Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: §1. Lemme de Grothendieck

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

CHAPITRE III

THÉORÈME DE DUALITÉ

§ 1. LEMME DE GROTHENDIECK

Pour tout couple d'entiers (j, k), on définit par récurrence un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}$ en posant

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j\, \partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j-1}\, \partial \bar{z}^k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j}\, \partial \bar{z}^{k-1}}\right).$$

Pour tout entier m au moins égal à $j + k$ et pour tout ensemble ouvert X de $\mathbf{C}$, cet opérateur se prolonge en une application linéaire continue de $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ dans $H^{m-j-k}_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ que l'on désigne encore par $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial z^j\, \partial \bar{z}^k}$.

Pour toute fonction u de $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X \frac{\partial^{j+k} u}{\partial z^j\, \partial \bar{z}^k}\, h\, d\mu = (-1)^{j+k} \int_X u\, \frac{\partial^{j+k} h}{\partial z^j\, \partial \bar{z}^k}\, d\mu\ .$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$.

Remarquons d'autre part que la topologie de $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ est définie par la famille de semi-normes

$$\|\quad\|_{m,K} = \max_{j+k \leq m} \left\| \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j\, \partial \bar{z}^k} \right\|_{L^2, K}$$

lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de X.

LEMME 1. *Pour toute fonction u de $H^{m+1}_c(X, \mathbf{C})$, on a*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_m = \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_m .$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où m est nul, par densité et continuité au cas où u appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. La formule d'intégration par parties montre alors que l'on a

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{L^2}^2 = \int_X \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\, d\mu = -\int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z\, \partial \bar{z}}\, d\mu$$

et

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right\|_{L^2}^2 = \int_X \left|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\, d\mu = -\int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}\, \partial z}\, d\mu$$

ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Il résulte en particulier du lemme 1 que l'on a

$$\| u \|_1 = \max\left(\| u \|_{L^2}, \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{L^2}\right)$$

pour toute fonction u de $H_c^1(X, \mathbf{C})$. Par conséquent, l'application

$$\left(j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) : H_K^1(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \mathbf{C})$$

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K de X.

Rappelons que les fonctions k et $\bar{k}$ définies sur $\mathbf{C}^*$ par

$$k(z) = \frac{1}{\pi z} \qquad \text{et} \qquad \bar{k}(z) = \frac{1}{\pi \bar{z}}$$

appartiennent à $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Désignons par D le disque de rayon r et de centre 0 dans $\mathbf{C}$ et par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}.$$

Remarquons que les fonctions $\alpha'\bar{k}$ et $\alpha''k$ appartiennent à $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{C})$. Par conséquent, si X et X' sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que X contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha k)*: L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\mathrm{loc}}^1(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \bar{k})*: L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\mathrm{loc}}^1(X', \mathbf{C})$$

$$(\alpha'' k)*: L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha' \bar{k})*: L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}).$$

THÉORÈME 1 (Grothendieck). *Le produit de convolution induit des applications linéaires continues*

$$(\alpha k)*: L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \qquad et \qquad (\alpha \bar{k})*: L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha'' k)*u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha \bar{k})*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' k)*u$$

pour toute fonction u *de* $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Soit u une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. On sait que $(\alpha k)*u$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ et l'on a

$$\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_D u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

pour tout point ζ de X'. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

où D_ε désigne le disque de centre 0 et de rayon ε. La formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire) montre que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z}$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}.$$

On a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\,\alpha(-\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = u(\zeta)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha''(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z}$$
$$= \big((\alpha'' k)*u\big)(\zeta)$$

ce qui démontre la formule dans ce cas.

Désignons par λ une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X', \mathbf{R})$ et par K un ensemble compact de X contenant l'ensemble supp $(\lambda) + D$. En vertu de ce qui précède, il existe des constantes c' et c'' telles que

$$\| \lambda((\alpha k)*u) \|_{L^2} \leqslant c' \| u \|_{L^2,K} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda((\alpha k)*u)) \right\|_{L^2} \leqslant c'' \| u \|_{L^2,K}$$

pour toute fonction u de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Ceci montre que l'application $(\alpha k)*$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ est continue lorsque l'on munit la source de la topologie induite par $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et le but de la topologie induite par $H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ (remarque 1). Par densité et continuité, on en déduit le théorème pour l'application $(\alpha k)*$. L'assertion relative à $(\alpha \bar{k})*$ s'en déduit par conjugaison.

Remarque 2.

On montre de la même manière que le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$k* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \bar{k}* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$$

et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(k*u) = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}*u) = u$$

pour toute fonction u de $L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. En particulier, les applications induites par $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur les germes à l'origine de fonctions continûment dérivables sont surjectives.

Soit X une courbe holomorphe et soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

L'opérateur d'' se prolonge en une application continue de $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$ dans $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. Pour toute section u de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ et toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X (d''u, h) = -\int_X (u, d''h) \quad {}^{1)}.$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire et chap. I, § 2, lemme 5).

Remarque 3.

L'application

$$(j, d''): H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

---

1) Les notations sont celles de chap. 0, § 4, exemple 1.

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K et X. C'est une conséquence immédiate des définitions et de la remarque 1.

THÉORÈME 2. *On désigne par* u *une section de* $L^2_{\text{loc}}(X, \pi)$ *et par* m *un entier naturel. S'il existe une section* v *de* $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *telle que*

$$\int_X (v, h) = - \int_X (u, d''h)$$

pour toute section h *de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, *alors* u *appartient à* $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$.

La question étant locale, on se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et π le fibré produit $\mathbf{C}_X$. L'hypothèse signifie donc que la dérivée faible $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ existe et appartient à $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Désignons par X' un ensemble ouvert relativement compact dans X, par D un disque de centre 0 tel que X contienne $X' + D$ et par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Il résulte du théorème 1 que l'on a

$$u\,|_{X'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k) * u) - (\alpha'' k) * u = (\alpha k) * \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (\alpha'' k) * u\,.$$

Par récurrence sur m, il résulte de ce même théorème que $u\,\big|_{X'}$ appartient à $H^{m+1}_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 2. Si* v *est indéfiniment dérivable, il en est de même de* u. *En particulier, si* v *est nulle, la section* u *est holomorphe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme de Sobolev (chap. II, § 2, théorème 1, corollaire).

LEMME 2. *Pour tout point* x *de* X, *il existe des voisinages ouverts* U *et* V *de* x *et une application linéaire continue* P *de* $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_{\text{loc}}(U, \pi)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour toute section u *de* $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, *la section*

$$u\,|_U - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) L'application P *s'annule sur l'ensemble des sections de* $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dont la restriction à* V *est nulle.*

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et que π est le fibré produit $\mathbf{C}^p_X$. On désigne par V un voisinage ouvert de x dans X, par U un voisinage ouvert relativement compact de x dans V et par D un disque centré à l'origine tel que V contienne $U + D$. Toute section u de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ s'écrit

$$u = (u_1, \ldots, u_p)\, d\bar{z}$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions de $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il suffit de poser

$$P(u) = \big((\alpha k) * u_1, \ldots, (\alpha k) * u_p\big)$$

où α est une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 (théorème 1).

THÉORÈME 3. *Il existe une application linéaire continue* P *de* $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour toute section u *de* $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, *la section*

$$u - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si u *est à support compact, il en est de même de* $P(u)$.

Il existe deux recouvrements ouverts localement finis $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et $(V_\iota)_{\iota \in I}$ de X, tels que U_ι soit relativement compact dans V_ι et V_ι relativement compact dans X et, pour chaque indice ι, une application linéaire continue P_ι de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(U_\iota, \pi)$ vérifiant les conditions du lemme 2. On désigne par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Pour toute section u de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ et pour tout couple (ι, κ) d'indices la section

$$v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u)$$

est indéfiniment dérivable sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (théorème de regularité). On désigne par $\tilde{v}_{\kappa\iota}$ la section de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ obtenue en prolongeant $\alpha_\kappa v_{\kappa\iota}$ par 0 et l'on pose

$$v_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} \tilde{v}_{\kappa\iota}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). On a

$$v_\iota - v_\kappa = v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u),$$

et par conséquent les sections $P_\iota(u) - v_\iota$ se recollent en une section $P(u)$ de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$. Il est clair que P est linéaire continue et l'on a

$$u|_{U_\iota} - (d'' \cdot P)(u)|_{U_\iota} = u|_{U_\iota} - (d'' \cdot P_\iota)(u) + d'' v_\iota$$

ce qui démontre (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que le support de $P(u)$ est contenu dans $\bigcup_{\iota \in I'} U_\iota$

$$I' = \{\, \iota \in I \mid \text{il existe } \kappa \in I \text{ tel que } U_\iota \cap U_\kappa \neq \varnothing \text{ et } V_\kappa \cap \operatorname{supp}(u) \neq \varnothing \,\}.$$

Ceci résulte aisément de la construction et de ce que $P_\iota(u)$ est nul chaque fois que le support de u ne rencontre pas V_ι.

On appelle *paramétrix* de d'' toute application linéaire continue P vérifiant les conditions du théorème 3.

Si P est une paramétrix de d'', le théorème de régularité montre que $P(u)$ est indéfiniment dérivable si u l'est. De même, pour toute section v de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ la section

$$v - (P \cdot d'')(v)$$

est indéfiniment dérivable.

Il résulte d'autre part du théorème du graphe fermé que les applications linéaire

$$1 - d'' \cdot P \colon L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'' \colon H^1_{\text{loc}}(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi),$$

$$1 - d'' \cdot P \colon L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'' \colon H^1_c(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$$

sont continues.

PROPOSITION 1. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ et $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ respectivement induisent des isomorphismes de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'' \colon H^1_{\text{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ et $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_c(X, \pi)$ et $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ respectivement induisent des isomorphismes de $\mathbf{H}^0_c(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1_c(X, \pi)$ sur le noyau et le conoyau de l'application

$$d'' \colon H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une paramétrix.