

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.  
**Kapitel:** Chapitre III THÉORÈME DE DUALITÉ  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### CHAPITRE III

## THÉORÈME DE DUALITÉ

### § 1. LEMME DE GROTHENDIECK

Pour tout couple d'entiers  $(j, k)$ , on définit par récurrence un opérateur différentiel sur  $\mathbf{C}$  en posant

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j-1} \partial \bar{z}^k} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^j \partial \bar{z}^{k-1}} \right).$$

Pour tout entier  $m$  au moins égal à  $j + k$  et pour tout ensemble ouvert  $X$  de  $\mathbf{C}$ , cet opérateur se prolonge en une application linéaire continue de  $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$  dans  $H_{\text{loc}}^{m-j-k}(X, \mathbf{C})$  que l'on désigne encore par  $\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}$ .

Pour toute fonction  $u$  de  $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$  et toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$ , on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X \frac{\partial^{j+k} u}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} h \, d\mu = (-1)^{j+k} \int_X u \frac{\partial^{j+k} h}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} d\mu.$$

En effet, pour  $h$  fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur  $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$  qui coïncident sur  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$ .

Remarquons d'autre part que la topologie de  $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$  est définie par la famille de semi-normes

$$\| \cdot \|_{m,K} = \max_{j+k \leq m} \left\| \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \right\|_{L^2, K}$$

lorsque  $K$  parcourt l'ensemble des parties compactes de  $X$ .

LEMME 1. Pour toute fonction  $u$  de  $H_c^{m+1}(X, \mathbf{C})$ , on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_m = \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_m.$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où  $m$  est nul, par densité et continuité au cas où  $u$  appartient à  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{C})$ . La formule d'intégration par parties montre alors que l'on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \partial \bar{z}} d\mu$$

et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial z} d\mu$$

ce qui démontre l'assertion.

*Remarque 1.*

Il résulte en particulier du lemme 1 que l'on a

$$\|u\|_1 = \max \left( \|u\|_{L^2}, \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2} \right)$$

pour toute fonction  $u$  de  $H_c^1(X, \mathbb{C})$ . Par conséquent, l'application

$$\left( j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) : H_K^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_K^2(X, \mathbb{C}) \oplus L_K^2(X, \mathbb{C})$$

où  $j$  désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte  $K$  de  $X$ .

Rappelons que les fonctions  $k$  et  $\bar{k}$  définies sur  $\mathbb{C}^*$  par

$$k(z) = \frac{1}{\pi z} \quad \text{et} \quad \bar{k}(z) = \frac{1}{\pi \bar{z}}$$

appartiennent à  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ .

Désignons par  $D$  le disque de rayon  $r$  et de centre 0 dans  $\mathbb{C}$  et par  $\alpha$  une fonction de  $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbb{R})$  égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad \text{et} \quad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}.$$

Remarquons que les fonctions  $\alpha' \bar{k}$  et  $\alpha'' k$  appartiennent à  $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbb{C})$ . Par conséquent, si  $X$  et  $X'$  sont des ensembles ouverts de  $\mathbb{C}$  tels que  $X$  contienne  $X' + D$ , le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$\begin{aligned} (\alpha k)* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbb{C}) &\rightarrow L_{\text{loc}}^1(X', \mathbb{C}) & \text{et} & & (\alpha \bar{k})* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbb{C}) &\rightarrow L_{\text{loc}}^1(X', \mathbb{C}) \\ (\alpha'' k)* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(X', \mathbb{C}) & \text{et} & & (\alpha' \bar{k})* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(X', \mathbb{C}). \end{aligned}$$

THÉORÈME 1 (Grothendieck). *Le produit de convolution induit des applications linéaires continues*

$$(\alpha k)*: L_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{loc}}^1(X', \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad (\alpha \bar{k})*: L_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{loc}}^1(X', \mathbb{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u) = u|_{X'} + (\alpha''k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}((\alpha \bar{k})*u) = u|_{X'} + (\alpha'k)*u$$

pour toute fonction  $u$  de  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C})$ .

Soit  $u$  une fonction de  $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ . On sait que  $(\alpha k)*u$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(X', \mathbb{C})$  et l'on a

$$((\alpha k)*u)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_X u(z) \alpha(\zeta - z) \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_D u(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

pour tout point  $\zeta$  de  $X'$ . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

où  $D_\varepsilon$  désigne le disque de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ . La formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire) montre que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u)(\zeta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz}{z} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha''(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) \alpha(-\varepsilon e^{i\theta}) d\theta = u(\zeta)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha''(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} &= \frac{1}{\pi} \int_X u(z) \alpha''(\zeta - z) \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} \\ &= ((\alpha''k)*u)(\zeta) \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule dans ce cas.

Désignons par  $\lambda$  une fonction de  $\mathcal{C}_c^\infty(X', \mathbb{R})$  et par  $K$  un ensemble compact de  $X$  contenant l'ensemble  $\text{supp}(\lambda) + D$ . En vertu de ce qui précède, il existe des constantes  $c'$  et  $c''$  telles que



$$\| \lambda((\alpha k)*u) \|_{L^2} \leq c' \| u \|_{L^2, K} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda((\alpha k)*u)) \right\|_{L^2} \leq c'' \| u \|_{L^2, K}$$

pour toute fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ . Ceci montre que l'application  $(\alpha k)*$  de  $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$  dans  $\mathcal{C}^\infty(X', \mathbb{C})$  est continue lorsque l'on munit la source de la topologie induite par  $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbb{C})$  et le but de la topologie induite par  $H^1_{\text{loc}}(X', \mathbb{C})$  (remarque 1). Par densité et continuité, on en déduit le théorème pour l'application  $(\alpha k)*$ . L'assertion relative à  $(\alpha \bar{k})*$  s'en déduit par conjugaison.

*Remarque 2.*

On montre de la même manière que le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$k* : L^2_c(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \bar{k}* : L^2_c(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (k*u) = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}*u) = u$$

pour toute fonction  $u$  de  $L^2_c(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ . En particulier, les applications induites par  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  sur les germes à l'origine de fonctions continûment dérivables sont surjectives.

Soit  $X$  une courbe holomorphe et soit  $\pi$  un fibré vectoriel holomorphe sur  $X$ .

L'opérateur  $d''$  se prolonge en une application continue de  $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$  dans  $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ . Pour toute section  $u$  de  $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$  et toute section  $h$  de  $\mathcal{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ , on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X (d''u, h) = - \int_X (u, d''h) \quad {}^1).$$

En effet, pour  $h$  fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur  $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$  qui coïncident sur  $\mathcal{C}^\infty_c(X, \pi)$  (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire et chap. I, § 2, lemme 5).

*Remarque 3.*

L'application

$$(j, d'') : H^1_K(X, \pi) \rightarrow L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

<sup>1)</sup> Les notations sont celles de chap. 0, § 4, exemple 1.

où  $j$  désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte  $K$  et  $X$ . C'est une conséquence immédiate des définitions et de la remarque 1.

**THÉORÈME 2.** *On désigne par  $u$  une section de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi)$  et par  $m$  un entier naturel. S'il existe une section  $v$  de  $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  telle que*

$$\int_X (v, h) = - \int_X (u, d''h)$$

*pour toute section  $h$  de  $\mathcal{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ , alors  $u$  appartient à  $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$ .*

La question étant locale, on se ramène immédiatement au cas où  $X$  est un ensemble ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\pi$  le fibré produit  $\mathbb{C}_X$ . L'hypothèse signifie donc que la dérivée faible  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$  existe et appartient à  $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbb{C})$ . Désignons par  $X'$  un ensemble ouvert relativement compact dans  $X$ , par  $D$  un disque de centre 0 tel que  $X$  contienne  $X' + D$  et par  $\alpha$  une fonction de  $\mathcal{C}^\infty_c(X, \mathbb{R})$  égale à 1 au voisinage de 0. Il résulte du théorème 1 que l'on a

$$u|_{X'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ((\alpha k) * u) - (\alpha'' k) * u = (\alpha k) * \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (\alpha'' k) * u.$$

Par récurrence sur  $m$ , il résulte de ce même théorème que  $u|_{X'}$  appartient à  $H^{m+1}_{\text{loc}}(X', \mathbb{C})$ , ce qui démontre l'assertion.

**COROLLAIRE** (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 2. Si  $v$  est indéfiniment dérivable, il en est de même de  $u$ . En particulier, si  $v$  est nulle, la section  $u$  est holomorphe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme de Sobolev (chap. II, § 2, théorème 1, corollaire).

**LEMME 2.** *Pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $V$  de  $x$  et une application linéaire continue  $P$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  dans  $H^1_{\text{loc}}(U, \pi)$  vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Pour toute section  $u$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ , la section*

$$u|_U - (d'' \cdot P)(u)$$

*est indéfiniment dérivable.*

(2) *L'application  $P$  s'annule sur l'ensemble des sections de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  dont la restriction à  $V$  est nulle.*

La question étant locale, on peut supposer que  $X$  est un ensemble ouvert de  $\mathbb{C}$  et que  $\pi$  est le fibré produit  $\mathbb{C}_X$ . On désigne par  $V$  un voisinage ouvert

de  $x$  dans  $X$ , par  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $x$  dans  $V$  et par  $D$  un disque centré à l'origine tel que  $V$  contienne  $U + D$ . Toute section  $u$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  s'écrit

$$u = (u_1, \dots, u_p) d\bar{z}$$

où  $u_1, \dots, u_p$  sont des fonctions de  $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbb{C})$ . Il suffit de poser

$$P(u) = ((\alpha k) * u_1, \dots, (\alpha k) * u_p)$$

où  $\alpha$  est une fonction de  $\mathcal{C}^\infty_c(D, \mathbb{R})$  égale à 1 au voisinage de 0 (théorème 1).

**THÉORÈME 3.** *Il existe une application linéaire continue  $P$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  dans  $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$  vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Pour toute section  $u$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ , la section*

$$u - (d'' \cdot P)(u)$$

*est indéfiniment dérivable.*

(2) *Si  $u$  est à support compact, il en est de même de  $P(u)$ .*

Il existe deux recouvrements ouverts localement finis  $(U_i)_{i \in I}$  et  $(V_i)_{i \in I}$  de  $X$ , tels que  $U_i$  soit relativement compact dans  $V_i$  et  $V_i$  relativement compact dans  $X$  et, pour chaque indice  $i$ , une application linéaire continue  $P_i$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  dans  $H^1_{\text{loc}}(U_i, \pi)$  vérifiant les conditions du lemme 2. On désigne par  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ .

Pour toute section  $u$  de  $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  et pour tout couple  $(i, \kappa)$  d'indices la section

$$v_{\kappa i} = P_i(u) - P_\kappa(u)$$

est indéfiniment dérivable sur  $U_i \cap U_\kappa$  (théorème de régularité). On désigne par  $\tilde{v}_{\kappa i}$  la section de  $\mathcal{C}^\infty(U_i, \pi)$  obtenue en prolongeant  $\alpha_\kappa v_{\kappa i}$  par 0 et l'on pose

$$v_i = \sum_{\kappa \in I \setminus \{i\}} \tilde{v}_{\kappa i}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). On a

$$v_i - v_\kappa = v_{\kappa i} = P_i(u) - P_\kappa(u),$$

et par conséquent les sections  $P_i(u) - v_i$  se recollent en une section  $P(u)$  de  $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ . Il est clair que  $P$  est linéaire continue et l'on a

$$u|_{U_i} - (d'' \cdot P)(u)|_{U_i} = u|_{U_i} - (d'' \cdot P_i)(u) + d'' v_i$$

ce qui démontre (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que le support de  $P(u)$  est contenu dans  $\bigcup_{i \in I'} U_i$

$$I' = \{ i \in I \mid \text{il existe } \kappa \in I \text{ tel que } U_i \cap U_\kappa \neq \emptyset \text{ et } V_\kappa \cap \text{supp}(u) \neq \emptyset \}.$$

Ceci résulte aisément de la construction et de ce que  $P_i(u)$  est nul chaque fois que le support de  $u$  ne rencontre pas  $V_i$ .

On appelle *paramétrix* de  $d''$  toute application linéaire continue  $P$  vérifiant les conditions du théorème 3.

Si  $P$  est une paramétrix de  $d''$ , le théorème de régularité montre que  $P(u)$  est indéfiniment dérivable si  $u$  l'est. De même, pour toute section  $v$  de  $H_{\text{loc}}^1(X, \pi)$  la section

$$v - (P \cdot d'')(v)$$

est indéfiniment dérivable.

Il résulte d'autre part du théorème du graphe fermé que les applications linéaire

$$1 - d'' \cdot P: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \pi),$$

$$1 - d'' \cdot P: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$$

sont continues.

PROPOSITION 1. (1) *Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de  $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$  et  $\mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  dans  $H_{\text{loc}}^1(X, \pi)$  et  $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  respectivement induisent des isomorphismes de  $\mathbf{H}^0(X, \pi)$  et  $\mathbf{H}^1(X, \pi)$  sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

(2) *Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$  et  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  dans  $H_c^1(X, \pi)$  et  $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  respectivement induisent des isomorphismes de  $\mathbf{H}_c^0(X, \pi)$  et  $\mathbf{H}_c^1(X, \pi)$  sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une paramétrix.

## § 2. DUALITÉ

On désigne toujours par  $X$  une courbe holomorphe et par  $\pi$  un fibré vectoriel holomorphe sur  $X$ .

Rappelons que l'on a deux dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques (chap. 0, § 4, exemple 1)

$$\Delta: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_{\text{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\Delta: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

L'ensemble des sections holomorphes (resp. holomorphes à support compact) de  $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$  s'identifie à un sous-espace fermé de  $L_{\text{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$  (resp.  $L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ ).

PROPOSITION 1. *Pour qu'une section  $u$  de  $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  (resp.  $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ ) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

$$(\text{resp. } d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}))$$

*il faut et il suffit qu'elle soit  $\Delta$ -orthogonale au sous-espace  $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$  (resp.  $\mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ ).*

Pour toute section  $h$  de  $H_c^1(X, \pi)$  et toute section  $v$  de  $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ , on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = - \int_X (h, d''v) = 0,$$

ce qui montre la nécessité de la condition puisque la forme bilinéaire  $\Delta$  est séparément continue.

Réciproquement, désignons par  $\alpha$  une forme linéaire continue sur  $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  nulle sur l'image de  $d''$ . Par dualité, il existe une section  $v$  de  $L_{\text{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$  telle que

$$\Delta(\cdot, v) = \alpha.$$

En particulier, pour toute section  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ , on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = \alpha(d''h) = 0.$$

Il résulte alors du théorème de régularité (§ 1, théorème 2, corollaire) que  $v$  est holomorphe et l'on a

$$\alpha(u) = \Delta(u, v) = 0.$$

On conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 1. *Par restriction et passage au quotient, les bijections canoniques*

$$\Delta_1: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\Delta_2: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

*induisent des bijections*

$$\tilde{\Delta}_1: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\text{Im } d''} \rightarrow \mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\tilde{\Delta}_2: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\text{Im } d''} \rightarrow \mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'.$$

Il résulte de la proposition 1 que les applications  $\tilde{\Delta}_1$  et  $\tilde{\Delta}_2$  sont bien définies et injectives. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elles sont surjectives.

COROLLAIRE (Théorème de dualité). (1) *Si l'image de l'opérateur*

$$d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels  $H_c^1(X, \pi)$  et  $H^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$  sont canoniquement isomorphes.*

(2) *Si l'image de l'opérateur*

$$d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels  $H^1(X, \pi)$  et  $H_c^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$  sont canoniquement isomorphes.*

Remarque 1.

Il résulte aisément du théorème du graphe fermé que les applications  $\tilde{\Delta}_1$  et  $\tilde{\Delta}_2$  du théorème 1 sont des isomorphismes.

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte  $K$  de  $X$ , l'opérateur*

$$d'': H_K^1(X, \pi) \rightarrow L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*a une image fermée et un noyau de dimension finie.*

Désignons par  $j$  l'injection canonique de  $H_K^1(X, \pi)$  dans  $L_K^2(X, \pi)$  et considérons les applications linéaires continues

$$H_K^1(X, \pi) \xrightarrow[(-j, 0)]{(j, d'')} L_K^2(X, \pi) \oplus L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

L'application  $(j, d'')$  est injective d'image fermée (§ 1, remarque 3). L'application  $(-j, 0)$  est un opérateur compact en vertu du lemme de Rellich

(chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe  $X$  est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'' : H^1(X, \pi) \rightarrow L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée. Les espaces  $H^1(X, \pi)$  et  $H^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$  sont alors canoniquement isomorphes et les espaces  $H^0(X, \pi)$  et  $H^1(X, \pi)$  sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

### § 3. LE CAS DU LAPLACIEN

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Soit  $X$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{C}$ . On dit qu'une fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{C})$  est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

Il résulte de cette définition que  $u$  est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par  $\mathcal{H}(X, \mathbf{k})$  (avec  $\mathbf{k}$  égal à  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbf{k}$ .

Remarquons que  $\mathcal{H}(X, \mathbf{k})$  est une sous-algèbre fermée de  $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{k})$ .

PROPOSITION 1. *Supposons  $X$  simplement connexe. Pour qu'une fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{R})$  soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si  $u$  est harmonique, la forme différentielle  $\frac{\partial u}{\partial z} dz$  est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe  $h$  sur  $X$  telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

(chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 1). On en déduit que

$$\frac{1}{2} d(h + \bar{h}) = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = du$$

ce qui démontre l'assertion.

**COROLLAIRE 1** (Principe du prolongement analytique). *Soit  $u$  une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe  $X$  de  $\mathbf{C}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *La fonction  $u$  est identiquement nulle.*
- (2) *Il existe un point de  $X$  où le germe de  $u$  est nul.*
- (3) *Il existe un point de  $X$  où toutes les dérivées partielles de  $u$  sont nulles.*

Il suffit de montrer que (3) implique (1). On peut supposer  $u$  à valeurs réelles. On désigne par  $\zeta$  un point de  $X$  où toutes les dérivées partielles de  $u$  sont nulles et par  $h$  une fonction holomorphe telle que

$$u = \operatorname{Re}(h) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial z}$$

au voisinage de  $\zeta$ . On en déduit que  $h$  est constante, purement imaginaire, et que  $u$  est nulle au voisinage de  $\zeta$ , ce qui établit l'assertion.

**COROLLAIRE 2** (Propriété de la moyenne). *Soit  $u$  une fonction harmonique sur un ensemble ouvert  $X$  de  $\mathbf{C}$  et soit  $D$  un disque de centre  $\zeta$  relativement compact dans  $X$ . On a*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} u(z) dz.$$

On peut supposer  $u$  à valeurs réelles. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 1 et de la formule de Cauchy (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 1).

**COROLLAIRE 3.** *Pour tout ensemble ouvert  $X$  de  $\mathbf{C}$ , les topologies induites sur  $\mathcal{H}(X, \mathbf{k})$  par  $L^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{k})$  et  $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{k})$  coïncident.*

La démonstration est analogue à celle du théorème de Weierstrass (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

**COROLLAIRE 4** (Principe du maximum). *Soit  $u$  une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe  $X$  de  $\mathbf{C}$ . Si  $u$  possède un maximum relatif en un point  $\zeta$  de  $X$ , elle est constante.*



En vertu du principe du prolongement analytique, il suffit de montrer que  $u$  est constante au voisinage de  $\zeta$ . Quitte à multiplier  $u$  par une constante convenable, on peut supposer  $u(\zeta)$  réel positif. Pour  $r$  suffisamment petit, on a par hypothèse

$$M(r) = \sup_{|z-\zeta|=r} |u(z)| \leq u(\zeta).$$

Réciproquement, la propriété de moyenne montre que  $u(\zeta)$  est majoré par  $M(r)$ . Ceci montre que la fonction  $g$  définie par

$$g(z) = \operatorname{Re}(u(\zeta) - u(z))$$

est réelle positive. Elle s'annule en un point  $z$  si et seulement si  $u(z)$  est égal à  $u(\zeta)$ . On conclut en remarquant que l'intégrale de  $g$  sur le bord du disque de centre  $\zeta$  et de rayon  $r$  est nulle.

LEMME 1. Soit  $l$  la fonction définie sur  $\mathbb{C}^*$  par la formule

$$l(z) = \frac{1}{\pi} \log |z|^2.$$

(1) La fonction  $l$  appartient à  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ .

(2) La fonction  $l$  est faiblement dérivable d'ordre  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . On a

$$\frac{\partial l}{\partial z} = \frac{1}{\pi z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi \bar{z}}.$$

La première assertion découle d'un calcul élémentaire en coordonnées polaires. Démontrons la seconde. Pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , on a

$$\int_{\mathbb{C}} kh \, d\mu = -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C} \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial l}{\partial z} h \, dz \wedge d\bar{z}$$

(on utilise les notations du paragraphe 1). La formule de Stokes montre alors que l'on a

$$\int_{\mathbb{C}} kh \, d\mu = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} + \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{C}} l \frac{\partial h}{\partial z} \, dz \wedge d\bar{z}.$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} = 0.$$

L'autre assertion se démontre de la même manière.

Désignons par  $D$  le disque de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $\mathbf{C}$  et par  $\alpha$  une fonction de  $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$  égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \quad \beta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Si  $X$  et  $X'$  sont des ensembles ouverts de  $\mathbf{C}$  tels que  $X$  contienne  $X' + D$ , le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha l)*: L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X', \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad (\beta l)*: L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X', \mathbf{C})$$

PROPOSITION 2. *Le produit de convolution induit une application linéaire continue*

$$(\alpha l)*: L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C}) \rightarrow H_{\text{loc}}^2(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} ((\alpha l)*u) = u|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

pour toute fonction  $u$  de  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C})$ .

Il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z} ((\alpha l)*u) = (\alpha' l)*u + (\alpha k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ((\alpha l)*u) = (\alpha'' l)*u + (\alpha \bar{k})*u.$$

La première assertion résulte donc du lemme de Grothendieck. Ce même lemme montre que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} ((\alpha l)*u) = u|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit  $X$  une courbe holomorphe.

On désigne par  $\mathcal{H}^0(X)$  et  $\mathcal{H}^1(X)$  le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d'' : \mathcal{C}(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \Omega^{1,1}),$$

par  $\mathcal{H}_c^0(X)$  et  $\mathcal{H}_c^1(X)$  le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d'' : \mathcal{C}_c(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}_c(X, \Omega^{1,1}).$$

Remarquons que l'ensemble  $\mathcal{H}^0(X)$  s'identifie à l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $X$  (i.e. les fonctions dont l'expression dans toute carte est

harmonique). En particulier, l'espace  $\mathcal{H}^0(X)$  est réduit aux fonctions localement constantes si  $X$  est compacte (principe du maximum), l'espace  $\mathcal{H}_c^0(X)$  est nul si  $X$  est ouverte (principe du prolongement analytique).

On peut développer pour l'opérateur  $d' \cdot d''$  une théorie semblable à celle développée aux paragraphes précédents pour l'opérateur  $d''$ . Nous nous contenterons d'énoncer les résultats: les démonstrations sont laissées en exercice au lecteur.

**THÉORÈME 1.** *On désigne par  $u$  une fonction de  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C})$  et par  $m$  un entier naturel. S'il existe une forme différentielle  $v$  de  $H_{\text{loc}}^m(X, \Omega^{1,1})$  telle que*

$$\int_X hv = \int_X u (d' \cdot d'')(h)$$

*pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{C})$ , alors  $u$  appartient à  $H_{\text{loc}}^{m+2}(X, \mathbb{C})$ .*

**COROLLAIRE** (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 1. Si  $v$  est indéfiniment dérivable, il en est de même de  $u$ . En particulier, si  $v$  est nulle, la fonction  $u$  est harmonique.*

On appelle *paramétrix* de  $d' \cdot d''$  toute application linéaire continue  $P$  de  $L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1})$  dans  $H_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C})$  vérifiant les conditions suivantes

(1) Pour toute forme différentielle  $u$  de  $L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1})$ , la forme différentielle

$$u - (d' \cdot d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si  $u$  est à support compact, il en est de même de  $P(u)$ .

Les propriétés suivantes sont alors des conséquences du théorème de régularité:

(3) Si  $u$  est indéfiniment dérivable, il en est de même de  $P(u)$ .

(4) Pour toute fonction  $v$  de  $H_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C})$ , la fonction

$$v - (P \cdot d' \cdot d'')(u)$$

est indéfiniment dérivable.

**THÉORÈME 2.** *L'opérateur  $d' \cdot d''$  possède une paramétrix.*

**COROLLAIRE.** (1) *Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de  $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$  et  $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$  dans  $H_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C})$  et  $L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1})$*

respectivement induisent des bijections de  $\mathcal{H}^0(X)$  et  $\mathcal{H}^1(X)$  sur le noyau et le conoyau de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H_{\text{loc}}^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1}).$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{C})$  et  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega^{1,1})$  dans  $H_c^2(X, \mathbb{C})$  et  $L_c^2(X, \Omega^{1,1})$  respectivement induisent des bijections de  $\mathcal{H}_c^0(X)$  et  $\mathcal{H}_c^1(X)$  sur le noyau et le conoyau de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H_c^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_c^2(X, \Omega^{1,1}).$$

Considérons les dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques

$$\Delta : L_c^2(X, \Omega^{1,1}) \times L_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\Delta : L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1}) \times L_c^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

L'ensemble des fonctions harmoniques (resp. harmoniques à support compact) sur  $X$  s'identifie à un sous-espace fermé de  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C})$  (resp.  $L_c^2(X, \mathbb{C})$ ).

PROPOSITION 3. Pour qu'une forme différentielle  $u$  de  $L_c^2(X, \Omega^{1,1})$  (resp.  $L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1})$ ) soit adhérente à l'image de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H_c^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_c^2(X, \Omega^{1,1})$$

$$(\text{resp. } d' \cdot d'' : H_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1})),$$

il faut et il suffit qu'elle soit  $\Delta$ -orthogonale au sous-espace  $\mathcal{H}^0(X)$  (resp.  $\mathcal{H}_c^0(X)$ ).

THÉORÈME 3 (Théorème de dualité). (1) Si l'image de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H_c^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_c^2(X, \Omega^{1,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels  $\mathcal{H}_c^1(X)$  et  $\mathcal{H}^0(X)'$  sont canoniquement isomorphes.

(2) Si l'image de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H_{\text{loc}}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \Omega^{1,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels  $\mathcal{H}^1(X)$  et  $\mathcal{H}_c^0(X)'$  sont canoniquement isomorphes.

*Remarque 1.*

Pour toute partie compacte  $K$  de  $X$ , l'application

$$(j_1, j_2 \cdot d'', d' \cdot d'') : H_K^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_K^2(X, \mathbb{C}) \oplus L_K^2(X, \Omega^{0,1}) \oplus L_K^2(X, \Omega^{1,1})$$

où  $j_1$  et  $j_2$  désignent les injections canoniques de  $H_K^2(X, \mathbb{C})$  dans  $L_K^2(X, \mathbb{C})$  et de  $H_K^1(X, \Omega^{0,1})$  dans  $L_K^2(X, \Omega^{0,1})$  respectivement, est injective d'image fermée (§ 1, lemme 1).

PROPOSITION 4. *Pour toute partie compacte  $K$  de  $X$ , l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H_K^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L_K^2(X, \Omega^{1,1})$$

*a une image fermée et un noyau de dimension finie.*

*En particulier, si  $X$  est compacte connexe, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme de  $\mathcal{H}^1(X)$  sur  $\mathbb{C}$ .*