**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 21 (1975)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.
**Kapitel:** Chapitre III THÉORÈME DE DUALITÉ
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-47334

# CHAPITRE III

# THÉORÈME DE DUALITÉ

## § 1. LEMME DE GROTHENDIECK

Pour tout couple d'entiers $(j, k)$, on définit par récurrence un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}$ en posant

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j\,\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j-1}\,\partial \bar{z}^k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^j\,\partial \bar{z}^{k-1}}\right).$$

Pour tout entier $m$ au moins égal à $j + k$ et pour tout ensemble ouvert $X$ de $\mathbf{C}$, cet opérateur se prolonge en une application linéaire continue de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ dans $H^{m-j-k}_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ que l'on désigne encore par $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial z^j\,\partial \bar{z}^k}$.

Pour toute fonction $u$ de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et toute fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X \frac{\partial^{j+k} u}{\partial z^j\,\partial \bar{z}^k}\, h\, d\mu = (-1)^{j+k} \int_X u\, \frac{\partial^{j+k} h}{\partial z^j\,\partial \bar{z}^k}\, d\mu .$$

En effet, pour $h$ fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$.

Remarquons d'autre part que la topologie de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ est définie par la famille de semi-normes

$$\| \quad \|_{m,K} = \max_{j+k \leq m} \left\| \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j\,\partial \bar{z}^k} \right\|_{L^2,K}$$

lorsque $K$ parcourt l'ensemble des parties compactes de $X$.

LEMME 1. *Pour toute fonction $u$ de $H^{m+1}_c(X, \mathbf{C})$, on a*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_m = \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_m .$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où $m$ est nul, par densité et continuité au cas où $u$ appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. La formule d'intégration par parties montre alors que l'on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \, \partial \bar{z}} d\mu$$

et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \, \partial z} d\mu$$

ce qui démontre l'assertion.

*Remarque 1.*

Il résulte en particulier du lemme 1 que l'on a

$$\| u \|_1 = \max \left( \| u \|_{L^2}, \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2} \right)$$

pour toute fonction $u$ de $H_c^1(X, \mathbf{C})$. Par conséquent, l'application

$$\left( j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) : H_K^1(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \mathbf{C})$$

où $j$ désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte $K$ de $X$.

Rappelons que les fonctions $k$ et $\bar{k}$ définies sur $\mathbf{C}^*$ par

$$k(z) = \frac{1}{\pi z} \qquad \text{et} \qquad \bar{k}(z) = \frac{1}{\pi \bar{z}}$$

appartiennent à $L_{\text{loc}}^1(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Désignons par $D$ le disque de rayon $r$ et de centre 0 dans $\mathbf{C}$ et par $\alpha$ une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} .$$

Remarquons que les fonctions $\alpha' \bar{k}$ et $\alpha'' k$ appartiennent à $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{C})$. Par conséquent, si $X$ et $X'$ sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que $X$ contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha k)* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \bar{k})* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C})$$

$$(\alpha'' k)* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha' \bar{k})* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}) .$$

THÉORÈME 1 (Grothendieck). *Le produit de convolution induit des applications linéaires continues*

$$(\alpha k)*: L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C}) \qquad et \qquad (\alpha \bar{k})*: L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

*et l'on a*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha'' k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha \bar{k})*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' k)*u$$

*pour toute fonction* $u$ *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Soit $u$ une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. On sait que $(\alpha k)*u$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ et l'on a

$$\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_D u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

pour tout point $\zeta$ de $X'$. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

où $D_\varepsilon$ désigne le disque de centre 0 et de rayon $\varepsilon$. La formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire) montre que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}.$$

On a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\,\alpha(-\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = u(\zeta)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha''(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \big((\alpha'' k)*u\big)(\zeta)$$

ce qui démontre la formule dans ce cas.

Désignons par $\lambda$ une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X', \mathbf{R})$ et par $K$ un ensemble compact de $X$ contenant l'ensemble $\mathrm{supp}\,(\lambda) + D$. En vertu de ce qui précède, il existe des constantes $c'$ et $c''$ telles que

$$\| \lambda((\alpha k)*u) \|_{L^2} \leqslant c' \| u \|_{L^2,K} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda((\alpha k)*u)) \right\|_{L^2} \leqslant c'' \| u \|_{L^2,K}$$

pour toute fonction $u$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Ceci montre que l'application $(\alpha k)*$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ est continue lorsque l'on munit la source de la topologie induite par $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et le but de la topologie induite par $H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ (remarque 1). Par densité et continuité, on en déduit le théorème pour l'application $(\alpha k)*$. L'assertion relative à $(\alpha \bar{k})*$ s'en déduit par conjugaison.

*Remarque 2.*

On montre de la même manière que le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$k* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \bar{k}* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$$

et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (k*u) = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}*u) = u$$

pour toute fonction $u$ de $L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. En particulier, les applications induites par $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur les germes à l'origine de fonctions continûment dérivables sont surjectives.

Soit $X$ une courbe holomorphe et soit $\pi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$.

L'opérateur $d''$ se prolonge en une application continue de $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$ dans $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. Pour toute section $u$ de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ et toute section $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X (d''u, h) = -\int_X (u, d''h) \quad [1].$$

En effet, pour $h$ fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire et chap. I, § 2, lemme 5).

*Remarque 3.*

L'application

$$(j, d'') : H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

[1]) Les notations sont celles de chap. 0, § 4, exemple 1.

où $j$ désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte $K$ et $X$. C'est une conséquence immédiate des définitions et de la remarque 1.

THÉORÈME 2. *On désigne par $u$ une section de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ et par $m$ un entier naturel. S'il existe une section $v$ de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ telle que*

$$\int_X (v, h) = -\int_X (u, d'' h)$$

*pour toute section $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, alors $u$ appartient à $H^{m+1}_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$.*

La question étant locale, on se ramène immédiatement au cas où $X$ est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et $\pi$ le fibré produit $\mathbf{C}_X$. L'hypothèse signifie donc que la dérivée faible $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ existe et appartient à $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Désignons par $X'$ un ensemble ouvert relativement compact dans $X$, par $D$ un disque de centre 0 tel que $X$ contienne $X' + D$ et par $\alpha$ une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Il résulte du théorème 1 que l'on a

$$u|_{X'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k) * u) - (\alpha'' k) * u = (\alpha k) * \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (\alpha'' k) * u .$$

Par récurrence sur $m$, il résulte de ce même théorème que $u\,|_{X'}$ appartient à $H^{m+1}_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 2. Si $v$ est indéfiniment dérivable, il en est de même de $u$. En particulier, si $v$ est nulle, la section $u$ est holomorphe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme de Sobolev (chap. II, § 2, théorème 1, corollaire).

LEMME 2. *Pour tout point $x$ de $X$, il existe des voisinages ouverts $U$ et $V$ de $x$ et une application linéaire continue $P$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(U, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

*(1) Pour toute section $u$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section*

$$u|_U - (d'' \cdot P)(u)$$

*est indéfiniment dérivable.*

*(2) L'application $P$ s'annule sur l'ensemble des sections de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la restriction à $V$ est nulle.*

La question étant locale, on peut supposer que $X$ est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et que $\pi$ est le fibré produit $\mathbf{C}^p_X$. On désigne par $V$ un voisinage ouvert

de $x$ dans $X$, par $U$ un voisinage ouvert relativement compact de $x$ dans $V$ et par $D$ un disque centré à l'origine tel que $V$ contienne $U + D$. Toute section $u$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ s'écrit

$$u = (u_1, \ldots, u_p)\, d\bar{z}$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions de $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il suffit de poser

$$P(u) = \big((\alpha k) * u_1, \ldots, (\alpha k) * u_p\big)$$

où $\alpha$ est une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 (théorème 1).

THÉORÈME 3. *Il existe une application linéaire continue $P$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

*(1) Pour toute section $u$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section*

$$u - (d'' \cdot P)(u)$$

*est indéfiniment dérivable.*

*(2) Si $u$ est à support compact, il en est de même de $P(u)$.*

Il existe deux recouvrements ouverts localement finis $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et $(V_\iota)_{\iota \in I}$ de $X$, tels que $U_\iota$ soit relativement compact dans $V_\iota$ et $V_\iota$ relativement compact dans $X$ et, pour chaque indice $\iota$, une application linéaire continue $P_\iota$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(U_\iota, \pi)$ vérifiant les conditions du lemme 2. On désigne par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Pour toute section $u$ de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ et pour tout couple $(\iota, \kappa)$ d'indices la section

$$v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u)$$

est indéfiniment dérivable sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (théorème de regularité). On désigne par $\tilde{v}_{\kappa\iota}$ la section de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ obtenue en prolongeant $\alpha_\kappa v_{\kappa\iota}$ par 0 et l'on pose

$$v_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} \tilde{v}_{\kappa\iota}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). On a

$$v_\iota - v_\kappa = v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u)\,,$$

et par conséquent les sections $P_\iota(u) - v_\iota$ se recollent en une section $P(u)$ de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$. Il est clair que $P$ est linéaire continue et l'on a

$$u|_{U_\iota} - (d'' \cdot P)(u)|_{U_\iota} = u|_{U_\iota} - (d'' \cdot P_\iota)(u) + d'' v_\iota$$

ce qui démontre (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que le support de $P(u)$ est contenu dans $\bigcup_{\iota \in I'} U_\iota$

$$I' = \{ \iota \in I \mid \text{il existe } \kappa \in I \text{ tel que } U_\iota \cap U_\kappa \neq \varnothing \text{ et } V_\kappa \cap \mathrm{supp}(u) \neq \varnothing \}.$$

Ceci résulte aisément de la construction et de ce que $P_\iota(u)$ est nul chaque fois que le support de $u$ ne rencontre pas $V_\iota$.

On appelle *paramétrix* de $d''$ toute application linéaire continue $P$ vérifiant les conditions du théorème 3.

Si $P$ est une paramétrix de $d''$, le théorème de régularité montre que $P(u)$ est indéfiniment dérivable si $u$ l'est. De même, pour toute section $v$ de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ la section

$$v - (P \cdot d'')(v)$$

est indéfiniment dérivable.

Il résulte d'autre part du théorème du graphe fermé que les applications linéaire

$$1 - d'' \cdot P : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi),$$

$$1 - d'' \cdot P : L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'' : H^1_c(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$$

sont continues.

PROPOSITION 1. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ *et* $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ *et* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *respectivement induisent des isomorphismes de* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

*(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ *et* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_c(X, \pi)$ *et* $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *respectivement induisent des isomorphismes de* $\mathbf{H}^0_c(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1_c(X, \pi)$ *sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'' : H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une paramétrix.

## § 2. Dualité

On désigne toujours par $X$ une courbe holomorphe et par $\pi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$.

Rappelons que l'on a deux dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques (chap. 0, § 4, exemple 1)

$$\Delta\colon\ L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}) \times L^2_c(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\ .$$

L'ensemble des sections holomorphes (resp. holomorphes à support compact) de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})$ (resp. $L^2_c(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})$).

Proposition 1. *Pour qu'une section $u$ de $L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$ (resp. $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d''\colon\ H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$$

$$(\text{resp. } d''\colon\ H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}))$$

*il faut et il suffit qu'elle soit $\Delta$ — orthogonale au sous-espace $\mathcal{O}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})$ (resp. $\mathcal{O}_c(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})$).*

Pour toute section $h$ de $H^1_c(X, \pi)$ et toute section $v$ de $\mathcal{O}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = -\int_X (h, d''v) = 0\ ,$$

ce qui montre la nécessité de la condition puisque la forme bilinéaire $\Delta$ est séparément continue.

Réciproquement, désignons par $\alpha$ une forme linéaire continue sur $L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de $d''$. Par dualité, il existe une section $v$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})$ telle que

$$\Delta(\ , v) = \alpha\ .$$

En particulier, pour toute section $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = \alpha(d''h) = 0\ .$$

Il résulte alors du théorème de régularité (§ 1, théorème 2, corollaire) que $v$ est holomorphe et l'on a

$$\alpha(u) = \Delta(u, v) = 0\ .$$

On conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 1. *Par restriction et passage au quotient, les bijections canoniques*

$$\Delta_1 : L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

*et*

$$\Delta_2 : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

*induisent des bijections*

$$\tilde{\Delta}_1 : L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\mathrm{Im}\, d''} \to \mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

*et*

$$\tilde{\Delta}_2 : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\mathrm{Im}\, d''} \to \mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})' .$$

Il résulte de la proposition 1 que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ sont bien définies et injectives. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elles sont surjectives.

COROLLAIRE (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d'' : H_c^1(X, \pi) \to L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels* $\mathbf{H}_c^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

*(2) Si l'image de l'opérateur*

$$d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}_c^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

*Remarque 1.*

Il résulte aisément du théorème du graphe fermé que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ du théorème 1 sont des isomorphismes.

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte* $K$ *de* $X$, *l'opérateur*

$$d'' : H_K^1(X, \pi) \to L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*a une image fermée et un noyau de dimension finie.*

Désignons par $j$ l'injection canonique de $H_K^1(X, \pi)$ dans $L_K^2(X, \pi)$ et considérons les applications linéaires continues

$$H_K^1(X, \pi) \underset{(-j,0)}{\overset{(j,d'')}{\rightrightarrows}} L_K^2(X, \pi) \oplus L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

L'application $(j, d'')$ est injective d'image fermée (§ 1, remarque 3). L'application $(-j, 0)$ est un opérateur compact en vertu du lemme de Rellich

(chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe $X$ est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'' : H^1(X, \pi) \to L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée. Les espaces* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont alors canoniquement isomorphes et les espaces* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

## § 3. LE CAS DU LAPLACIEN

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Soit $X$ un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction $u$ de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{C})$ est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette définition que $u$ est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ (avec $\mathbf{k}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) l'ensemble des fonctions harmoniques sur $X$ à valeurs dans $\mathbf{k}$.

Remarquons que $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{k})$.

PROPOSITION 1. *Supposons $X$ simplement connexe. Pour qu'une fonction $u$ de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si $u$ est harmonique, la forme différentielle $\dfrac{\partial u}{\partial z}\, dz$ est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe $h$ sur $X$ telle que

$$\frac{1}{2}\, dh = \frac{\partial u}{\partial z}\, dz$$

(chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 1). On en déduit que

$$\frac{1}{2}\, d(h+\bar{h}) = \frac{\partial u}{\partial z}\, dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} = du$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1 (Principe du prolongement analytique). *Soit $u$ une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe $X$ de* **C**. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) La fonction $u$ est identiquement nulle.*

*(2) Il existe un point de $X$ ou le germe de $u$ est nul.*

*(3) Il existe un point de $X$ où toutes les dérivées partielles de $u$ sont nulles.*

Il suffit de montrer que (3) implique (1). On peut supposer $u$ à valeurs réelles. On désigne par $\zeta$ un point de $X$ où toutes les dérivées partielles de $u$ sont nulles et par $h$ une fonction holomorphe telle que

$$u = \mathrm{Re}\,(h) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial z}$$

au voisinage de $\zeta$. On en déduit que $h$ est constante, purement imaginaire, et que $u$ est nulle au voisinage de $\zeta$, ce qui établit l'assertion.

COROLLAIRE 2 (Propriété de la moyenne). *Soit $u$ une fonction harmonique sur un ensemble ouvert $X$ de* **C** *et soit $D$ un disque de centre $\zeta$ relativement compact dans $X$. On a*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} u(z)\, dz\ .$$

On peut supposer $u$ à valeurs réelles. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 1 et de la formule de Cauchy (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 1).

COROLLAIRE 3. *Pour tout ensemble ouvert $X$ de* **C**, *les topologies induites sur $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ par $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{k})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{k})$ coïncident.*

La démonstration est analogue à celle du théorème de Weierstrass (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

COROLLAIRE 4 (Principe du maximum). *Soit $u$ une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe $X$ de* **C**. *Si $u$ possède un maximum relatif en un point $\zeta$ de $X$, elle est constante.*

En vertu du principe du prolongement analytique, il suffit de montrer que $u$ est constante au voisinage de $\zeta$. Quitte à multiplier $u$ par une constante convenable, on peut supposer $u(\zeta)$ réel positif. Pour $r$ suffisamment petit, on a par hypothèse

$$M(r) = \sup_{|z-\zeta|=r} |u(z)| \leqslant u(\zeta).$$

Réciproquement, la propriété de moyenne montre que $u(\zeta)$ est majoré par $M(r)$. Ceci montre que la fonction $g$ définie par

$$g(z) = \mathrm{Re}\big(u(\zeta) - u(z)\big)$$

est réelle positive. Elle s'annule en un point $z$ si et seulement si $u(z)$ est égal à $u(\zeta)$. On conclut en remarquant que l'intégrale de $g$ sur le bord du disque de centre $\zeta$ et de rayon $r$ est nulle.

LEMME 1. *Soit $l$ la fonction définie sur $\mathbf{C}^*$ par la formule*

$$l(z) = \frac{1}{\pi} \log |z|^2 .$$

*(1) La fonction $l$ appartient à $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.*

*(2) La fonction $l$ est faiblement dérivable d'ordre $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On a*

$$\frac{\partial l}{\partial z} = \frac{1}{\pi z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi \bar{z}} .$$

La première assertion découle d'un calcul élémentaire en coordonnées polaires. Démontrons la seconde. Pour toute fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh \, d\mu = -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{C} \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial l}{\partial z} h \, dz \wedge d\bar{z}$$

(on utilise les notations du paragraphe 1). La formule de Stokes montre alors que l'on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh \, d\mu = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} + \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{C}} l \frac{\partial h}{\partial z} \, dz \wedge d\bar{z} .$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} = 0 .$$

L'autre assertion se démontre de la même manière.

Désignons par $D$ le disque de centre 0 et de rayon $r$ dans $\mathbf{C}$ et par $\alpha$ une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{D}, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \qquad \beta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Si $X$ et $X'$ sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que $X$ contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha l)*\colon L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X', \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad (\beta l)*\colon L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$$

PROPOSITION 2. *Le produit de convolution induit une application linéaire continue*

$$(\alpha l)*\colon L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^2_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

*et l'on a*

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

*pour toute fonction $u$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.*

Il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha' l)*u + (\alpha k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha'' l)*u + (\alpha \bar{k})*u\,.$$

La première assertion résulte donc du lemme de Grothendieck. Ce même lemme montre que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit $X$ une courbe holomorphe.

On désigne par $\mathscr{H}^0(X)$ et $\mathscr{H}^1(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d''\colon \mathscr{C}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}(X, \Omega^{1,1}),$$

par $\mathscr{H}^0_c(X)$ et $\mathscr{H}^1_c(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d''\colon \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}_c(X, \Omega^{1,1}).$$

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{H}^0(X)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions harmoniques sur $X$ (i.e. les fonctions dont l'expression dans toute carte est

harmonique). En particulier, l'espace $\mathscr{H}^0(X)$ est réduit aux fonctions localement constantes si $X$ est compacte (principe du maximum), l'espace $\mathscr{H}^0_c(X)$ est nul si $X$ est ouverte (principe du prolongement analytique).

On peut développer pour l'opérateur $d' \cdot d''$ une théorie semblable à celle développée aux paragraphes précédents pour l'opérateur $d''$. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats: les démonstrations sont laissées en exercice au lecteur.

THÉORÈME 1. *On désigne par $u$ une fonction de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et par $m$ un entier naturel. S'il existe une forme différentielle $v$ de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ telle que*

$$\int_X hv = \int_X u\,(d'\cdot d'')\,(h)$$

*pour toute fonction $h$ de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, alors $u$ appartient à $H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.*

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 1. Si $v$ est indéfiniment dérivable, il en est de même de $u$. En particulier, si $v$ est nulle, la fonction $u$ est harmonique.*

On appelle *paramétrix de $d' \cdot d''$* toute application linéaire continue $P$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ dans $H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ vérifiant les conditions suivantes

(1) Pour toute forme différentielle $u$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$, la forme différentielle

$$u - (d'\cdot d''\cdot P)\,(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si $u$ est à support compact, il en est de même de $P(u)$.

Les propriétés suivantes sont alors des conséquences du théorème de régularité:

(3) Si $u$ est indéfiniment dérivable, il en est de même de $P(u)$.

(4) Pour toute fonction $v$ de $H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$, la fonction

$$v - (P\cdot d'\cdot d'')\,(u)$$

est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2. *L'opérateur $d' \cdot d''$ possède une paramétrix.*

COROLLAIRE. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ dans $H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$*

*respectivement induisent des bijections de* $\mathscr{H}^0(X)$ *et* $\mathscr{H}^1(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) .$$

*(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^{1,1})$ *dans* $H^2_c(X, \mathbf{C})$ *et* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *respectivement induisent des bijections de* $\mathscr{H}^0_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^1_c(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1}) .$$

Considérons les dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques

$$\Delta : L^2_c(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_c(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C} .$$

L'ensemble des fonctions harmoniques (resp. harmoniques à support compact) sur $X$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ (resp. $L^2_c(X, \mathbf{C})$).

PROPOSITION 3. *Pour qu'une forme différentielle* $u$ *de* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *(resp.* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$*) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$
$$(\text{resp. } d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) ),$$

*il faut et il suffit qu'elle soit* $\Delta$*-orthogonale au sous-espace* $\mathscr{H}^0(X)$ *(resp.* $\mathscr{H}^0_c(X)$*).*

THÉORÈME 3 (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels* $\mathscr{H}^1_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^0(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

*(2) Si l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels* $\mathscr{H}^1(X)$ *et* $\mathscr{H}^0_c(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

*Remarque 1.*

Pour toute partie compacte $K$ de $X$, l'application

$$(j_1, j_2 \cdot d'', d' \cdot d'') : H^2_K(X, \mathbf{C}) \to L^2_K(X, \mathbf{C}) \oplus L^2_K(X, \Omega^{0,1}) \oplus L^2_K(X, \Omega^{1,1})$$

où $j_1$ et $j_2$ désignent les injections canoniques de $H^2_K(X, \mathbf{C})$ dans $L^2_K(X, \mathbf{C})$ et de $H^1_K(X, \Omega^{0,1})$ dans $L^2_K(X, \Omega^{0,1})$ respectivement, est injective d'image fermée (§ 1, lemme 1).

PROPOSITION 4. *Pour toute partie compacte $K$ de $X$, l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_K(X, \mathbf{C}) \to L^2_K(X, \Omega^{1,1})$$

*a une image fermée et un noyau de dimension finie.*

*En particulier, si $X$ est compacte connexe, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme de $\mathscr{H}^1(X)$ sur $\mathbf{C}$.*