Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: §5. Exemples

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

$$u_\sigma((\psi \cdot u)^m h_1, \ldots, (\psi \cdot u)^m h_n) = (\psi \cdot u)^{mq} u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)$$

et l'assertion résulte de la première partie de la démonstration.

Désignons par s une forme différentielle méromorphe sur X et par B l'image des points de ramification de u et des pôles de s. Pour tout ensemble ouvert simplement connexe V de $Y \backslash B$, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est formé de p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ et la restriction de u à chacun des U_k est un isomorphisme sur V. On désigne par v_k l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$w = v_1^*(s) + \ldots + v_p^*(s).$$

La forme différentielle w est holomorphe sur V et l'on obtient par recollement une forme différentielle holomorphe $u_*(s)$ sur $Y \backslash B$.

PROPOSITION 3. *La forme différentielle* $u_*(s)$ *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* Y *si* s *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* X.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 2.

§ 5. EXEMPLES

(1) Quelques remarques sur la droite projective.

On fait opérer le groupe $G(2; \mathbf{C})$ des matrices carrées inversibles d'ordre 2 dans $\mathbf{P}^1$ par la formule

$$(w_0 : w_1) = (z_0 : z_1) \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = (dz_0 + cz_1 : bz_0 + az_1).$$

Cette opération est continue. Dans $\mathbf{C}$, identifié à l'ensemble

$$U_0 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\},$$

cette formule prend l'aspect suivant

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Une transformation de ce type est un automorphisme de $\mathbf{P}^1$ appelé *homographie*. Le noyau de l'opération contenant les homothéties, on peut se restreindre au groupe $Sl(2; \mathbf{C})$ des matrices de déterminant 1. Le noyau est alors réduit au centre de $Sl(2; \mathbf{C})$, i.e. le sous-groupe d'ordre 2 formé de l'identité et de son opposé. Ainsi le groupe des homographies apparaît comme le quotient de $Sl(2; \mathbf{C})$ par son centre.

Le groupe d'isotropie du point $(0: 1)$ s'identifie au sous-groupe de $G(2; \mathbf{C})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ce sont aussi les homographies qui opèrent sur $\mathbf{C}$.

PROPOSITION 1. *(1) Les automorphismes de* $\mathbf{C}$ *sont exactement les homographies laissant fixe le point* $(0: 1)$.

(2) Les automorphismes de $\mathbf{P}^1$ *sont exactement les homographies.*

Soit u un automorphisme de $\mathbf{C}$. On peut écrire

$$u(z) = \sum_{k \in \mathrm{N}} a_k z^k$$

où les a_k sont des nombres complexes et où la série converge uniformément sur tout ensemble compact de $\mathbf{C}$. Puisque u est un homéomorphisme, il résulte du théorème de Weierstrass (§ 1, théorème 1, corollaire 7) que les a_k sont presque tous nuls. Le théorème fondamental de l'algèbre montre que le polynôme u est de degré au plus 1, ce qui démontre la première assertion.

Démontrons la seconde. Puisque le groupe des homographies contient le groupe d'isotropie de $(0: 1)$, il suffit de vérifier qu'il opère transitivement sur $\mathbf{P}^1$, ce qui est trivial.

Tout ensemble ouvert d'une courbe holomorphe est une courbe holomorphe. En particulier, les ensembles

$$\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

sont des courbes holomorphes. Remarquons que l'homographie ω définie par

$$\omega(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

induit un isomorphisme de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{D}$. Avant de décrire les automorphismes de ces deux courbes, nous allons établir un lemme qui nous sera utile par la suite.

Désignons par X un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbf{C}$ et par G le groupe des automorphismes de X. Pour tout élément g du groupe d'isotropie G_0 de l'origine, on pose

$$j(g) = \frac{\partial g}{\partial z}(0).$$

On définit ainsi un homomorphisme j de G_0 dans $\mathbf{C}^*$.

LEMME 1. *On suppose* X *borné.*

(1) Le nombre complexe $j(g)$ *est de module* 1.

(2) Si $j(g)$ *est égal à* 1, *alors* g *est l'identité.*

Les deux assertions sont évidentes si g est linéaire. Sinon, on peut écrire

$$g(z) = a_1 z + \sum_{\nu \geqq n} a_\nu z^\nu$$

pour tout point z suffisamment voisin de l'origine, où les a_ν sont des nombres complexes tels que

$$a_1 = j(g) \quad \text{et} \quad a_n \neq 0 .$$

Pour tout entier naturel k, on a de même

$$g^k(z) = b_1^{(k)} z + \sum_{\nu \geqq n} b_\nu^{(k)} z^\nu$$

et un calcul élémentaire fournit les relations

$$b_1^{(k)} = a_1^k \quad \text{et} \quad b_n^{(k)} = a_1^{k-1} a_n \sum_{0 \leqq \nu < k} (a_1^{n-1})^\nu .$$

Puisque X est borné, il résulte de la formule de Cauchy (§ 1, théorème 1, corollaire 1) qu'il existe une constante M telle que

$$| b_n^{(k)} | = | a_1^{k-1} a_n \sum_{0 \leqq \nu < k} (a_1^{n-1})^\nu | \leqslant M$$

pour tout entier naturel k. Ceci n'est possible que si $| a_1 |$ est au plus égal à 1. Le même raisonnement appliqué à l'automorphisme g^{-1} démontre la première assertion.

Supposons a_1 égal à 1. La formule ci-dessus montre que l'on a

$$b_n^{(k)} = k a_n \quad \text{et} \quad | b_n^{(k)} | = | k a_n | \leqslant M$$

ce qui est absurde, et par conséquent g est l'identité.

Revenons à nos homographies. Remarquons tout d'abord que les homographies laissant fixe $\mathbf{H}$ sont exactement celles à coefficients réels et de déterminant positif. Ceci résulte immédiatement des définitions. Notons que dans ce cas on a l'égalité

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{| cz + d |^2} .$$

En utilisant l'isomorphisme ω, on montre aisément que les homographies laissant fixe **D** sont celles de la forme

$$w = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p} \qquad \text{avec} \qquad |p|^2 - |q|^2 = 1 .$$

PROPOSITION 2. *(1) Les automorphismes de* **D** *sont exactement les homographies laissant fixe* **D**.

(2) Les automorphismes de **H** *sont exactement les homographies laissant fixe* **H**.

Il faut vérifier que le groupe des homographies laissant fixe **D** opère transitivement dans **D** ce qui est immédiat et qu'il contient le groupe d'isotropie de l'origine. Or le lemme 1 montre que ce dernier groupe est formé des rotations de centre 0, d'où l'assertion.

On appelle *fonction rationnelle sur* **C** toute fonction méromorphe s'écrivant comme le quotient de deux polynômes. Les fonctions rationnelles sur **C** forment un sous-corps de $\mathcal{K}$ (**C**) isomorphe au corps **C** (T) des fractions rationnelles à une indéterminée.

LEMME 2. *Les fonctions rationnelles sur* **C** *sont exactement les fonctions méromorphes sur* $\mathbf{P}^1$.

On vérifie aisément que toute fonction rationnelle sur **C** est une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ (il suffit d'exprimer cette fonction dans l'autre carte de $\mathbf{P}^1$). Réciproquement, soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. On désigne par u la restriction à **C** du diviseur de f et l'on pose

$$g(z) = \prod_{u(\zeta) \neq 0} (z - \zeta)^{-u(\zeta)} .$$

Ceci a bien un sens puisque le support de u est fini. Il est clair que g est une fonction rationnelle sur **C** donc méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ et que le diviseur de fg est nul en dehors du point $(0{:}\ 1)$. Cette dernière fonction est donc constante (§ 4, lemme 1), d'où l'assertion.

(2) Le faisceau des fonctions holomorphes sur **C**.

Pour tout point x de **C**, on désigne par $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes en x de fonctions holomorphes. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble $\coprod_{x \in X} \mathcal{O}_x$ et soit π la projection canonique de $\mathcal{O}$ dans **C**. Pour tout ensemble ouvert U de **C** et toute fonction holomorphe f sur U, on pose

$$N(U,f) = \{(x,u) \in \mathcal{O} \mid x \in U \quad \text{et} \quad u = f_x\}.$$

PROPOSITION 3. *Les ensembles du type* $N(U,f)$ *forment une base de topologie sur* $\mathcal{O}$. *Pour cette topologie, l'espace* $\mathcal{O}$ *est séparé et la projection* π *est un homéomorphisme local.*

Si l'ensemble $N(U,f) \cap N(V,g)$ est non vide, il existe par définition un point x de $U \cap V$ où les germes f_x et g_x coïncident. Les fonctions f et g coïncident donc sur un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$. On en déduit que l'ensemble

$$N(W,f) = N(W,g)$$

est contenu dans $N(U,f) \cap N(V,g)$, ce qui démontre la première assertion.

Munissons $\mathcal{O}$ de la topologie engendrée par les $N(U,f)$. Soient (x,f_x) et (y,g_y) deux points distincts de $\mathcal{O}$. On désigne par U et V des voisinages ouverts de x et y respectivement sur lesquels f et g sont holomorphes. L'ensemble $N(U,f)$ est un voisinage de (x,f_x) et l'ensemble $N(V,g)$ un voisinage de (y,g_y). Si x et y sont distincts, on peut supposer U et V disjoints. Il en est alors de même de $N(U,f)$ et $N(V,g)$. Si x et y sont confondus, on peut supposer U et V connexes et égaux. Les germes de f et g sont distincts au point x, donc en tout point de U (principe du prolongement analytique). Ceci montre que $\mathcal{O}$ est séparé.

La dernière assertion est triviale.

Il résulte de la proposition 3 et du théorème de Poincaré-Volterra (appendice II, théorème 1) que toute composante connexe de $\mathcal{O}$ est une surface topologique (de type dénombrable). On la munit de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local.

Chacune des composantes connexes de $\mathcal{O}$ est donc une courbe holomorphe ouverte.

Soit X la composante connexe d'un point (x,f_x) de $\mathcal{O}$. La fonction $\tilde{f}$ définie sur X par

$$\tilde{f}(y,u) = u(y)$$

est holomorphe. En effet, pour tout voisinage ouvert U de y et toute fonction holomorphe g sur U dont le germe au point y est égal à u, on a

$$\tilde{f} = g \cdot \pi .$$

On dit que $\tilde{f}$ est le *prolongement analytique de* f.

(3) Quotients de courbes holomorphes

Dans tout ce numéro, on désigne par X une courbe holomorphe connexe, par G le groupe des automorphismes de X et par Γ un sous-groupe proprement discontinu de G [1]).

LEMME 3. *(1) L'espace des orbites* X/Γ *est séparé.*

(2) Pour tout point x_0, *le groupe d'isotropie* Γ_{x0} *est fini et il existe un système fondamental de voisinages* U *de* x_0 *vérifiant les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \gamma(U) \cap U = \varnothing & si\ \gamma \notin \Gamma_{x0} \\ \gamma(U) = U & si\ \gamma \in \Gamma_{x0}\,. \end{cases}$$

Désignons par π la projection canonique de X sur X/Γ. Pour démontrer (1), il faut montrer que la diagonale de $X/\Gamma \times X/\Gamma$ est fermée ou ce qui revient au même que son image réciproque A par $\pi \times \pi$ est fermée dans $X \times X$. Par définition, on a

$$A = \{ (x, y) \in X \times X \mid \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma(x) \} .$$

Désignons par $(x_n, y_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite de A qui converge vers un point (x, y) de $X \times X$ et soient K et L des voisinages compacts de x et y respectivement. Pour n suffisamment grand, le point x_n appartient à K et le point y_n appartient à L. On désigne par γ_n un élément de Γ transformant x_n en y_n. Par hypothèse, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels γ_n coïncide avec un élément fixe γ de Γ. On en déduit que γ transforme x en y, d'où l'assertion.

Démontrons (2). Soit K un voisinage compact de x_0. On pose

$$S = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing \}$$

et l'on désigne par $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les éléments de $S \backslash \Gamma_{x0}$. Pour tout entier j compris entre 1 et n, il existe un voisinage V_j de x_0 dans K tel que $V_j \cap \gamma_j(V_j)$ soit vide. Il suffit alors de poser

$$U = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gamma \in \Gamma_{x0}}} \gamma(V_j) .$$

LEMME 4. *Pour tout point* x_0 *de* X, *le groupe d'isotropie* Γ_{x0} *est cyclique.*

Désignons par U un voisinage connexe de x_0 vérifiant les conditions du lemme 3. On peut supposer que U est le domaine d'une carte ϕ centrée

---

[1]) Ceci signifie que pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble

$$\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing \}$$

est fini.

en x_0 et que $\phi(U)$ est borné. L'expression d'un élément γ de Γ_{x_0} dans la carte ϕ est alors un automorphisme γ_ϕ de $\phi(U)$ laissant fixe l'origine et le lemme 2 montre que l'application η de Γ_{x_0} dans $\mathbf{C}^*$ définie par

$$\eta(\gamma) = j(\gamma_\phi)$$

est un homomorphisme injectif de Γ_{x_0} dans $\mathbf{U}$, ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1. *Désignons par* π *la projection canonique de* X *dans l'espace des orbites* X/Γ. *Il existe une structure holomorphe et une seule sur* X/Γ *vérifiant la condition suivante :*

(Q) Pour tout ensemble ouvert U *de* X/Γ, *l'application* π^* *induit une bijection de* $\mathcal{O}(U)$ *sur l'ensemble des fonctions holomorphes* Γ*-invariantes de* $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$.

L'unicité résulte immédiatement de la condition (Q) (§ 2, lemme 1). Désignons par Y l'espace des orbites X/Γ. Les points fixes d'un automorphisme γ distinct de l'identité sont isolés (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Il résulte alors du lemme 3 que l'ensemble A des points fixes de Γ (i.e. l'ensemble de tous les points fixes des automorphismes de Γ distincts de l'identité) est fermé discret, de même que son image B. Ce lemme montre aussi que la restriction de π à $X \backslash A$ est un revêtement de $Y \backslash B$. On munit $Y \backslash B$ de l'unique structure holomorphe qui fait de π un isomorphisme local. Il est clair que la condition (Q) est vérifiée pour tout ensemble ouvert U de $Y \backslash B$.

Il reste à prolonger la structure holomorphe de $Y \backslash B$ aux points de B. La question étant locale, on peut supposer que X est un voisinage ouvert borné de l'origine dans $\mathbf{C}$ et que tous les éléments de Γ laissent fixe l'origine. En particulier, le groupe Γ est fini cyclique d'ordre p. On définit une fonction holomorphe h sur X en posant

$$h(z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(z)$$

L'ordre de h à l'origine étant p, on peut supposer en diminuant au besoin X que h est de la forme

$$h = u^p$$

où u est un isomorphisme de X sur un voisinage de l'origine (§ 4, proposition 1). La fonction h étant Γ-invariante, elle définit par passage au quotient une application continue ϕ de Y sur l'image Z de h. Quitte à diminuer Z, on peut supposer que la restriction de h (resp. π) à $X \backslash \{0\}$ est un revêtement à p feuillets de $Z \backslash \{0\}$ (resp. $Y \backslash \{\pi(0)\}$). En particulier, l'application ϕ est un homéomorphisme de Y sur Z induisant un isomorphisme de $Y \backslash \{\pi(0)\}$

sur $Z \backslash \{0\}$. Autrement dit, cette application est une carte de Y compatible avec la structure holomorphe de $Y \backslash \{\pi(0)\}$.

Il reste à voir que la structure holomorphe ainsi définie vérifie la condition (Q). Tout d'abord, l'application π est holomorphe par définition. D'autre part, toute fonction Γ-invariante f sur X définit par passage au quotient une fonction continue sur Y qui est holomorphe sur $Y \backslash \{\pi(0)\}$. Le théorème de Weierstrass (§ 1, théorème 1, corollaire 7) montre qu'elle est holomorphe sur Y ce qui achève la démonstration du théorème.

Avant de donner des exemples concrets, nous allons établir un critère permettant de reconnaître aisément si un sous-groupe Γ du groupe des automorphismes de $\mathbf{D}$ (ou de $\mathbf{H}$) est proprement discontinu. Rappelons tout d'abord que le groupe des automorphismes de $\mathbf{D}$ (ou de $\mathbf{H}$) est naturellement muni d'une topologie (et même d'une structure de groupe de Lie), à savoir celle provenant de la topologie de $G(2; \mathbf{C})$ (numéro 1).

Lemme 5. *Pour qu'un sous-groupe Γ du groupe des automorphismes de* $\mathbf{D}$ *(ou de* $\mathbf{H}$*) soit proprement discontinu, il faut et il suffit qu'il soit discret.*

La condition est évidemment nécessaire: si une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de Γ converge vers l'identité, la suite $(\gamma_n(0))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 et Γ ne peut pas être proprement discontinu.

Montrons qu'elle est suffisante. Désignons par

$$w = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p} \quad \text{avec} \quad |p|^2 - |q|^2 = 1$$

une transformation de Γ (proposition 2). Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$1 - |w|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|qz + p|^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{q}{p}\right| < 1\,.$$

Soit r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. Si z et w sont tous deux de module au plus égal à r, on a

$$|qz + p| = |p| \left| \frac{q}{p} z + 1 \right| \geq |p|(1-r) \quad \text{et} \quad 1 - r^2 \leq \frac{1}{|p|^2(1-r)^2}\,.$$

On en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de Γ transformant un point z de module au plus égal à r en un point w de module au plus égal à r, d'où l'assertion.

Désignons par ω_1 et ω_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$ et par Γ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{C}$ engendré par les translations

$$\gamma_1(z) = z + \omega_1 \quad \text{et} \quad \gamma_2(z) = z + \omega_2 .$$

Il est clair que Γ est proprement discontinu et n'a pas de points fixes. La courbe holomorphe $\mathbf{C}/\Gamma$ se désigne par $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$. Elle est compacte et connexe et l'application canonique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$ est le revêtement universel de $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$.

On appelle *courbe elliptique* toute courbe holomorphe isomorphe à une courbe de la forme $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$. Remarquons que le groupe des automorphismes d'une courbe elliptique opère de manière transitive.

Nous allons chercher à quelles conditions deux courbes elliptiques sont isomorphes.

Tout d'abord, quitte à remplacer ω_1 par $-\omega_1$, on peut supposer que le nombre complexe défini par

$$\tau = \omega_1 \omega_2^{-1}$$

a une partie imaginaire strictement positive. Considérons ensuite l'automorphisme θ de $\mathbf{C}$ défini par

$$\theta(z) = \omega_2^{-1} z .$$

Par passage aux quotients, il définit un isomorphisme de $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$ sur $\mathbf{T}(\tau, 1)$. Pour étudier une courbe elliptique, on peut donc toujours supposer qu'elle est de la forme $\mathbf{T}(\tau, 1)$ avec τ dans $\mathbf{H}$. Un tel nombre complexe s'appelle un *module de la courbe elliptique.*

Soient X et Y deux courbes elliptiques et soit u un isomorphisme de X sur Y. On désigne par π et ρ les revêtements universels de $\mathbf{C}$ dans X et Y respectivement. Quitte à modifier u par un automorphisme de Y, on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \rho(0) .$$

Il existe alors un automorphisme v de $\mathbf{C}$ et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \rho \cdot v = u \cdot \pi .$$

Cet automorphisme est de la forme

$$v(z) = \alpha z$$

où α est un nombre complexe non nul (proposition 1). De plus, puisqu'il passe aux quotients, il existe des entiers relatifs a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} \alpha\tau = a\sigma + b \\ \alpha = c\sigma + d \end{cases} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 ,$$

en désignant par τ et σ des modules de X et Y respectivement. On en déduit que X et Y sont isomorphes si et seulement si les modules τ et σ sont dans la même orbite pour l'action de $Sl(2; \mathbf{Z})$.

Le quotient de $Sl(2; \mathbf{Z})$ par son centre est un sous-groupe discret Γ du groupe des automorphismes de $\mathbf{H}$. Il résulte alors du lemme 5 et du théorème 1 qu'il existe sur $\mathbf{H}/\Gamma$ une structure holomorphe canonique. On notera que les classes d'isomorphie de courbes elliptiques sont en correspondance biunivoque avec les points de $\mathbf{H}/\Gamma$.

Remarque 1.

La courbe $\mathbf{H}/\Gamma$ est isomorphe à $\mathbf{C}$. Ceci résulte par exemple de l'existence et des propriétés de la fonction modulaire J ([3], Kap. IV, § 3, Satz 3).

(4) Courbes algébriques

On dit qu'une partie X de l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ est *algébrique* si elle est le lieu des zéros d'une famille de polynômes. L'ensemble $\underline{a}$ des polynômes de $\mathbf{C}[T_1, ..., T_n]$ qui s'annulent sur X est un idéal que l'on appelle l'*idéal de* X. On notera que X est aussi le lieu des zéros de toute famille de générateurs de $\underline{a}$. En particulier, le théorème de la base de Hilbert ([4], chap. VI, § 2, théorème 1) montre que X est le lieu des zéros d'une famille finie de polynômes.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal.

On dit qu'une fonction définie sur X et à valeurs complexes est *régulière* si elle est la restriction d'une fonction polynomiale sur $\mathbf{C}^n$. L'ensemble des fonctions régulières sur X est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\circ(X, \mathbf{C})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathbf{C}[T_1, ..., T_n]/\underline{a}$.

On dit qu'un point x de X est *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{C}^n$ tel que $U \cap X$ soit une sous-variété (holomorphe) de U. Un point est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Il résulte de cette définition que l'ensemble des points réguliers de X est une partie ouverte de X et une sous-variété localement fermée de $\mathbf{C}^n$.

On dit que X est *irréductible* s'il satisfait l'une des conditions suivantes dont on vérifie aisément qu'elles sont équivalentes:

(1) L'idéal $\underline{a}$ est premier.

(2) Si X est réunion de deux ensembles algébriques, l'un au moins est égal à X.

Supposons X irréductible. On appelle *dimension algébrique de* X le degré de transcendance du corps des fractions de l'anneau $\mathbf{C}[T_1, ..., T_n]/\underline{a}$.

On appelle *courbe algébrique affine* tout ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique 1 dans un certain espace numérique.

LEMME 5. *Soient* $z, a_1, \ldots, a_k$ *des nombres complexes vérifiant la relation*

$$z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k = 0 .$$

On a l'inégalité

$$|z| \leqslant 2 \max_{1 \leq j \leq k} |a_j|^{1/j} .$$

Désignons par r le maximum des $|a_j|^{1/j}$. On peut supposer r non nul et l'on a

$$\left(\frac{z}{r}\right)^k + \frac{a_1}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{k-1} + \ldots + \frac{a_k}{r^k} = 0 .$$

On en déduit que

$$\left|\frac{z}{r}\right|^k \leqslant 1 + \left|\frac{z}{r}\right| + \ldots + \left|\frac{z}{r}\right|^{k-1}$$

ce qui démontre l'assertion.

LEMME 6. *Soit* U *un voisinage ouvert connexe du point* $(0:1)$ *dans* $\mathbf{P}^1$ *et soient* $u_0, \ldots, u_k$ *des fonctions méromorphes sur* U. *On suppose que* u_0 *est non nulle. Il existe alors des nombres réels* r *et* M *strictement positifs et un entier relatif* m *tels que*

$$|z_1^m z_2| \leqslant M$$

pour tout couple (z_1, z_2) *de nombres complexes vérifiant les relations*

$$|z_1| \geqslant r \quad \textit{et} \quad u_0(z_1) z_2^k + \ldots + u_k(z_1) = 0 .$$

Soit m un entier vérifiant la relation

$$m \leqslant \inf_{1 \leq j \leq k} \frac{0_{(0:1)}(u_j) - 0_{(0:1)}(u_0)}{j}$$

et soit r un nombre réel strictement positif tel que u_0 soit holomorphe inversible et les $u_1, \ldots, u_k$ holomorphes au voisinage de la couronne

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| \geqslant r \} .$$

Pour tout entier j compris entre 1 et n, on définit une fonction holomorphe au voisinage de C en posant

$$w_j(z) = u_j(z) u_0(z)^{-1} z^{mj} .$$

L'ordre au point (0: 1) de cette fonction étant positif, on pose

$$M = 2 \max_{1 \leq j \leq k} \| w_j \|_C^{1/j} .$$

Si (z_1, z_2) est un couple de nombres complexes vérifiant les conditions de l'énoncé, on a

$$(z_1^m z_2)^k + w_1(z_1)(z_1^m z_2)^{k-1} + \dots + w_k(z_1) = 0 .$$

On conclut en appliquant le lemme 5.

Lemme 7. *Soit X un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{C}^n$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^n \backslash X$. Si f est bornée au voisinage de chaque point de $\mathbf{C}^n$, elle se prolonge en une unique fonction holomorphe g sur $\mathbf{C}^n$. Si de plus il existe une constante M et un entier naturel k tels que*

$$|f(z)| \leqslant M |z|^k$$

pour tout point z de $\mathbf{C}^n \backslash X$, alors g est polynomiale.

Soit ζ un point de $\mathbf{C}^n$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'il existe un polydisque $D' \times D''$ de centre ζ dans $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$ tel que

$$(D' \times \partial D'') \cap X = \varnothing$$

(§ 3, démonstration lemme 1). Supposons f bornée sur $D' \times D''$. Pour tout point $(z_1, \dots, z_{n-1})$ de D', la fonction partielle $f(z_1, \dots, z_{n-1},)$ se prolonge en une fonction holomorphe $g(z_1, \dots, z_{n-1},)$ sur D'' (§ 1, théorème 1, corollaire 1) et l'on a

$$g(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D''} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, z)}{z - z_n} dz$$

pour tout point z_n de D''. On vérifie aisément que cette fonction g est holomorphe sur $D' \times D''$, ce qui démontre la première assertion.

Démontrons la seconde. Il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de nombres complexes telle que

$$g(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha \qquad \text{et} \qquad |a_\alpha| \leqslant M r^{k - |\alpha|}$$

pour tout nombre réel strictement positif r (§ 1, théorème 1, corollaire 1). L'assertion en découle aussitôt.

Pour la commodité du lecteur, les résultats d'algèbre nécessaires à la démonstration du théorème suivant sont groupés dans l'appendice III.

THÉORÈME 2. *Soit* X *un ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique* k. *Il existe des fonctions régulières* $u_1, \ldots, u_k$ *sur* X *et un ensemble algébrique* N *de* $\mathbf{C}^k$ *vérifiant les conditions suivantes:*

(1) L'application $u = (u_1, \ldots, u_k)$ *de* X *dans* $\mathbf{C}^k$ *est propre à fibres finies.*

(2) Tous les points de $X \setminus u^{-1}(N)$ *sont réguliers et la restriction de* u *à cet ensemble est un isomorphisme local (donc en particulier un revêtement fini de* $\mathbf{C}^k \setminus N$ *d'après (1)).*

(3) L'ensemble $X \setminus u^{-1}(N)$ *est connexe et dense dans* X.

Supposons X plongé dans l'espace numérique $\mathbf{C}^n$. On désigne par A l'anneau $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_k]$, par K son corps des fractions, par B l'anneau des fonctions régulières sur X et par L son corps des fractions. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, on peut supposer que l'on est dans la situation suivante:

(a) Les classes $u_1, \ldots, u_k$ de $T_1, \ldots, T_k$ dans B sont algébriquement indépendantes. Elles engendrent un sous-anneau sur lequel B est entier. Autrement dit, l'application canonique de A dans $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ induit une injection de A dans B et B est un A-module de type fini.

(b) La classe α de T_{k+1} dans B est un générateur de L sur K.

Désignons par p le polynôme minimal de α dans $K[T_{k+1}]$. C'est un polynôme monique irréductible, et puisque α est entier sur A et A factoriel, il appartient à $A[T_{k+1}]$. On a donc un isomorphisme

$$A[T_{k+1}]/(p) \simeq A[\alpha] \subset B .$$

Désignons par m le degré de p et par Δ son discriminant. On a les inclusions

$$\Delta B \subset A[\alpha] \subset B .$$

En particulier, il existe pour tout entier j compris entre $k+2$ et n un polynôme r_j de degré strictement inférieur à m dans $A[T_{k+1}]$ tel que le polynôme

$$q_j = \Delta T_j - r_j$$

appartienne à l'idéal $\underline{b}$ de X.

LEMME 8. *Il existe un entier naturel* ν *tel que* $\Delta^\nu \underline{b}$ *soit contenu dans l'idéal engendré par* $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$.

Désignons par q un polynôme de degré ν dans $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$. Modulo l'idéal engendré par $q_{k+2}, \ldots, q_n$, le polynôme $\Delta^\nu q$ est congru à un polynôme

r de $A\,[T_{k+1}]$ (à savoir le polynôme $\Delta^{\nu} q\,(T_1, \ldots, T_{k+1}, \Delta^{-1} r_{k+2}, \ldots, \Delta^{-1} r_n)$). La division euclidienne des polynômes montre que modulo l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$, on peut choisir r de degré strictement inférieur à m. Si q appartient à $\underline{b}$, il en est de même de r qui est donc nul (car p est le polynôme minimal de α). Ceci montre que $\Delta^{\nu} q$ appartient à l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$. On conclut en remarquant que $\underline{b}$ est de type fini.

Revenons à notre théorème. L'ensemble N des zéros de Δ est un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{C}^k$ (car p est irréductible).

Démontrons (1). On voit comme précédemment que le polynôme minimal p_j de la classe de T_j appartient à $A\,[T_j]$ pour tout entier j compris entre $k+2$ et n. Tout point $(z_1, \ldots, z_n)$ de X vérifiant les équations

$$p\,(z_1, \ldots, z_{k+1}) = p_{k+2}\,(z_1, \ldots, z_k, z_{k+2}) = \ldots = p_n\,(z_1, \ldots, z_k, z_n) = 0\,,$$

l'assertion découle du lemme 5.

Démontrons (2). On définit une application ψ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n-k}$ en posant

$$\psi\,(z_1, \ldots, z_n) =$$
$$\big(p\,(z_1, \ldots, z_{k+1}), q_{k+2}\,(z_1, \ldots, z_k, z_{k+2}), \ldots, q_n\,(z_1, \ldots, z_k, z_n)\big)\,.$$

L'ensemble Z des zéros de ψ coïncide avec X sur $(\mathbf{C}^k \backslash N) \times \mathbf{C}^{n-k}$ (lemme 8). Puisque $\dfrac{\partial p}{\partial T_{k+1}}\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1})$ est non nul en tout point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ de $X \backslash u^{-1}\,(N)$, l'application partielle $\psi\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, \,)$ est de rang $n-k$ au point $(\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)$. On conclut à l'aide du théorème des fonctions implicites (appendice I, théorème 3).

Démontrons (3). On désigne par Y l'ensemble des zéros de p dans $\mathbf{C}^{k+1}$, par v_1 la restriction à Y de la première projection de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^k$ et par v_2 la restriction à X de la première projection de $\mathbf{C}^{k+1} \times \mathbf{C}^{n-k-1}$ dans $\mathbf{C}^{k+1}$. Il est clair que l'image de v_2 est contenue dans Y et que l'on a

$$u = v_1 \cdot v_2\,.$$

De plus, il résulte aisément de ce qui précède que v_2 induit un isomorphisme de $X \backslash u^{-1}\,(N)$ sur $Y \backslash v_1^{-1}\,(N)$. Démontrons par l'absurde que ce dernier ensemble est connexe. Supposons qu'il existe deux ensembles ouverts non vides disjoints Y' et Y'' recouvrant $Y \backslash u^{-1}\,(N)$. Pour tout point z de $\mathbf{C}^k \backslash N$, on pose

$$p'\,(z, T_{k+1}) = \prod_{(z, z_{k+1}) \in Y'} (T_{k+1} - z_{k+1})$$
$$p''\,(z, T_{k+1}) = \prod_{(z, z_{k+1}) \in Y''} (T_{k+1} - z_{k+1})\,.$$

On a par définition

$$p(z, T_{k+1}) = p'(z, T_{k+1})\, p''(z, T_{k+1})$$

et il suffit de montrer que les coefficients de p' et p'' sont des fonctions polynomiales. Tout d'abord, ces coefficients sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^k \backslash N$ (§ 4, proposition 2), et puisque v_1 est propre, ils demeurent bornés au voisinage de tout point de N. On conclut à l'aide des lemmes 6 et 7.

Il reste à montrer que $X \backslash u^{-1}(N)$ est dense dans X. C'est une conséquence immédiate de l'irréductibilité de X et du lemme suivant.

LEMME 9. *L'adhérence de* $X \backslash u^{-1}(N)$ *est un ensemble algébrique.*

Pour toute fonction polynomiale f sur $\mathbf{C}^n$ et pour tout point z de $\mathbf{C}^k \backslash N$, on pose

$$\theta_f(z, T) = \prod_{(z, z_{k+1}, \ldots, z_n) \in X} (T - f(z, z_{k+1}, \ldots, z_n)).$$

On vérifie comme précédemment que les coefficients de θ_f sont des fonctions polynomiales. Nous allons montrer que l'adhérence V de $X \backslash u^{-1}(N)$ est égale à l'ensemble algébrique W défini par

$$W = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid \theta_f(z_1, \ldots, z_k, f(z_1, \ldots, z_n)) = 0$$
$$\text{pour tout } f \in \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]\}.$$

Tout d'abord, il résulte des définitions que W contient V. Réciproquement, soit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un point de W et montrons qu'il appartient à la fibre

$$E = u^{-1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \cap V.$$

Raisonnons par l'absurde. Puisque E est fini, il existe un polynôme f qui s'annule au point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ mais ne s'annule en aucun point de E. Ceci implique en particulier que 0 est une racine du polynôme $\theta_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, T)$. Il existe alors une suite $(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}^k \backslash N$ qui converge vers $(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ et une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}$ qui converge vers 0, telles que α_j soit une racine du polynôme $\theta_j(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)}, T)$ pour tout entier j (continuité des racines d'un polynôme).

On désigne par $z^{(j)}$ un point de $X \backslash u^{-1}(N)$ se projetant sur $(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)})$ tel que $f(z^{(j)})$ soit égal à α_j. La restriction de u à V étant propre, on peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que $(z^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers un point z de V. On en déduit que

$$f(z) = \lim_{j \to \infty} f(z^{(j)}) = 0$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE. *L'ensemble des points singuliers d'une courbe algébrique affine* X *est fini. L'ensemble des points réguliers est une courbe holomorphe connexe et dense dans* X.

THÉORÈME 3. *Pour toute courbe algébrique* X *de* $\mathbf{C}^n$, *il existe une courbe holomorphe* $\tilde{X}$ *et une application holomorphe non constante* π *de* $\tilde{X}$ *dans* $\mathbf{C}^n$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image de π *est contenue dans* X.

(2) Pour toute courbe holomorphe Y *et toute application holomorphe* v *de* Y *dans* $\mathbf{C}^n$ *constante sur aucune composante connexe de* Y, *il existe une application holomorphe et une seule* $\tilde{v}$ *de* Y *dans* $\tilde{X}$ *telle que*

$$\pi \cdot \tilde{v} = v .$$

Le couple $(\tilde{X}, \pi)$ *est déterminé à isomorphisme près par ces conditions. De plus, l'application* π *est propre (à fibres finies). Elle induit un isomorphisme de* $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ *sur* $X \backslash A$, *en désignant par* A *l'ensemble des points singuliers de* X.

Désignons par u une fonction régulière sur X et par N un ensemble fini de $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions du théorème 2. Pour tout point ζ de N, il existe un disque D de centre ζ et de rayon r dans $\mathbf{C}$ tel que la restriction de u à $u^{-1}(D \backslash \{\zeta\})$ soit un revêtement à m feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$. Désignons par $U_1, \ldots, U_p$ les composantes connexes de $u^{-1}(D \backslash \{\zeta\})$. La restriction de u à U_j est un revêtement à m_j feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$ et l'on a

$$m = m_1 + \ldots + m_p .$$

Désignons par D_j le disque centré à l'origine et de rayon r^{1/m_j} dans $\mathbf{C}$ et par ψ_j l'application de D_j dans D définie par

$$\psi_j(z) = z^{m_j} + \zeta .$$

La restriction de ψ_j à $D_j \backslash \{0\}$ est un revêtement à m_j feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$. Il existe donc un unique homéomorphisme h_j de $D_j \backslash \{0\}$ sur U_j rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} D_j \backslash \{0\} \arrow[rr, "h_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & U_j \arrow[dl, "u"] \\ & D \backslash \{\zeta\} & \end{tikzcd} .$$

Cette application est en fait un isomorphisme. On désigne par $\tilde{X}$ l'espace obtenu en recollant $X \backslash u^{-1}(N)$ et les D_j au moyen des homéomorphismes h_j (lorsque ζ parcourt N), par π l'application réciproque de l'injection canonique de $X \backslash u^{-1}(N)$ dans $\tilde{X}$ et par ϕ_j l'application réciproque de l'injection canonique de D_j dans $\tilde{X}$. On vérifie aisément que $\tilde{X}$ est une surface topologique et que les ϕ_j sont des cartes holomorphiquement compatibles avec toute carte de $X \backslash u^{-1}(N)$. On munit $\tilde{X}$ de la structure holomorphe correspondante.

L'application π est une application holomorphe à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, définie sur le complémentaire d'un ensemble fini de $\tilde{X}$. Puisqu'elle demeure bornée au voisinage de chaque point, elle se prolonge en une application holomorphe de $\tilde{X}$ dans $\mathbf{C}^n$.

Il est clair que l'application π est propre à fibres finies, que son image est contenue dans X et qu'elle induit un isomorphisme de $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$ (§ 4, proposition 1, corollaire). Il reste à vérifier la condition (2). L'image réciproque de A est un ensemble fini et l'on pose

$$\tilde{v} = \pi^{-1} \cdot v \,|_{X \backslash v^{-1}(A)} \,.$$

On vérifie aisément que $\tilde{v}$ se prolonge par continuité aux points de $v^{-1}(A)$ ce qui achève la démonstration du théorème.

Le couple $(\tilde{X}, \pi)$ construit dans le théorème 3 s'appelle la *normalisation* (ou la *désingularisation*) *de* X. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ce qui précède.

LEMME 10. *Soit X une courbe algébrique de $\mathbf{C}^n$ et soit v une application holomorphe d'une courbe holomorphe Y dans $\mathbf{C}^n$. On suppose que l'application v est propre (à fibre finies) et qu'elle induit un isomorphisme de $Y \backslash v^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X. Alors (Y, v) est la normalisation de X.*

Tout polynôme p de $\mathbf{C}[T_0, \ldots, T_n]$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$p = p_0 + \ldots + p_k$$

où p_j est homogène de degré j. Pour tout point x de $\mathbf{C}^{n+1}$ et tout nombre complexe λ, on a

$$p(\lambda x) = p_0 + \ldots + \lambda^k p_k(x) \,.$$

En particulier, si p s'annule sur une partie de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ saturée pour la projection canonique ψ de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, il en est de même de chacun des p_j.

Pour tout polynôme homogène p de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$, l'ensemble des zéros de p dans $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ est saturé pour ψ. Son image dans $\mathbf{P}^n$ s'appelle (abusivement) le *lieu des zéros de* p.

On dit qu'une partie X de $\mathbf{P}^n$ est *algébrique* si elle est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes. L'ensemble $\underline{a}$ des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$ est un idéal homogène (i.e. engendré par des polynômes homogènes) que l'on appelle l'*idéal de* X. On notera que X est aussi le lieu des zéros de toute famille de générateurs de $\underline{a}$. En particulier, le théorème de la base de Hilbert montre que X est le lieu des zéros d'une famille finie de polynômes homogènes.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal.

On dit qu'un point x de X est *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{P}^n$ tel que $U \cap X$ soit une sous-variété (holomorphe) de U. Un point est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Il résulte de cette définition que l'ensemble des points réguliers de X est une partie ouverte de X et une sous-variété localement fermée de $\mathbf{P}^n$.

Pour tout entier j compris entre 0 et n, la trace de X sur l'ensemble

$$U_j = \{(z_0 : ... : z_n) \in \mathbf{P}^n \mid z_j \neq 0\}$$

est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ dont l'idéal est donné par la formule

$$\underline{a}_j = \{p \in \mathbf{C}[T_0, ..., \hat{T}_j, ..., T_n] \mid \text{il existe } q \in \underline{a} \text{ tel que}$$

$$p = q(T_0, ..., 1, ..., T_n)\} .$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

On dit que X est *irréductible* s'il vérifie l'une des conditions suivantes dont on vérifie aisément qu'elles sont équivalentes:

(1) L'idéal $\underline{a}$ est premier.

(2) Si X est réunion de deux ensembles algébriques, l'un au moins est égal à X.

Supposons X irréductible. On vérifie aisément que l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{C}(T_0, ..., T_n) \mid p \text{ et } q \text{ homogènes de même degré et } q \notin \underline{a} \right\}$$

est un sous-anneau de $\mathbf{C}(T_0, ..., T_n)$ et que le quotient $A/\underline{a}A$ est un corps. On l'appelle le *corps des fonctions rationnelles sur* X et on le désigne par

$\kappa(X)$. On appelle *dimension algébrique de* X le degré de transcendance de $\kappa(X)$.

PROPOSITION 4. *Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal. Si X est irréductible et si T_j n'appartient pas à $\underline{a}$, la trace de X sur U_j est irréductible et le corps $\kappa(X)$ des fonctions rationnelles sur X s'identifie au corps des fractions de $\mathbf{C}[T_0, \ldots, \hat{T}_j, \ldots, T_n]/\underline{a}_j$.*

Désignons par p_1 et p_2 des polynômes de degré k_1 et k_2 respectivement dans $\mathbf{C}[T_0, \ldots, \hat{T}_j, \ldots, T_n]$ tels que le produit $p_1 p_2$ appartienne à $\underline{a}_j$. Ceci signifie qu'il existe un polynôme q dans $\underline{a}$ tel que

$$p_1 p_2 = q(T_0, \ldots, 1, \ldots, T_n).$$

Comme $\underline{a}$ est premier et que T_j n'appartient pas à $\underline{a}$, on peut supposer que q n'est pas divisible par T_j. On a alors

$$\begin{aligned} & T_j^{k_1+k_2} p_1\left(\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right) p_2\left(\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right) \\ & = T_j^{k_1+k_2} q\left(\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{1}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right) = q, \end{aligned}$$

d'où l'assertion. Le reste de la proposition est laissé en exercice au lecteur.

On appelle *courbe algébrique projective* tout ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique 1 dans un espace projectif.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des résultats correspondants du cas affine.

THÉORÈME 4. *L'ensemble des points singuliers d'une courbe algébrique projective X est fini. L'ensemble des points réguliers est une courbe holomorphe connexe et dense dans X.*

THÉORÈME 5. *Pour toute courbe algébrique projective X de $\mathbf{P}^n$, il existe une courbe holomorphe $\tilde{X}$ et une application holomorphe non constante π de $\tilde{X}$ dans $\mathbf{P}^n$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image de π est contenue dans X.

(2) Pour toute courbe holomorphe connexe Y et toute application holomorphe non constante v de Y dans $\mathbf{P}^n$ dont l'image est contenue dans

X, il existe une application holomorphe $\tilde{v}$ et une seule de Y dans $\tilde{X}$ telle que

$$\pi \cdot v = \tilde{v}.$$

Le couple $(\tilde{X},\pi)$ est déterminé à isomorphisme près par ces conditions. De plus, la courbe $\tilde{X}$ est compacte et connexe et l'application π induit un isomorphisme de $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X.

Le couple $(\tilde{X},\pi)$ du théorème 5 s'appelle la *normalisation* (ou la *désingularisation*) *de* X.