Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: Chapitre II COMPLÉMENTS D'ANALYSE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

CHAPITRE II

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

§ 1. CONVOLUTION

Désignons par X, X' et X'' des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$, par K, K' et K'' des ensembles compacts de X, X' et X'' respectivement. On suppose que X' contient l'ensemble

$$X - X'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in X \text{ et } y \in X'' \text{ tels que } t = x - y \}$$

et que K' contient l'ensemble

$$K - K'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in K \text{ et } y \in K'' \text{ tels que } t = x - y \} .$$

Pour toute fonction u de $\mathscr{C}^0(X', \mathbf{C})$, toute fonction v de $\mathscr{C}^0_c(X'', \mathbf{C})$ et tout point x de X, on pose

$$(u*v)(x) = \int_{X''} u(x-y)\, v(y)\, d\mu(y) = \int_{X'} u(y)\, v(x-y)\, d\mu(y) = (v*u)(x)$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. Il est clair que $u*v$ est une fonction continue et on a l'inégalité

$$\| u*v \|_{L^1,K} \leqslant \| u \|_{L^1,K'} \| v \|_{L^1,K''} .$$

En particulier, l'application bilinéaire

$$* : \quad \mathscr{C}^0(X', \mathbf{C}) \times \mathscr{C}^0_c(X'', \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X, \mathbf{C})$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$* : \quad L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^1_c(X'', \mathbf{C}) \to L^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$$

que l'on appelle le *produit de convolution.*

Pour toute fonction u de $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L^1_c(X'', \mathbf{C})$, le support de $u*v$ est contenu dans l'ensemble

$$X \cap \big(\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)\big) .$$

En particulier, le produit de convolution induit une application bilinéaire

$$* : \quad L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) .$$

PROPOSITION 1. *Pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de* $[1, \infty]$, *toute fonction u de $L^p_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L^q_{K''}(X'', \mathbf{C})$, on a*

$$\| u*v \|_{L^\infty, K} \leqslant \| u \|_{L^p, K'} \| v \|_{L^q, K''} .$$

On peut supposer u et v continues. Il résulte de l'inégalité de Hölder ([5], théorème (3.8)) que l'on a

$$|(u*v)(x)| \leqslant \int_{K'} | u(y) v(x-y) | \, d\mu(y) \leqslant \| u \|_{L^p, K'} \quad \| v \|_{L^q, K''}$$

pour tout point x de K, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1. *Désignons par u une fonction de $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ et par v une fonction de $L^1_c(X'', \mathbf{C})$. Si l'une des deux est continue, il en est de même de $u*v$.*

Supposons par exemple u continue et le support de v contenu dans K''. Pour toute fonction h de $\mathscr{C}^0_{K''}(X'', \mathbf{C})$, la fonction $u*h$ est continue et l'on a

$$\| u*h \|_{L^\infty, K} \leqslant \| u \|_{L^1, K'} \quad \| h \|_{L^\infty, K''} .$$

Ceci montre que $u*v$ est limite dans $L^\infty_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ d'une suite de fonctions continues, d'où l'assertion.

COROLLAIRE 2. *Pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de* $[1, \infty]$, *le produit de convolution induit une application bilinéaire*

$$* : \quad L^p_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^q_c(X'', \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X, \mathbf{C}) .$$

COROLLAIRE 3. *Désignons par u une fonction de $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$, par v une fonction de $L^1_c(X'', \mathbf{C})$ et par m un entier naturel (ou le symbole ∞). Si l'une des fonctions est m-fois continûment dérivable, il en est de même de $u*v$ et l'on a*

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v \qquad (\textit{resp.}\, D^\alpha(u*v) = u*(D^\alpha v))$$

pour tout multi-indice α de longueur au plus m.

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1. Elle est laissée en exercice au lecteur.

PROPOSITION 2. *Pour tout élément p de* $[1, \infty]$, *toute fonction u de $L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L^p_{K''}(X'', \mathbf{C})$, on a*

$$\| u*v \|_{L^p, K} \leqslant \| u \|_{L^1, K'} \quad \| v \|_{L^p, K''} .$$

On peut supposer que p et son conjugué q sont réels et que les fonctions u et v sont continues. Pour toute fonction h de $L_K^q(X, \mathbf{C})$, le théorème de Fubini montre que l'on a

$$| \int_X (u*v)\, h d\mu | \leqslant \int_{K\times K'} | u(y)\, v(x-y)\, h(x) |\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

et l'inégalité de Hölder implique la relation

$$| \int_X (u*v)\, h d\mu | \leqslant \| u \|_{L^1, K'} \quad \| v \|_{L^p, K'} \quad \| h \|_{L^q, K} .$$

En particulier, si h est la fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = \overline{(u*v)(x)}\, |(u*v)(x)|^{p-2} & \text{si } x \in K \text{ et } (u*v)(x) \neq 0 \\ h(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou } (u*v)(x) = 0, \end{cases}$$

on a

$$\| h \|_{L^q, K} = (\int_K | u*v |^p d\mu)^{1/q} = \| u*v \|_{L^p, K}^{p/q} .$$

Par conséquent,

$$\| u*v \|_{L^p, K}^{p} = \int_X (u*v)\, h d\mu \leqslant \| u \|_{L^1, K'} \| v \|_{L^p, K''} \quad \| u*v \|_{L^p, K}^{p/q}$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. *Pour tout élément* p *de* $[1, \infty]$, *le produit de convolution induit des applications bilinéaires*

$$* : L^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^p_c(X'', \mathbf{C}) \to L^p_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$$

et

$$* : L^p_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^1_c(X'', \mathbf{C}) \to L^p_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) .$$

Munissons l'espace numérique $\mathbf{R}^n$ de la norme $|\;|$ définie par

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1 \leqq j \leqq n} | x_j | .$$

On appelle *fonction marteau sur* $\mathbf{R}^n$ toute fonction ϕ de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs dans le segment $[0, 1]$, dont le support est contenu dans la boule unité et telle que

$$\| \phi \|_{L^1, \mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n} \phi\, d\mu = 1 .$$

De telles fonctions existent (appendice I, lemme 3). Pour tout nombre réel ε strictement positif, on désigne par ϕ_ε la fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) .$$

Le support de ϕ_ε est contenu dans la boule de rayon ε et l'on a encore

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^1, \mathbf{R}^n} = 1 .$$

PROPOSITION 3. *Pour toute fonction u de $\mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$), le produit de convolution $u*\phi_\varepsilon$ converge vers u dans $\mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$) lorsque ε tend vers* 0.

Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$, on pose

$$K_\varepsilon = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |y - x| \leqslant \varepsilon \} .$$

Pour tout point x de K, on a la relation

$$u(x) - (u*\phi_\varepsilon)(x) = \int_{K_\varepsilon} (u(x) - u(y))\, \phi_\varepsilon(x-y)\, d\mu(y)$$

et l'assertion résulte immédiatement de la continuité uniforme de u sur K_ε.

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle X et tout fibré vectoriel complexe π sur X, l'ensemble $\mathscr{C}_c^\infty(X, \pi)$ est dense dans les espaces $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ et $\mathscr{C}^0(X, \pi)$.*

PROPOSITION 4. *Pour tout nombre réel p au moins égal à* 1 *et toute fonction u de $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$), le produit de convolution $u*\phi_\varepsilon$ converge vers u dans $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$) lorsque ε tend vers* 0.

Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$ et toute fonction v de $\mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, on a

$$\|u - u*\phi_\varepsilon\|_{L^p, K} \leqslant \|u - v\|_{L^p, K} + \|v - v*\phi_\varepsilon\|_{L^p, K} + \|(v-u)*\phi_\varepsilon\|_{L^p, K}$$

et par conséquent (proposition 2),

$$\|u - u*\phi_\varepsilon\|_{L^p, K} \leqslant \|u - v\|_{L^p, K} + \mu(K)^{1/p}\, \|v - v*\phi_\varepsilon\|_{L^\infty, K} + \|v - u\|_{L^p, K_\varepsilon} .$$

L'assertion est alors une conséquence de la proposition 3 et de la densité de $\mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$).

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle X, tout fibré vectoriel complexe π sur X et tout nombre réel p au moins égal à* 1, *l'ensemble $\mathscr{C}_c^\infty(X, \pi)$ est dense dans les espaces $L_c^p(X, \pi)$ et $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$.*

Pour toute fonction w de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, toute fonction u de $\mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ et tout point x de $\mathbf{R}^n$, on pose

$$\underline{w}(u)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x, y)\, u(y)\, d\mu(y) .$$

Proposition 5. *(1) La fonction* $\underline{w}(u)$ *est continue.*

(2) Si la restriction au support de w *de la deuxième projection de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^n$ *est propre, la fonction* $\underline{w}(u)$ *est à support compact.*

(3) Pour tout ensemble compact K' *de* $\mathbf{R}^n$ *et tout ensemble compact* K'' *de* $\mathbf{R}^n$ *contenant le support de* u, *on a*

$$\| \underline{w}(u) \|_{L^2, K'} \leqslant \| w \|_{L^2, K' \times K''} \| u \|_{L^2, K''} .$$

Les deux premières assertions résultent immédiatement des définitions, la troisième de l'inégalité de Hölder.

Corollaire. *L'application bilinéaire*

$$N: \quad \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times \mathscr{C}^0_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

définie par

$$N(w, u) = \underline{w}(u)$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$N: \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L^2_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) .$$

Pour toute fonction w de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, l'application linéaire continue

$$N(w, \ ) : L^2_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

s'appelle l'*opérateur de noyau* w.

Proposition 6. *On désigne par* w *une fonction de* $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, *par* K' *et* K'' *des ensembles compacts de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant la relation*

$$\operatorname{supp}(w) \cap (\mathbf{R}^n \times K') \subset K'' \times K' .$$

L'opérateur de noyau w *induit alors un opérateur compact* [1]) *de* $L^2_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ $L^2_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

Désignons par $\| \underline{w} \|$ la norme de l'opérateur $\underline{w}$ dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de $L^2_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L^2_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On a l'inégalité

$$\| \underline{w} \| \leqslant \| w \|_{L^2, K' \times K''}$$

et puisque les opérateurs compacts forment un sous-espace fermé de cet espace de Banach ([2], théorème (11.2.10)), on se ramène aussitôt au cas où w est la fonction caractéristique d'un pavé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. L'image de $\underline{w}$

[1]) Ceci signifie que l'image de la boule unité est un ensemble relativement compact.

est alors un sous-espace vectoriel de dimension 1, ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. *On désigne par* u *une fonction de* $L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, *par* K' *et* K'' *des ensembles compacts de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant la relation*

$$\operatorname{supp}(u) + K' \subset K'' .$$

Le produit de convolution $u*$ *induit alors un opérateur compact de* $L^2_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *dans* $L^2_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

La norme de l'opérateur $u*$ vérifie la relation

$$\| u* \| \leqslant \| u \|_{L^1, \mathbf{R}^n} .$$

Comme dans la proposition 6, on se ramène immédiatement au cas où u appartient à $\mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On remarque alors que $u*$ n'est autre que l'opérateur de noyau

$$w(x, y) = u(x-y)$$

et l'on applique la proposition 6.

§ 2. ESPACES DE SOBOLEV

On désigne par X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et par α un multi-indice de $\mathbf{N}^n$. On dit qu'une fonction u de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ est *faiblement dérivable d'ordre* α s'il existe une fonction v de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ vérifiant la relation

$$\int_X hv \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_X u D^\alpha h \, d\mu$$

pour toute fonction h de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. Si elle existe, une telle fonction v est unique (chap. 0, § 4, lemme 2 et chap. II, § 1, proposition 4, corollaire). On l'appelle la *dérivée faible d'ordre* α *de* u.

LEMME 1. *On désigne par* X *un pavé ouvert*

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n$$

de $\mathbf{R}^n$ *et par* u *une fonction de* $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. *On suppose que l'on a*

$$\int_X u \frac{\partial h}{\partial x_1} \, d\mu = 0$$

pour toute fonction h *de* $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. *La fonction* u *est alors indépendante de* x_1. *De manière plus précise, pour presque tout point* $(x_2, \ldots, x_n)$ *de*

$X_2 \times \ldots \times X_n$, la fonction partielle $u(\ , x_2, \ldots, x_n)$ est presque partout constante.

Il résulte du théorème de Fubini que l'on a

$$\int_{X_1} u(t, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial h}{\partial x_1}(t)\, dt = 0$$

pour toute fonction h de $\mathscr{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C})$ et pour presque tout point $(x_2, \ldots, x_n)$ de $X_2 \times \ldots \times X_n$ (loc. cit.). La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ induit une forme linéaire δ sur $\mathscr{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C})$ dont le noyau est l'image de l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial}{\partial x_1} : \mathscr{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C}) .$$

L'équation ci-dessus montre que la forme linéaire $\lambda(x_2, \ldots, x_n)$ définie sur $\mathscr{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C})$ par

$$\lambda(x_2, \ldots, x_n)(g) = \int_{X_1} u(t, x_2, \ldots, x_n)\, g(t)\, dt$$

est proportionnelle à δ ce qui démontre l'assertion *(loc. cit.)*.

PROPOSITION 1. *On désigne par X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, par m un entier naturel.*

(1) Toute fonction u de $\mathscr{C}^m(X, \mathbf{C})$ est faiblement dérivable d'ordre α pour tout multi-indice α de longueur au plus m et sa dérivée faible d'ordre α coïncide avec sa dérivée partielle usuelle $D^\alpha u$.

(2) Toute fonction u de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ faiblement dérivable d'ordre α pour tout multi-indice α de longueur au plus m et dont les dérivées faibles d'ordre α sont continues pour tout multi-indice α de longueur m appartient à $\mathscr{C}^m(X, \mathbf{C})$.

La première assertion est une conséquence immédiate de la formule d'intégration par parties. Démontrons la seconde. La question étant locale, on peut supposer que X est un pavé de la forme

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n .$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où m est égal à 1. Pour tout entier j compris entre 1 et n, il existe donc une fonction v_j de $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{C})$ vérifiant la relation

$$\int_X h v_j\, d\mu = -\int_X u \frac{\partial h}{\partial x_j}\, d\mu$$

pour toute fonction h de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. Montrons par récurrence sur j que u est continue par rapport aux j premières variables et que l'on a

$$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Pour tout point x de X, on pose

$$w(x) = \int_0^{x_j} v_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dt .$$

Il est clair que w est une fonction continue sur X et l'on a

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = v_j .$$

Il résulte alors du lemme 1 que $u - w$ est indépendante de x_j, ce qui établit l'assertion.

Si elle existe, la dérivée faible d'ordre α d'une fonction u de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ se désigne par $D^\alpha u$. La proposition 1 montre que cela ne risque pas d'entraîner de confusion.

LEMME 2. *On désigne par* X, X' *et* X'' *des ensembles ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *tels que* X' *contienne* $X - X''$, *par* u *une fonction de* $L^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$, *par* v *une fonction de* $L^1_c(X'', \mathbf{C})$ *et par* α *un multi-indice de* $\mathbf{N}^n$. *Si l'une des fonctions est faiblement dérivable d'ordre* α, *il en est de même de* $u*v$ *et l'on a*

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v \qquad (\textit{resp.}\ D^\alpha(u*v) = u*(D^\alpha v)) .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de Fubini.

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soit m un entier naturel. On désigne par $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions u de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ dont les dérivées faibles $D^\alpha u$ existent et appartiennent à $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ pour tout multi-indice α de longueur au plus m. C'est un espace de Fréchet pour la topologie la moins fine rendant continues les applications D^α de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Soit X une variété différentielle et soit π un fibré vectoriel complexe sur X. On désigne par $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ l'ensemble des sections s de π vérifiant la condition suivante: pour toute carte Φ de π et toute carte ϕ de X ayant même domaine U, les fonctions coordonnées de $(s_\Phi)_\phi$ appartiennent à $H^m_{\mathrm{loc}}(\phi(U), \mathbf{C})$. C'est de manière évidente un espace vectoriel localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $H^m_K(X, \pi)$ le sous-espace fermé de $H^m_{\text{loc}}(X, \pi)$ formé des sections dont le support est contenu dans K.

On désigne par $H^m_c(X, \pi)$ l'ensemble des sections à support compact de $H^m_{\text{loc}}(X, \pi)$, muni de la topologie vectorielle limite inductive des espaces $H^m_K(X, \pi)$.

Notons que les inclusions canoniques

$$H^{m'}_{\text{loc}}(X, \pi) \subset H^m_{\text{loc}}(X, \pi) \subset H^0_{\text{loc}}(X, \pi) = L^2_{\text{loc}}(X, \pi)$$

et

$$H^{m'}_c(X, \pi) \subset H^m_c(X, \pi) \subset H^0_c(X, \pi) = L^2_c(X, \pi)$$

sont continues pour tout entier m' au moins égal à m.

Proposition 2. *On désigne par* X, X' *et* X'' *des ensembles ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *tels que* X' *contienne* $X - X''$. *Pour tout entier naturel* m, *le produit de convolution induit des applications bilinéaires continues (et même hypo-continues)*

$$* : L^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times H^m_c(X'', \mathbf{C}) \to H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$$
$$* : H^m_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^1_c(X'', \mathbf{C}) \to H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$$

$$* : L^2_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times H^m_c(X'', \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^m(X, \mathbf{C})$$
$$* : H^m_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \times L^2_c(X'', \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^m(X, \mathbf{C}).$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et des propriétés du produit de convolution.

Corollaire 1. *On désigne par* m *un entier naturel et par* ϕ *une fonction marteau sur* $\mathbf{R}^n$. *Pour toute fonction* u *de* $H^m_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *(resp.* $H^m_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$*), le produit de convolution* $u * \phi_\varepsilon$ *converge vers* u *dans* $H^m_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *(resp.* $H^m_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$*) lorsque* ε *tend vers* 0.

Corollaire 2. *Pour toute variété différentielle* X, *tout fibré vectoriel complexe* π *sur* X *et tout entier naturel* m, *l'ensemble* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ *est dense dans les espaces* $H^m_c(X, \pi)$ *et* $H^m_{\text{loc}}(X, \pi)$.

Corollaire 3. *On désigne par* u *une fonction de* $L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, *par* K' *et* K'' *des ensembles compacts de* R^n *vérifiant la relation*

$$\operatorname{supp}(u) + K' \subset K''.$$

Pour tout entier naturel m, *le produit de convolution* $u*$ *induit un opérateur compact de* $H^m_{K'}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *dans* $H^m_{K''}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

C'est une conséquence immédiate du corollaire de la proposition 6 du paragraphe 1.

LEMME 3. *Pour toute fonction* u *de* $H^n_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ *dont le support est contenu dans la boule de rayon* r, *on a*

$$\| u \|_{L^\infty, \mathbf{R}^n} \leqslant (2r)^{n/2} \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right\|_{L^2, \mathbf{R}^n}.$$

On peut supposer que u appartient à $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On a alors

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_{-r}^{x_1} \dots \int_{-r}^{x_n} \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} d\mu$$

pour tout point $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et l'assertion résulte de l'inégalité de Hölder.

THÉORÈME 1 (Sobolev). *On désigne par* X *une variété différentielle de dimension pure* n, *par* π *un fibré vectoriel complexe sur* X *et par* m *un entier au moins égal à* n. *Alors l'ensemble* $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ *est contenu dans* $\mathscr{C}^{m-n}(X, \pi)$.

La question étant locale, il suffit de montrer que $H^m_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ est contenu dans $\mathscr{C}^{m-n}_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. Or toute fonction u de $H^m_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ est limite d'une suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, et puisque la suite $(D^\alpha u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha u$ pour tout multi-indice α de longueur au plus $m - n$ (lemme 3), le théorème est une conséquence immédiate de la proposition 1.

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle* X *et tout fibré vectoriel complexe* π *sur* X, *on a*

$$\mathscr{C}^\infty(X, \pi) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} H^m_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \quad \textit{et} \quad \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} H^m_c(X, \pi).$$

LEMME 4. *Il existe des fonctions* $\phi_0, \dots, \phi_n$ *de* $L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *telles que*

$$u = \phi_0 * u + \sum_{1 \leqq j \leqq n} \phi_j * \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

pour toute fonction u *de* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

On désigne par ϕ_0 une fonction marteau sur $\mathbf{R}^n$ et l'on pose pour tout entier j compris entre 1 et n et pour tout point x de $\mathbf{R}^n$,

$$\phi_j(x) = \int_0^1 x_j \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t^{n+1}} .$$

Montrons tout d'abord que ϕ_j appartient à $L^1_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Pour tout point x de $\mathbf{R}^n \backslash 0$, on a

$$\phi_j(x) = \int_{|x|}^1 x_j \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t^{n+1}}$$

ce qui prouve déjà que ϕ_j est continue sur $\mathbf{R}^n \backslash 0$, nulle en dehors de la boule unité. D'autre part, on a

$$|\phi_j(x)| \leqslant |x_j| \left(\frac{1}{n|x|^n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n|x|^{n-1}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Pour vérifier l'égalité de l'énoncé, on peut supposer que u appartient à $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. Pour tout couple (x,y) de points de $\mathbf{R}^n$, il résulte de la formule de Taylor que l'on a

$$u(x) = u(y) + \sum_{1 \leqq j \leqq n} (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j} (ty + (1-t)x)\, dt .$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $\phi_0(x-y)$ et l'on intègre par rapport à y. Il vient

$$u(x) = (\phi_0 * u)(x)$$
$$+ \sum_{1 \leqq j \leqq n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j} (ty + (1-t)x)(x_j - y_j)\, \phi_0(x-y)\, d\mu(y)\, dt .$$

Si l'on remplace $x + t(y-x)$ par y, chacune des intégrales du membre de droite s'écrit

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_0^1 (x_j - y_j)\, \phi_0\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t^{n+1}}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)\, d\mu(y) = \left(\phi_j * \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x)$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 2 (Rellich). *Soit X une variété différentielle et soit π un fibré vectoriel complexe sur X. Pour tout ensemble compact K de X et tout entier naturel m, l'injection canonique de $H^{m+1}_K(X, \pi)$ dans $H^m_K(X, \pi)$ est un opérateur compact.*

On se ramène aisément au cas où K est un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$ et π le fibré produit $\mathbf{C}_{\mathbf{R}^n}$.

Conservons les notations du lemme 4 et désignons par K' un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$ contenant l'ensemble

$$K + \bigcup_{0 \leq j \leq n} \operatorname{supp}(\phi_j) .$$

Il résulte du corollaire 3 de la proposition 1 que les opérateurs

$$\phi_0 * : H_K^{m+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

et

$$\phi_j * \frac{\partial}{\partial x_j} : H_K^{m+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \to H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

sont compacts. Il en est donc de même de l'injection canonique de $H_K^{m+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ et l'on conclut en remarquant que $H_K^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ est fermé dans $H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.