*

$$\chi(\pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi)$$

où g désigne le genre de X.

On peut supposer que π est associé à un diviseur u (proposition 1, corollaire). On a donc

$$\chi(\pi) = \chi(\mathbf{C}_X) + 0(u) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi)$$

(proposition 1 et § 1, proposition 3), ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a la relation*

$$\mathrm{ch}(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = 2g - 2 - \mathrm{ch}(\pi).$$

En particulier, la classe de Chern du fibré $\Omega^{1,0}$ est égale à $2g - 2$.

Il suffit de remarquer que l'on a

$$\chi(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = -\chi(\pi) = -(1 - g + \mathrm{ch}(\pi))$$

et d'appliquer le théorème de Riemann-Roch.

PROPOSITION 2. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a les relations suivantes :*

(1) $\mathrm{ch}(\pi) < 0 \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0.$

(2) $\mathrm{ch}(\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0 & \text{si } \pi \text{ n'est pas (holomorphiquement) trivial.} \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 & \text{si } \pi \text{ est (holomorphiquement) trivial.} \end{cases}$

(3) $\mathrm{ch}(\pi) = 2g - 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g - 1 & \text{si } \pi \text{ n'est pas isomorphe à } \Omega^{1,0}. \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g & \text{si } \pi \text{ est isomorphe à } \Omega^{1,0}. \end{cases}$

(4) $\mathrm{ch}(\pi) > 2g - 2 \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi).$

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées (§ 1, proposition 3). Pour démontrer les deux dernières, il suffit de remarquer que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi) + \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$$

et d'appliquer ce qui précède au fibré $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Remarque 1.

Pour tout diviseur u sur X, on pose

$$L(u) = \{ h \in \mathscr{K}(X) \mid h = 0 \quad \text{ou} \quad (h) \geqslant -u \}$$
$$I(u) = \{ s \in \mathscr{K}(X, \Omega^{1,0}) \mid s = 0 \quad \text{ou} \quad (s) \geqslant u \}.$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes associé à u. Nous avons vu que l'espace vectoriel $L(u)$ (resp. $I(u)$) est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ (resp. $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$) (chap. I, § 3). En désignant sa dimension par $l(u)$ (resp. $i(u)$), le théorème de Riemann-Roch prend la forme plus classique suivante:

$$l(u) - i(u) = 1 - g + 0(u).$$

THÉORÈME 2 (Riemann-Hurwitz). *Soient X et Y deux courbes holomorphes compactes connexes de genre $g(X)$ et $g(Y)$ respectivement et soit h une application holomorphe non constante de X dans Y. On a la formule*

$$2g(X) - 2 = \deg(h)\big(2g(Y) - 2\big) + v(h)$$

où $v(h)$ désigne l'indice de ramification de h [1]).

Désignons par u une forme différentielle méromorphe non nulle sur Y. On a

$$0\big(h^*(u)\big) = \sum_{x \in X} 0_x\big(h^*(u)\big) = \sum_{x \in X} \big(v_x(h) + 1\big)\, 0_{h(x)}(u) + v(h)$$

(chap. I, § 4, lemme 2) et par conséquent

$$0\big(h^*(u)\big) = \sum_{y \in Y} \Big(\sum_{x \in u^{-1}(y)} \big(v_x(h) + 1\big)\Big)\, 0_y(u) + v(h) = \deg(h)\, 0(u) + v(h)$$

et l'on conclut en remarquant que l'ordre de $h^*(u)$ (resp. u) est égal à $2g(X) - 2$ (resp. $2g(Y) - 2$) (théorème 1, corollaire).

COROLLAIRE. *Pour qu'il existe une application holomorphe non constante de X dans Y, il faut que le genre de Y soit au plus égal au genre de X.*

---

[1]) C'est à dire la somme des indices de ramification de h aux différents points de X (chap. I, § 4).

§ 4. Fibrés amples

Dans tout ce paragraphe, on désigne par g le genre de X et par π un fibré en droites holomorphes sur X.

Soient $s_0, \ldots, s_n$ des sections holomorphes de π dont l'une au moins n'est pas nulle. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on pose

$$X_j = \{x \in X \mid s_j(x) \neq 0\}$$

et l'on définit une application holomorphe de X_j dans $\mathbf{P}^n$ par la formule

$$\phi_j(x) = \left(\frac{s_0}{s_j}(x) : \ldots : \frac{s_n}{s_j}(x)\right).$$

Par définition même, les ϕ_j se recollent en une application holomorphe ϕ de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$ dans $\mathbf{P}^n$. Pour tout point x de $X \setminus \bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$, il existe un voisinage ouvert U de x, une fonction holomorphe h sur U et des sections holomorphes $s_0', \ldots, s_n'$ de π sur U dont l'une au moins ne s'annule pas au point x, vérifiant les relations suivantes

$$s_0 = hs_0', \ldots, s_n = hs_n'.$$

Supposons par exemple $s_j'(x)$ non nul. On prolonge l'application ϕ en posant

$$\phi(x) = \left(\frac{s_0'}{s_j'}(x) : \ldots : \frac{s_n'}{s_j'}(x)\right).$$

L'application holomorphe ϕ de X dans $\mathbf{P}^n$ ainsi obtenue se désigne par $(s_0 : \ldots : s_n)$.

On dit que le fibré π est *ample* si pour toute base $(s_0, \ldots, s_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$, l'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^n$.

Remarque 1.

Désignons par $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions méromorphes sur X dont l'une au moins n'est pas nulle. On définit un diviseur u sur X en posant

$$u = -\inf((h_1), \ldots, (h_n), 0).$$

Soit ρ un fibré en droites holomorphes sur X et soit s_0 une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Les sections de ρ définies par

$$s_1 = h_1 s_0, \ldots, s_n = h_n s_0$$

sont holomorphes et l'une d'entre elles au moins n'est pas nulle. L'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ se désigne (abusivement) par $(h_1 : \ldots : h_n)$.

PROPOSITION 1. *Si la classe de Chern de π est au moins égale à $2g$, les sections holomorphes de π n'ont pas de zéro commun.*

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point x de X où toutes les sections holomorphes de π s'annulent. Désignons par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. L'application

$$\otimes s : \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) \to \mathbf{H}^0(X, \pi)$$

est injective. Elle est surjective en vertu de l'hypothèse faite sur x. D'autre part, la proposition 2 du paragraphe 3 montre que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi \otimes \rho^*) = \mathrm{ch}(\pi) - g$$

et

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 + \mathrm{ch}(\pi) - g$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. *On suppose que la classe de Chern de π est au moins égale à $2g$. Pour tout ensemble fini A de X, il existe une section holomorphe de π qui ne s'annule en aucun point de A.*

Il résulte en effet de la proposition 1 que l'ensemble des sections holomorphes de π qui s'annulent en un point de X forment un hyperplan de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$.

COROLLAIRE 2. *On suppose que la classe de Chern de π est au moins égale à $2g + 1$.*

(1) Pour tout couple (x, y) de points distincts de X, il existe une section holomorphe de π qui s'annule au point x et ne s'annule pas au point y.

(2) Pour tout point x de X, il existe une section holomorphe de π qui possède un zéro simple au point x.

On désigne par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. La classe de Chern du fibré $\pi \otimes \rho^*$ est au moins égale à $2g$ et la proposition 1 montre qu'il existe une section holomorphe t de ce fibré qui ne s'annule pas au point y (resp. x). La section $t \otimes s$ vérifie la condition (1) (resp. (2)).

THÉORÈME 1. *Si sa classe de Chern est au moins égale à $2g + 1$, le fibré π est ample.*

Désignons par $(s_0, \ldots, s_n)$ une base de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$. Pour tout couple (x, y) de points de X, il existe un entier j compris entre 0 et n tel que s_j ne s'annule pas sur $\{x, y\}$ (proposition 1, corollaire 1). Par définition, la relation

$$(s_0 : \ldots : s_n)(x) = (s_0 : \ldots : s_n)(y)$$

signifie qu'il existe un nombre complexe λ non nul tel que

$$\left(\frac{s_0}{s_j}(x), \ldots, \frac{s_n}{s_j}(x)\right) = \lambda\left(\frac{s_0}{s_j}(y), \ldots, \frac{s_n}{s_j}(y)\right).$$

Ceci n'est possible que si x et y coïncident (proposition 1, corollaire 2) et par conséquent l'application $(s_0 : \ldots : s_n)$ est injective.

Il reste à montrer qu'elle est de rang 1. Désignons par x un point de X et par s une section holomorphe de π possédant un zéro simple au point x *(loc. cit.)*. On a

$$s = \lambda_0 s_0 + \ldots + \lambda_n s_n$$

et il existe un entier j compris entre 0 et n tel que $s_j(x)$ soit non nul. On a donc

$$\frac{s}{s_j} = \lambda_0 \frac{s_0}{s_j} + \ldots + \lambda_n \frac{s_n}{s_j}$$

et par conséquent

$$d\left(\frac{s}{s_j}\right)(x) = \lambda_0\, d\left(\frac{s_0}{s_j}\right)(x) + \ldots + \lambda_n\, d\left(\frac{s_n}{s_j}\right)(x).$$

Le membre de gauche étant non nul, il existe un entier k compris entre 0 et n tel que $d\dfrac{s_k}{s_j}(x)$ soit non nul ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre g se plonge dans $\mathbf{P}^{g+1}$. En particulier, toute courbe holomorphe compacte connexe de genre 0 est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et toute courbe elliptique se plonge dans $\mathbf{P}^2$.*

Il suffit d'appliquer le théorème 1 au fibré en droites holomorphe associé à un diviseur d'ordre $2g + 1$ et de remarquer que l'on a alors

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g + 2$$

(§ 3, proposition 2).

§ 5. Le corps des fonctions méromorphes

Lemme 1. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des points distincts de* X *et soit* r *un entier compris entre* 0 *et* n. *Il existe une fonction méromorphe* f *sur* X *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Les points $x_1, \ldots, x_n$ *appartiennent au domaine de régularité de* f.

(2) Les nombres complexes $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ *sont deux à deux distincts et non nuls.*

(3) L'ordre de f *aux points* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *est égal à* 1.

Soit x_0 un point de $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout entier j compris entre 1 et r, on définit un diviseur u_j sur X en posant

$$\begin{cases} u_j(x_k) = 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad k \neq j \\ u_j(x_0) = 2g+1-n & \\ u_j(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in X \setminus \{x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\}. \end{cases}$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes sur X et par s_j une section méromorphe de π dont le diviseur est u_j. Puisque la classe de Chern de π est égale à $2g$, il existe une section holomorphe t_j de π qui ne s'annule en aucun des points $x_1, \ldots, x_n$ (§ 4, proposition 1, corollaire 1). La fonction méromorphe définie par

$$f_j = \frac{s_j}{t_j}$$

est régulière en chacun des points $x_1, \ldots, x_n$. Elle est non nulle au point x_j et possède un zéro simple en chacun des points $x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour f une combinaison linéaire convenable des fonctions $f_1, \ldots, f_r$.

Nous allons étudier le corps $\mathcal{K}(X)$ des fonctions méromorphes sur X. Toute fonction méromorphe non constante f sur X permet d'identifier le corps $\mathcal{K}(\mathbf{P}^1)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ au sous-corps $\mathbf{C}(f)$ de $\mathcal{K}(X)$ engendré par f (chap. I, § 5, lemme 2).

Lemme 2. *Soit* f *une fonction méromorphe non constante de degré* r *sur* X. *Pour toute fonction méromorphe* g *sur* X *il existe un polynôme* p *de degré* r *dans* $\mathbf{C}(f)[T]$ *tel que* $p(g)$ *soit identiquement nulle. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le polynôme p *est irréductible.*

(2) Le discriminant de p est non nul.

(3) Il existe une valeur régulière y de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$.

On désigne par $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ les fonctions symétriques élémentaires à r indéterminées. Les fonctions $f_{\sigma_1}(g), \ldots, f_{\sigma_r}(g)$ sont méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ (chap. I, § 4, proposition 2). Il suffit alors de poser

$$p = T^r + f_{\sigma_1}(g)\, T^{r-1} + \ldots + f_{\sigma_r}(g)\,.$$

Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de montrer que (3) implique (1). Supposons que l'on ait

$$p = p_1 p_2$$

avec p_1 et p_2 dans $\mathbf{C}(f)[T]$. L'une au moins des fonctions méromorphes $p_1(g)$ ou $p_2(g)$ est identiquement nulle. Désignons par y une valeur régulière de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$. On peut supposer que les coefficients de p_1 et p_2 sont holomorphes au voisinage de y. Si $p_1(g)$ est identiquement nulle, le polynôme $p_1(y, T)$ a r racines distinctes, il est donc de degré r ce qui démontre l'assertion.

LEMME 3. *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur X. On suppose que f est non constante de degré r et qu'il existe un polynôme irréductible p de degré r dans $\mathbf{C}(f)[T]$ tel que $p(g)$ soit identiquement nulle. Pour toute fonction méromorphe h sur X, il existe un polynôme q de degré au plus $r-1$ dans $\mathbf{C}(f)[T]$ tel que h soit égal à $q(g)$.*

En particulier, le corps $\mathscr{K}(X)$ est engendré par f et g.

Pour toute valeur régulière y de f telle que $f^{-1}(y)$ ne contienne ni pôles de g ni pôles de h, on pose

$$a(y, T) = p(y, T) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{h(x)}{T - g(x)}\,.$$

Le polynôme a appartient à $\mathbf{C}(f)[T]$ (chap. I, § 4, proposition 2). Si g sépare les points de $f^{-1}(y)$, on a

$$h(x) = \frac{a(y, g(x))}{p'(y, g(x))}$$

pour tout point x de $f^{-1}(y)$, en désignant par p' le polynôme dérivé $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ (lemme 2). Le principe du prolongement analytique montre que l'on a

$$h = \frac{a(g)}{p'(g)}\,.$$

Comme p est irréductible, il existe des polynômes a_1 et a_2 de $\mathbf{C}(f)[T]$ tels que

$$a = a_1 p' + a_2 p$$

(appendice III). On en déduit que l'on a

$$h = a_1(g)$$

et il suffit d'éliminer les termes de degré supérieur à r au moyen de la relation

$$p(g) = 0 .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une courbe algébrique projective Y dans $\mathbf{P}^2$ et une application holomorphe π de X dans $\mathbf{P}^2$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Le couple (X, π) est une normalisation de Y.

(2) L'application π^* induit un isomorphisme de $\kappa(Y)$ sur $\mathscr{K}(X)$.

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X et soit y une valeur régulière de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points de $f^{-1}(y)$ (lemme 1) et un polynôme irréductible p de degré m dans $\mathbf{C}[T_1, T_2]$ tel que $p(f, g)$ soit nulle (lemme 2). On définit un polynôme homogène irréductible de degré m dans $\mathbf{C}[T_0, T_1, T_2]$ en posant

$$\tilde{p}(T_0, T_1, T_2) = T_0^m p\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right).$$

On désigne par Y le lieu des zéros de $\tilde{p}$ dans $\mathbf{P}^2$ et par π l'application holomorphe $(f{:}g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ (§ 4, remarque 1).

Pour démontrer la première assertion, il suffit de vérifier que π induit un isomorphisme de $X \setminus \pi^{-1}(A)$ sur $Y \setminus A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de Y (chap. I, § 5, lemme 10). Or cette application est propre et holomorphe, elle est de degré 1 par construction. Ceci démontre l'assertion.

La seconde assertion est une conséquence immédiate du lemme 3.

COROLLAIRE 1. *Pour que deux courbes holomorphes compactes connexes X et Y soient isomorphes, il faut et il suffit que les corps $\mathscr{K}(X)$ et $\mathscr{K}(Y)$ soient isomorphes.*

C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la normalisation d'une courbe algébrique projective.

COROLLAIRE 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par $\underline{a}$ l'idéal des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$, où ψ est la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, et par Y le lieu des zéros de $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^n$. Puisque $\psi^{-1}(X)$ est connexe, l'idéal $\underline{a}$ est premier. Le corps $\kappa(Y)$ des fonctions rationnelles sur Y est un sous-corps de $\mathscr{K}(X)$. Le théorème 1 montre alors que Y est une courbe algébrique de $\mathbf{P}^n$. Désignons par Y_0 l'ensemble des points réguliers de Y et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X .$$

L'ensemble X_0 est à la fois ouvert et fermé dans Y_0. Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que X est égal à Y, d'où l'assertion.

THÉORÈME 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X se plonge dans $\mathbf{P}^3$.*

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X. On désigne par y une valeur régulière de f, par $x_1, ..., x_r$ les points de $f^{-1}(y)$, par $x_{r+1}, ..., x_n$ les points critiques de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points $x_1, ..., x_r$ et possédant un zéro simple aux points $x_{r+1}, ..., x_n$ (lemme 1). Désignons par π l'application $(f:g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ et par Y son image. L'application π est partout de rang 1 et le couple (X, π) est une normalisation de Y (théorème 1). Soit A l'ensemble des points singuliers de Y et soit h une fonction méromorphe sur X séparant les points de $\pi^{-1}(A)$ (lemme 1). On montre aisément que l'application $(f:g:h)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^3$.

§ 6. FORMES AUTOMORPHES

Pour tout automorphisme γ du disque unité $\mathbf{D}$, on définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ en posant

$$j_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z} .$$

Pour tout couple (γ, γ') d'automorphismes et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z) j_\gamma(z) .$$

Nous supposerons désormais que X est le quotient de $\mathbf{D}$ par un groupe proprement discontinu Γ (chap. I, § 5, numéro 3) et nous désignerons par π la projection canonique de $\mathbf{D}$ dans X.

Soit m un entier relatif. On appelle *forme automorphe de poids m relative à Γ* toute fonction méromorphe f sur $\mathbf{D}$ telle que

$$f \cdot \gamma = j_\gamma^{-m} f$$

pour tout automorphisme γ de Γ. On désigne par $\mathscr{K}(m, \Gamma)$ (resp. $\mathcal{O}(m, \Gamma)$) l'ensemble des formes automorphes (resp. des formes automorphes holomorphes) de poids m relatives à Γ.

Fixons une fois pour toutes une forme différentielle méromorphe non nulle ω sur X. La forme différentielle $\pi^*(\omega)$ s'écrit

$$\pi^*(\omega) = f\,dz$$

où f est une fonction méromorphe sur $\mathbf{D}$. Pour tout automorphisme γ de Γ et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$f(z)\,dz = \pi^*(\omega)(z) = \pi^*(\omega)(\gamma z) = f(\gamma z)\,j_\gamma(z)\,dz$$

ce qui montre que f est une forme automorphe de poids 1 relative à Γ.

Pour toute forme automorphe u de poids m relative à Γ, la fonction méromorphe uf^{-m} est Γ-invariante. On en déduit que l'application Ψ_m de $\mathscr{K}(X)$ dans $\mathscr{K}(m, \Gamma)$ définie par

$$\Psi_m(v) = (v \cdot \pi) f^m$$

est un isomorphisme pour tout entier m.

Nous allons chercher à quelles conditions une fonction méromorphe v sur X fournit une forme automorphe holomorphe sur $\mathbf{D}$.

Pour une telle fonction, on a

$$0_z(\Psi_m(v)) = 0_z(\pi^*(v)) + m\,0_z(\pi^*(\omega)) \geqslant 0$$

pour tout point z de $\mathbf{D}$. Cette condition équivaut à

$$0_x(v) \geqslant -m\,0_x(\omega) - \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right] \quad {}^{1)}$$

pour tout point x de X, où ρ_x désigne le cardinal du groupe d'isotropie de Γ en tout point de $\pi^{-1}(x)$. On définit un diviseur a_m sur X en posant

---

[1]) Pour tout nombre réel c, on désigne par $[c]$ la partie entière de c, i.e. l'entier relatif défini par

$$[c] = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant c\}.$$

$$a_m(x) = \left(m\,0_x(\omega) + \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right]\right)x\,.$$

On voit donc que Ψ_m induit un isomorphisme de $L(a_m)$ sur $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ (§ 3, remarque 1).

Pour toute fonction holomorphe u sur $\mathbf{D}$ et pour tout entier relatif m, la série

$$p_\Gamma(u, m) = \sum_{\gamma\in\Gamma} (u\cdot\gamma) j_\gamma^m$$

s'appelle la *série de Poincaré associée à* u.

LEMME 1. *Si* u *est bornée et* m *au moins égal à* 2, *la série de Poincaré* $p_\Gamma(u, m)$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction de* $\mathcal{O}(m, \Gamma)$.

Pour montrer que la série $p_\Gamma(u, m)$ converge, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma^2$$

converge dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4). Désignons par z un point de $\mathbf{D}$ et par K un voisinage compact de z dans $\mathbf{D}$ tel que

$$\begin{cases} \gamma K = K & \text{si } \gamma \in \Gamma_z \\ \gamma K \cap K = \varnothing & \text{si } \gamma \notin \Gamma_z \end{cases}$$

(chap. I, § 5, lemme 3). La formule du changement de variable dans les intégrales doubles montre que l'on a

$$\| j_\gamma^2 \|_{L^1,K} = \int_K |j_\gamma|^2\, d\mu = \mu(\gamma K)\,,$$

et par conséquent

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \| j_\gamma^2 \|_{L^1,K} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma K) = \mathrm{Card}\,(\Gamma_z)\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \mu(\gamma K)\Big)$$

en désignant par Γ_0 un système de représentants de Γ/Γ_z. Ceci démontre l'assertion puisque les ensembles $(\gamma K)_{\gamma\in\Gamma_0}$ sont deux à deux disjoints et contenus dans $\mathbf{D}$.

Montrons maintenant que $p_\Gamma(u, m)$ est une fonction automorphe de poids m. Pour tout automorphisme γ de Γ et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$\begin{aligned} p_\Gamma(u, m)(\gamma z) &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} u(\gamma'\gamma z) j_{\gamma'}^m(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z) \sum_{\gamma'\in\Gamma} u(\gamma'\gamma z) j_{\gamma'\gamma}^m(z) \\ &= j_\gamma^{-m}(z)\, p_\Gamma(u, m)(z) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

LEMME 2. *Pour m suffisamment grand, l'espace vectoriel $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ est de dimension au moins 2.*

On désigne par z_0 un point de $\mathbf{D}$ qui n'est pas un point fixe de Γ (i.e. un point régulier de l'application π) et par K un voisinage compact de z_0 tel que

$$\gamma K \cap K = \varnothing$$

pour tout automorphisme de Γ différent de l'identité.

Le lemme 1 montre qu'il existe un nombre fini d'automorphismes $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ de Γ, différents de l'identité tels que

$$\| j_\gamma \|^2_{L^\infty, K} \leqslant \frac{1}{2}$$

pour tout automorphisme γ de $\Gamma \backslash \{1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$. On pose

$$z_\nu = \gamma_\nu(z_0)$$

pour tout entier ν compris entre 1 et p. Soit u une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{D}$. Pour tout entier m au moins égal à 2, on peut écrire

$$p_\Gamma(u, m) - u - \sum_{1 \leqq \nu \leqq p} (u \cdot \gamma_\nu) j^m_{\gamma_\nu} = \sum_{\gamma \in \Gamma'} (u \cdot \gamma) j^m_\gamma$$

où l'on a posé

$$\Gamma' = \Gamma \backslash \{1, \gamma_1, \ldots, \gamma_p\}.$$

Sur le compact K on a donc

$$\begin{aligned} &\| p_\Gamma(u, m) - u - \sum_{1 \leqq \nu \leqq p} (u \cdot \gamma_\nu) j^m_{\gamma_\nu} \|_{L^\infty, K} \\ &\leqslant 2^{-m+2} \| u \|_{L^\infty, \mathbf{D}} \sum_{\gamma \in \Gamma'} \| j_\gamma \|^2_{L^\infty, K}. \end{aligned}$$

Le membre de droite converge vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Supposons que u possède un zéro d'ordre au moins 2 en chaque point $z_1, \ldots, z_p$. Pour tout nombre réel ε strictement positif et pour tout entier m suffisamment grand, on a

$$| p_\Gamma(u, m)(z_0) - u(z_0) | \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial p_\Gamma(u, m)}{\partial z}(z_0) - \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \right| \leqslant \varepsilon$$

(inégalités de Cauchy). Comme $u(z_0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial z}(z_0)$ sont arbitraires, ceci démontre l'assertion.

LEMME 3. *Désignons par g le genre de X. Le nombre réel*

$$2g - 2 + \sum_{x \in X} \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)$$

est strictement positif.

Désignons par m un entier suffisamment grand pour vérifier les conditions suivantes:

(1) L'espace vectoriel $\mathcal{O}(m, \Gamma)$ est de dimension au moins 2.

(2) Pour tout point x de X, l'entier ρ_x divise m.

Désignons par π_m un fibré en droites holomorphe associé au diviseur a_m. Pour toute section holomorphe non nulle v de π_m, on a

$$\mathrm{ch}(\pi_m) = 0(a_m) = 0(v) \geqslant 0.$$

Si l'ordre de a_m est nul, le fibré π_m est trivial ce qui contredit (1). Il est donc strictement positif et la condition (2) montre que l'on a

$$0(a_m) = m\left(0(\omega) + \sum_{x \in X} \left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right)$$

ce qui démontre l'assertion (§ 3, théorème 1, corollaire).

THÉORÈME 1. *Pour tout entier m au moins égal à 2, on a la relation*

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}(m, \Gamma) = (2m-1)(g-1) + \sum_{x \in X} \left[m\left(1 - \frac{1}{\rho_x}\right)\right]$$

où g désigne le genre de X.

D'après la proposition 2 du paragraphe 3, il suffit de montrer que l'ordre de a_m est strictement supérieur à $2g-2$.

Tout d'abord, pour tout couple (m, l) d'entiers strictement positifs, on a

$$\left[m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right] \geqslant (m-1)\left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

En effet, on peut écrire

$$m = ql + r$$

où q et r sont des entiers naturels tels que r soit compris entre 0 et $l - 1$. Si r est nul, on a

$$\left[m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right] = m\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

Sinon q est au plus égal à $\dfrac{m-1}{l}$ et l'on a

$$\left[m\left(1-\frac{1}{l}\right)\right] = m-q-1 \geqslant m-1-\frac{m-1}{l} = (m-1)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

ce qui établit l'assertion.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 0(a_m) &= m(2g-2) + \sum_{x\in X}\left[m\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right] \\ &\geqslant m(2g-2) + (m-1)\sum_{x\in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$0(a_m) \geqslant (m-1)\left(2g-2+\sum_{x\in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right) + 2g-2\,.$$

Si m est au moins égal à 2, le résultat est donc une conséquence du lemme 3

§ 7. Variétés de Picard et de Jacobi

Désignons par E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et par Γ un réseau de E (i.e. un sous-groupe abélien de rang $2n$). L'application canonique π de E dans E/Γ est un revêtement. On munit E/Γ de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local. On appelle *tore complexe* toute variété holomorphe isomorphe à une variété de la forme E/Γ.

Soit T (resp. T') un tore complexe de la forme E/Γ (resp. E'/Γ') et soit u un isomorphisme de T sur T'. On désigne par π (resp. π') l'application canonique de E dans T (resp. de E' dans T'). Quitte à modifier u par un automorphisme de T', on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \pi'(0)\,.$$

Il existe alors un isomorphisme v de E sur E' et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \pi'\cdot v = u\cdot\pi\,.$$

Pour tout élément γ de Γ, l'image $v(\gamma)$ est un élément γ' de Γ' et l'on vérifie aisément que l'on a

$$v(z+\gamma) = v(z) + \gamma'$$

pour tout point z de E. En particulier, la dérivée de v est Γ-invariante. Elle est donc constante en vertu du principe du maximum.

Il résulte de ce qui précède que T et T' sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire v de E sur E' tel que

$$v(\Gamma) = \Gamma'$$

(chap. I, § 5, numéro 3).

LEMME 1. *Désignons par Ω une matrice de $M(n, 2n; \mathbf{C})$ et par Γ le sous-groupe de $\mathbf{C}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le sous-groupe Γ est un réseau de $\mathbf{C}^n$.

(2) La matrice $\left(\frac{\Omega}{\overline{\Omega}}\right)$ est inversible.

(3) Le vecteur nul est le seul vecteur $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbf{C}^n$ tel que le vecteur

$$(z_1, \ldots, z_n)\,\Omega$$

soit réel.

La démonstration est un simple exercice d'algèbre linéaire.

LEMME 2. *Désignons par Ω (resp. Ω') une matrice de $M(n, 2n; \mathbf{C})$ et par Γ (resp. Γ') le sous-groupe de $\mathbf{C}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de Ω (resp. Ω'). On suppose que Γ et Γ' sont des réseaux. Pour que les tores complexes $\mathbf{C}^n/\Gamma$ et $\mathbf{C}^n/\Gamma'$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une matrice M de $G(n; \mathbf{C})$ et une matrice Λ de $G(2n; \mathbf{Z})$ telles que*

$$\Omega' = M\,\Omega\,\Lambda\,.$$

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Rappelons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \longrightarrow 0$$

(§ 1, proposition 2). On sait d'autre part que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel réel de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

LEMME 3. *Par restriction, l'application β induit un isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.*

Toute forme différentielle (réelle) de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ s'écrit

$$u = v + \overline{v}$$

avec v dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$. En effet, pour toute carte ϕ de domaine U dans X, on a

$$u|_U = u_1 d\phi_1 + u_2 d\phi_2 ,$$

en désignant par ϕ_1 et ϕ_2 les parties réelle et imaginaire de ϕ. Il suffit alors de poser

$$v|_U = \frac{1}{2}(u_1 - iu_2)\, d\phi \qquad \text{et} \qquad \bar{v}|_U = \frac{1}{2}(u_1 + iu_2)\, d\bar{\phi} .$$

Supposons de plus u fermée. L'image par β de la classe de u n'est autre que la classe de $\bar{v}$. Si cette classe est nulle, on a

$$u = v + \bar{v} = d'\bar{f} + d''f$$

pour une certaine fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Il résulte de cette équation que la fonction $f - \bar{f}$ est harmonique, donc constante. On en déduit que

$$u = d'f + d''f = df$$

ce qui démontre l'assertion.

Il résulte en particulier du lemme 3 que l'image par β du sous-groupe $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ (chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 2). Notons que l'image par β de la classe d'un élément h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ est la classe de la différentielle

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h} .$$

PROPOSITION 1. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte [1]).

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u|_{U_\iota} = d''f_\iota .$$

Les fonctions définies sur $U_\iota \cap U_\kappa$ par

$$f_{\kappa\iota} = f_\kappa - f_\iota \qquad \text{et} \qquad g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi f_{\kappa\iota})$$

sont holomorphes et la famille $(g_{\kappa\iota})$ est un cocycle de rang 1 subordonnée à (U_ι) dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ est précisément l'image par θ de la

[1]) La définition de θ a été donnée au paragraphe 2.

classe de u. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X correspondant à ce cocycle. Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)$ se recollent en une section partout non nulle f de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ ce qui montre déjà que la classe de Chern de π est nulle.

Si u est de la forme

$$u = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}$$

pour une certaine fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la section $h^{-1}f$ de π est holomorphe et partout non nulle ce qui montre que π est trivial.

Réciproquement, si π est trivial, il existe pour tout indice ι une fonction holomorphe inversible g_ι sur U_ι telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota}\, g_\iota .$$

Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)\, g_\iota^{-1}$ se recollent en une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ et l'on a

$$\left.\frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}\right|_{U_\iota} = d''f_\iota = u\,|_{U_\iota} .$$

Ceci montre que la classe de u est dans l'image de β.

Il reste à voir que tout fibré en droites holomorphe π sur X dont la classe de Chern est nulle provient d'un élément de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Désignons par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ensembles simplement connexes et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι), représentant π. Le fibré π étant différentiablement trivial (chap. 0, § 5, théorème 4), il existe pour tout indice ι une fonction g_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota} g_\iota .$$

Puisque U_ι est simplement connexe, il existe une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$g_\iota = \exp(2i\pi f_\iota) .$$

Il résulte de ces définitions que l'on a

$$d''f_\iota = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\iota}{g_\iota} = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\kappa}{g_\kappa} = d''f_\kappa .$$

Autrement dit, les formes différentielles $d''f_\iota$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ ayant toutes les propriétés requises.

Le noyau de ch s'identifie au quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par le réseau $\mathrm{Im}\beta$. Ce noyau est donc un tore complexe de dimension g que l'on appelle la *variété de Picard de* X et que l'on désigne par $\mathbf{Pic}(X)$.

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0 et par $c_1, \ldots, c_{2g}$ des lacets de X en x_0 dont les classes forment une base du $\mathbf{Z}$-module libre $\tilde{G}$ (chap. 0, § 5, théorème 3).

Pour tout entier j compris entre 1 et $2g$, il existe par dualité un élément u_j de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ tel que

$$\int_{c_k} u_j = \delta_{jk}$$

pour tout entier k compris entre 1 et $2g$ (chap. 0, § 5, théorème 2, corollaire 2).

Désignons encore par $v_1, \ldots, v_g$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ des formes différentielles holomorphes. On pose

$$\omega_{jk} = \int_{c_k} v_j \quad \text{et} \quad \Omega = (\omega_{jk})_{1 \leq j \leq g, 1 \leq k \leq 2g}.$$

Remarquons que l'on a par définition

$$v_j = \sum_{1 \leq k \leq 2g} \omega_{jk} u_k .$$

Autrement dit, la matrice ${}^t\Omega$ est la matrice de l'application α exprimée dans les bases $v_1, \ldots, v_g$ et $u_1, \ldots, u_{2g}$.

LEMME 4. *Les vecteurs colonnes de* Ω *engendrent un réseau de* $\mathbf{C}^g$.

Tout vecteur $(z_1, \ldots, z_g)$ de $\mathbf{C}^g$ tel que le vecteur

$$(z_1, \ldots, z_g)\,\Omega$$

soit réel est nul. En effet, cette condition signifie que la forme différentielle holomorphe

$$z_1 v_1 + \ldots + z_g v_g$$

est réelle. L'assertion est donc une conséquence des lemmes 3 et 1.

Le tore complexe de dimension g défini par la matrice Ω s'appelle la *variété de Jacobi de* X et se désigne par $\mathbf{Jac}(X)$. On notera que cette variété est définie à isomorphisme près par le choix d'une base de $\tilde{G}$ et d'une base de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$.

Pour tout couple (j, k) d'entiers compris entre 1 et $2g$, on pose

$$\lambda_{jk} = \int_X u_j \wedge u_k \quad \text{et} \quad \Lambda = (\lambda_{jk})_{1 \leq j,k \leq 2g}.$$

La matrice Λ n'est autre que la matrice d'intersection de X (chap. 0, § 5, remarque 3). Elle appartient donc à $G(2g; \mathbf{Z})$.

THÉORÈME 1 (Riemann). *(1) La matrice $\Omega\Lambda{}^t\Omega$ est nulle (égalités de Riemann).*

(2) La matrice hermitienne $i\Omega\Lambda{}^t\overline{\Omega}$ est positive non dégénérée (inégalités de Riemann).

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 1 et g, la forme différentielle $v_j \wedge v_k$ est identiquement nulle (puisque de bidegré (2, 0)). On a donc

$$0 = \int_X v_j \wedge v_k = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\, \omega_{kq} \int_X u_p \wedge u_q = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\, \lambda_{pq}\, \omega_{kq}$$

ce qui démontre la première assertion.

Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, la forme différentielle $iv \wedge \overline{v}$ est positive (ceci se vérifie aisément dans une carte). Désignons par $z_1, \ldots, z_g$ les coordonnées de v dans la base $v_1, \ldots, v_g$. Les formes différentielles $u_1, \ldots, u_{2g}$ étant réelles, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant i \int_X v \wedge \overline{v} &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} z_j \overline{z}_k\, i \int_X v_j \wedge \overline{v}_k \\ &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} i z_j \omega_{jp} \lambda_{pq} \overline{\omega}_{kq} \overline{z}_k \end{aligned}$$

L'égalité ne pouvant apparaître que si v est nulle, ceci démontre la seconde assertion.

Désignons par Ω' la matrice de β dans la base $u_1, \ldots, u_{2g}$ et dans une base quelconque de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Cette matrice est de rang g et l'on a

$$\Omega' \cdot {}^t\Omega = 0\,.$$

De plus, les vecteurs colonnes de Ω' engendrent un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ et le quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par ce réseau n'est autre que $\mathbf{Pic}(X)$ (en effet, les vecteurs colonnes de Ω' sont les images par β des éléments $u_1, \ldots, u_{2g}$).

LEMME 5. *Les variétés* $\mathbf{Pic}(X)$ *et* $\mathbf{Jac}(X)$ *sont isomorphes.*

Posons

$$P = i\,\Omega\Lambda{}^t\overline{\Omega} \quad \text{et} \quad Q = \Omega'{}^t\overline{\Omega}\,.$$

La matrice P est inversible (inégalités de Riemann). Montrons qu'il en est de même de Q. Les égalités de Riemann montrent que l'on a

$$\Omega' {}^t\begin{pmatrix}\Omega\\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} = (\Omega' {}^t\Omega \;\; \Omega' {}^t\overline{\Omega}) = (0 \;\; \Omega' {}^t\overline{\Omega})$$

d'où l'assertion puisque Ω' est de rang g et $({}^t\Omega \;\; {}^t\overline{\Omega})$ de rang $2g$. On a alors

$$\begin{pmatrix}\Omega'\\ \overline{\Omega'}\end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix}\Omega\\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Omega'\\ \overline{\Omega'}\end{pmatrix} ({}^t\Omega \;\; {}^t\overline{\Omega}) = \begin{pmatrix}0 & Q\\ \overline{Q} & 0\end{pmatrix}$$

et par conséquent

$${}^t\begin{pmatrix}\Omega\\ \overline{\Omega}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \overline{Q}^{-1}\\ Q^{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega'\\ \overline{\Omega'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega'}\\ Q^{-1}\,\Omega'\end{pmatrix}$$

Posons

$$M = iQP^{-1}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$M\Omega\Lambda = M\Omega\Lambda({}^t\Omega \;\; {}^t\overline{\Omega})\begin{pmatrix}\overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega'}\\ Q^{-1}\,\Omega'\end{pmatrix} = M(0 \;\; -iP)\begin{pmatrix}\overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega'}\\ Q^{-1}\,\Omega'\end{pmatrix} = \Omega'$$

ce qui démontre l'assertion.

Notons qu'un isomorphisme υ de **Jac** (X) sur **Pic** (X) est induit par l'isomorphisme de $\mathbf{C}^g$ sur lui-même associé à la matrice M.

Pour tout point x de X, on désigne par ξ_x le fibré principal associé au diviseur $1 \cdot x$. On définit une application Ξ de X dans **Pic** (X) en posant

$$\Xi(x) = \xi_x \xi_{x_0}^{-1}.$$

Par définition même, la classe dans **Jac** (X) du vecteur

$$(\textstyle\int_c v_1, \ldots, \int_c v_g)$$

ne dépend pas du chemin c joignant x_0 à x. Cette classe se désigne par $Y(x)$. On définit ainsi une application Y de X dans **Jac** (X).

Lemme 6. *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "Y"'] \arrow[dr, "\Xi"] & \\ \mathbf{Jac}\,(X) \arrow[rr, "\upsilon"] & & \mathbf{Pic}\,(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit c un chemin joignant x_0 à un point x de X. Le fibré principal $\Xi(x)$ est associé au diviseur $1 \cdot x - 1 \cdot x_0$. Il existe donc une forme différentielle w dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal $\Xi(x)$.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \int_c v$$

(§ 2, lemme 1). Il existe d'autre part une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que la forme $w + d''f$ soit fermée (§ 1, proposition 1). On a alors

$$w + d''f = \sum_{1 \leq j \leq 2g} w_j u_j$$

où $w_1, \ldots, w_{2g}$ sont des nombres complexes. Pour tout entier j compris entre 1 et g, on a

$$\int_c v_j = \int_X v_j \wedge w = \int_X v_j \wedge (w + d''f) = \sum_{1 \leq k \leq 2g} w_k \int_X v_j \wedge u_k$$
$$= \sum_{1 \leq k, l \leq 2g} w_k \omega_{jl} \lambda_{lk}$$

Ceci montre que $Y(x)$ est la classe dans $\mathbf{Jac}(X)$ du vecteur $\Omega\Lambda(w + d''f)$. Avec les notations du lemme 5, on a donc

$$\Omega\Lambda(w + d''f) = \Omega\Lambda({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega}' \\ Q^{-1}\,\Omega' \end{pmatrix} (w + d''f)$$
$$= (0 \quad -iP) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega}' \\ Q^{-1}\,\Omega' \end{pmatrix} (w + d''f) = M^{-1}\Omega'(w + d''f)$$

et l'on conclut en remarquant que la classe de $\Omega'(w + d''f)$ dans $\mathbf{Pic}(X)$ n'est autre que $\Xi(x)$.

LEMME 7. *Soit π un fibré en droites holomorphe sur X associé à un diviseur de la forme $1 \cdot x$. Si g est au moins égal à 1, la dimension de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est égale à 1.*

Supposons qu'il existe deux sections holomorphes s_0 et s_1 de π linéairement indépendantes et considérons l'application holomorphe $(s_0 : s_1)$ de X dans $\mathbf{P}^1$. Pour tout couple (λ_0, λ_1) de nombres complexes non tous deux nuls, la section $\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ possède un zéro et un seul. En effet, son ordre est égal à la classe de Chern de π. On en déduit aisément que l'application $(s_0 : s_1)$ est un isomorphisme (chap. I, § 4, proposition 1, corollaire), ce qui démontre l'assertion.

LEMME 8. *Si g est au moins égal à 1, les formes différentielles holomorphes sur X n'ont pas de zéro commun.*

Pour tout point x de X il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section holomorphe s de π dont le diviseur associé est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de Riemann-Roch et du lemme 7 que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0 (X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = g - 1 .$$

D'autre part, l'application $\otimes s$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^0 (X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ sur l'espace $L(1 \cdot x)$ des formes différentielles holomorphes qui s'annulent au point x. On en déduit que $L(1 \cdot x)$ est distinct de $\mathbf{H}^0 (X, \Omega^{1,0})$ ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 2. *Si g est au moins égal à 1, l'application canonique Ξ de X dans* **Pic** (X) *est un plongement.*

Conservons les notations précédentes. Soit U un ensemble ouvert simplement connexe dans X. Il existe des fonctions holomorphes $h_1, \ldots, h_g$ sur U telles que

$$v_1 |_U = dh_1, \ldots, v_g |_U = dh_g .$$

L'application holomorphe $(h_1, \ldots, h_g)$ de U dans $\mathbf{C}^g$ est un relèvement de $Y|_U$. Ceci montre déjà que Y (et par conséquent Ξ) est holomorphe et de rang 1 (lemme 8).

Montrons que Ξ est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux points distincts x et y de X tels que ξ_x et ξ_y coïncident. Désignons par π un fibré en droites holomorphe correspondant au fibré principal ξ_x. La dimension de $\mathbf{H}^0 (X, \pi)$ est au moins égale à 2 ce qui est absurde (lemme 7).

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre* 1 *est une courbe elliptique.*