Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §5. Exemples
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$u_\sigma((\psi \cdot u)^m h_1, \ldots, (\psi \cdot u)^m h_n) = (\psi \cdot u)^{mq} u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)$$

et l'assertion résulte de la première partie de la démonstration.

Désignons par s une forme différentielle méromorphe sur X et par B l'image des points de ramification de u et des pôles de s. Pour tout ensemble ouvert simplement connexe V de $Y \backslash B$, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est formé de p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ et la restriction de u à chacun des U_k est un isomorphisme sur V. On désigne par v_k l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$w = v_1^*(s) + \ldots + v_p^*(s).$$

La forme différentielle w est holomorphe sur V et l'on obtient par recollement une forme différentielle holomorphe $u_*(s)$ sur $Y \backslash B$.

PROPOSITION 3. *La forme différentielle $u_*(s)$ est holomorphe (resp. méromorphe) sur Y si s est holomorphe (resp. méromorphe) sur X.*

La démonstration est laissée en exercice au lecteur. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 2.

§ 5. EXEMPLES

(1) Quelques remarques sur la droite projective.

On fait opérer le groupe $G(2; \mathbf{C})$ des matrices carrées inversibles d'ordre 2 dans $\mathbf{P}^1$ par la formule

$$(w_0 : w_1) = (z_0 : z_1)\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = (dz_0 + cz_1 : bz_0 + az_1).$$

Cette opération est continue. Dans $\mathbf{C}$, identifié à l'ensemble

$$U_0 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\},$$

cette formule prend l'aspect suivant

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Une transformation de ce type est un automorphisme de $\mathbf{P}^1$ appelé *homographie*. Le noyau de l'opération contenant les homothéties, on peut se restreindre au groupe $Sl(2; \mathbf{C})$ des matrices de déterminant 1. Le noyau est alors réduit au centre de $Sl(2; \mathbf{C})$, i.e. le sous-groupe d'ordre 2 formé de l'identité et de son opposé. Ainsi le groupe des homographies apparaît comme le quotient de $Sl(2; \mathbf{C})$ par son centre.

Le groupe d'isotropie du point (0: 1) s'identifie au sous-groupe de $G(2; \mathbf{C})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ce sont aussi les homographies qui opèrent sur $\mathbf{C}$.

PROPOSITION 1. *(1) Les automorphismes de* $\mathbf{C}$ *sont exactement les homographies laissant fixe le point* (0: 1).

(2) Les automorphismes de $\mathbf{P}^1$ *sont exactement les homographies.*

Soit u un automorphisme de $\mathbf{C}$. On peut écrire

$$u(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k z^k$$

où les a_k sont des nombres complexes et où la série converge uniformément sur tout ensemble compact de $\mathbf{C}$. Puisque u est un homéomorphisme, il résulte du théorème de Weierstrass (§ 1, théorème 1, corollaire 7) que les a_k sont presque tous nuls. Le théorème fondamental de l'algèbre montre que le polynôme u est de degré au plus 1, ce qui démontre la première assertion.

Démontrons la seconde. Puisque le groupe des homographies contient le groupe d'isotropie de (0: 1), il suffit de vérifier qu'il opère transitivement sur $\mathbf{P}^1$, ce qui est trivial.

Tout ensemble ouvert d'une courbe holomorphe est une courbe holomorphe. En particulier, les ensembles

$$\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$

sont des courbes holomorphes. Remarquons que l'homographie ω définie par

$$\omega(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

induit un isomorphisme de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{D}$. Avant de décrire les automorphismes de ces deux courbes, nous allons établir un lemme qui nous sera utile par la suite.

Désignons par X un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbf{C}$ et par G le groupe des automorphismes de X. Pour tout élément g du groupe d'isotropie G_0 de l'origine, on pose

$$j(g) = \frac{\partial g}{\partial z}(0).$$

On définit ainsi un homomorphisme j de G_0 dans $\mathbf{C}^*$.

LEMME 1. *On suppose X borné.*

(1) Le nombre complexe $j(g)$ est de module 1.

(2) Si $j(g)$ est égal à 1, *alors g est l'identité.*

Les deux assertions sont évidentes si g est linéaire. Sinon, on peut écrire

$$g(z) = a_1 z + \sum_{\nu \geq n} a_\nu z^\nu$$

pour tout point z suffisamment voisin de l'origine, où les a_ν sont des nombres complexes tels que

$$a_1 = j(g) \quad \text{et} \quad a_n \neq 0 .$$

Pour tout entier naturel k, on a de même

$$g^k(z) = b_1^{(k)} z + \sum_{\nu \geq n} b_\nu^{(k)} z^\nu$$

et un calcul élémentaire fournit les relations

$$b_1^{(k)} = a_1^k \quad \text{et} \quad b_n^{(k)} = a_1^{k-1} a_n \sum_{0 \leq \nu < k} (a_1^{n-1})^\nu .$$

Puisque X est borné, il résulte de la formule de Cauchy (§ 1, théorème 1, corollaire 1) qu'il existe une constante M telle que

$$| b_n^{(k)} | = | a_1^{k-1} a_n \sum_{0 \leq \nu < k} (a_1^{n-1})^\nu | \leqslant M$$

pour tout entier naturel k. Ceci n'est possible que si $| a_1 |$ est au plus égal à 1. Le même raisonnement appliqué à l'automorphisme g^{-1} démontre la première assertion.

Supposons a_1 égal à 1. La formule ci-dessus montre que l'on a

$$b_n^{(k)} = k a_n \quad \text{et} \quad | b_n^{(k)} | = | k a_n | \leqslant M$$

ce qui est absurde, et par conséquent g est l'identité.

Revenons à nos homographies. Remarquons tout d'abord que les homographies laissant fixe $\mathbf{H}$ sont exactement celles à coefficients réels et de déterminant positif. Ceci résulte immédiatement des définitions. Notons que dans ce cas on a l'égalité

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{| cz + d |^2} .$$

En utilisant l'isomorphisme ω, on montre aisément que les homographies laissant fixe **D** sont celles de la forme

$$w = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p} \quad \text{avec} \quad |p|^2 - |q|^2 = 1 .$$

PROPOSITION 2. *(1) Les automorphismes de* **D** *sont exactement les homographies laissant fixe* **D**.

(2) Les automorphismes de **H** *sont exactement les homographies laissant fixe* **H**.

Il faut vérifier que le groupe des homographies laissant fixe **D** opère transitivement dans **D** ce qui est immédiat et qu'il contient le groupe d'isotropie de l'origine. Or le lemme 1 montre que ce dernier groupe est formé des rotations de centre 0, d'où l'assertion.

On appelle *fonction rationnelle sur* **C** toute fonction méromorphe s'écrivant comme le quotient de deux polynômes. Les fonctions rationnelles sur **C** forment un sous-corps de $\mathscr{K}$ (**C**) isomorphe au corps **C** (T) des fractions rationnelles à une indéterminée.

LEMME 2. *Les fonctions rationnelles sur* **C** *sont exactement les fonctions méromorphes sur* $\mathbf{P}^1$.

On vérifie aisément que toute fonction rationnelle sur **C** est une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ (il suffit d'exprimer cette fonction dans l'autre carte de $\mathbf{P}^1$). Réciproquement, soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. On désigne par u la restriction à **C** du diviseur de f et l'on pose

$$g(z) = \prod_{u(\zeta) \neq 0} (z - \zeta)^{-u(\zeta)} .$$

Ceci a bien un sens puisque le support de u est fini. Il est clair que g est une fonction rationnelle sur **C** donc méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ et que le diviseur de fg est nul en dehors du point $(0:1)$. Cette dernière fonction est donc constante (§ 4, lemme 1), d'où l'assertion.

(2) Le faisceau des fonctions holomorphes sur **C**.

Pour tout point x de **C**, on désigne par $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes en x de fonctions holomorphes. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble $\coprod_{x \in X} \mathcal{O}_x$ et soit π la projection

canonique de $\mathcal{O}$ dans **C**. Pour tout ensemble ouvert U de **C** et toute fonction holomorphe f sur U, on pose

$$N(U,f) = \{(x,u) \in \mathcal{O} \mid x \in U \quad \text{et} \quad u = f_x\}.$$

PROPOSITION 3. *Les ensembles du type* $N(U,f)$ *forment une base de topologie sur* $\mathcal{O}$. *Pour cette topologie, l'espace* $\mathcal{O}$ *est séparé et la projection* π *est un homéomorphisme local.*

Si l'ensemble $N(U,f) \cap N(V,g)$ est non vide, il existe par définition un point x de $U \cap V$ où les germes f_x et g_x coïncident. Les fonctions f et g coïncident donc sur un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$. On en déduit que l'ensemble

$$N(W,f) = N(W,g)$$

est contenu dans $N(U,f) \cap N(V,g)$, ce qui démontre la première assertion.

Munissons $\mathcal{O}$ de la topologie engendrée par les $N(U,f)$. Soient (x,f_x) et (y,g_y) deux points distincts de $\mathcal{O}$. On désigne par U et V des voisinages ouverts de x et y respectivement sur lesquels f et g sont holomorphes. L'ensemble $N(U,f)$ est un voisinage de (x,f_x) et l'ensemble $N(V,g)$ un voisinage de (y,g_y). Si x et y sont distincts, on peut supposer U et V disjoints. Il en est alors de même de $N(U,f)$ et $N(V,g)$. Si x et y sont confondus, on peut supposer U et V connexes et égaux. Les germes de f et g sont distincts au point x, donc en tout point de U (principe du prolongement analytique). Ceci montre que $\mathcal{O}$ est séparé.

La dernière assertion est triviale.

Il résulte de la proposition 3 et du théorème de Poincaré-Volterra (appendice II, théorème 1) que toute composante connexe de $\mathcal{O}$ est une surface topologique (de type dénombrable). On la munit de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local.

Chacune des composantes connexes de $\mathcal{O}$ est donc une courbe holomorphe ouverte.

Soit X la composante connexe d'un point (x,f_x) de $\mathcal{O}$. La fonction $\tilde{f}$ définie sur X par

$$\tilde{f}(y,u) = u(y)$$

est holomorphe. En effet, pour tout voisinage ouvert U de y et toute fonction holomorphe g sur U dont le germe au point y est égal à u, on a

$$\tilde{f} = g \cdot \pi .$$

On dit que $\tilde{f}$ est le *prolongement analytique de* f.

(3) Quotients de courbes holomorphes

Dans tout ce numéro, on désigne par X une courbe holomorphe connexe, par G le groupe des automorphismes de X et par Γ un sous-groupe proprement discontinu de G [1]).

LEMME 3. *(1) L'espace des orbites X/Γ est séparé.*

(2) Pour tout point x_0, le groupe d'isotropie Γ_{x_0} est fini et il existe un système fondamental de voisinages U de x_0 vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \gamma(U) \cap U = \varnothing & \text{si } \gamma \notin \Gamma_{x_0} \\ \gamma(U) = U & \text{si } \gamma \in \Gamma_{x_0}. \end{cases}$$

Désignons par π la projection canonique de X sur X/Γ. Pour démontrer (1), il faut montrer que la diagonale de $X/\Gamma \times X/\Gamma$ est fermée ou ce qui revient au même que son image réciproque A par $\pi \times \pi$ est fermée dans $X \times X$. Par définition, on a

$$A = \{ (x, y) \in X \times X \mid \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma(x) \}.$$

Désignons par $(x_n, y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de A qui converge vers un point (x, y) de $X \times X$ et soient K et L des voisinages compacts de x et y respectivement. Pour n suffisamment grand, le point x_n appartient à K et le point y_n appartient à L. On désigne par γ_n un élément de Γ transformant x_n en y_n. Par hypothèse, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels γ_n coïncide avec un élément fixe γ de Γ. On en déduit que γ transforme x en y, d'où l'assertion.

Démontrons (2). Soit K un voisinage compact de x_0. On pose

$$S = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing \}$$

et l'on désigne par $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les éléments de $S \backslash \Gamma_{x_0}$. Pour tout entier j compris entre 1 et n, il existe un voisinage V_j de x_0 dans K tel que $V_j \cap \gamma_j(V_j)$ soit vide. Il suffit alors de poser

$$U = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gamma \in \Gamma_{x_0}}} \gamma(V_j).$$

LEMME 4. *Pour tout point x_0 de X, le groupe d'isotropie Γ_{x_0} est cyclique.*

Désignons par U un voisinage connexe de x_0 vérifiant les conditions du lemme 3. On peut supposer que U est le domaine d'une carte ϕ centrée

---

[1]) Ceci signifie que pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble

$$\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing \}$$

est fini.

en x_0 et que $\phi(U)$ est borné. L'expression d'un élément γ de Γ_{x_0} dans la carte ϕ est alors un automorphisme γ_ϕ de $\phi(U)$ laissant fixe l'origine et le lemme 2 montre que l'application η de Γ_{x_0} dans $\mathbf{C}^*$ définie par

$$\eta(\gamma) = j(\gamma_\phi)$$

est un homomorphisme injectif de Γ_{x_0} dans $\mathbf{U}$, ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1. *Désignons par π la projection canonique de X dans l'espace des orbites X/Γ. Il existe une structure holomorphe et une seule sur X/Γ vérifiant la condition suivante :*

(Q) Pour tout ensemble ouvert U de X/Γ, l'application π^* induit une bijection de $\mathcal{O}(U)$ sur l'ensemble des fonctions holomorphes Γ-invariantes de $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$.

L'unicité résulte immédiatement de la condition (Q) (§ 2, lemme 1). Désignons par Y l'espace des orbites X/Γ. Les points fixes d'un automorphisme γ distinct de l'identité sont isolés (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Il résulte alors du lemme 3 que l'ensemble A des points fixes de Γ (i.e. l'ensemble de tous les points fixes des automorphismes de Γ distincts de l'identité) est fermé discret, de même que son image B. Ce lemme montre aussi que la restriction de π à $X\backslash A$ est un revêtement de $Y\backslash B$. On munit $Y\backslash B$ de l'unique structure holomorphe qui fait de π un isomorphisme local. Il est clair que la condition (Q) est vérifiée pour tout ensemble ouvert U de $Y\backslash B$.

Il reste à prolonger la structure holomorphe de $Y\backslash B$ aux points de B. La question étant locale, on peut supposer que X est un voisinage ouvert borné de l'origine dans $\mathbf{C}$ et que tous les éléments de Γ laissent fixe l'origine. En particulier, le groupe Γ est fini cyclique d'ordre p. On définit une fonction holomorphe h sur X en posant

$$h(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \gamma(z)$$

L'ordre de h à l'origine étant p, on peut supposer en diminuant au besoin X que h est de la forme

$$h = u^p$$

où u est un isomorphisme de X sur un voisinage de l'origine (§ 4, proposition 1). La fonction h étant Γ-invariante, elle définit par passage au quotient une application continue ϕ de Y sur l'image Z de h. Quitte à diminuer Z, on peut supposer que la restriction de h (resp. π) à $X\backslash\{0\}$ est un revêtement à p feuillets de $Z\backslash\{0\}$ (resp. $Y\backslash\{\pi(0)\}$). En particulier, l'application ϕ est un homéomorphisme de Y sur Z induisant un isomorphisme de $Y\backslash\{\pi(0)\}$

sur $Z\backslash\{0\}$. Autrement dit, cette application est une carte de Y compatible avec la structure holomorphe de $Y\backslash\{\pi(0)\}$.

Il reste à voir que la structure holomorphe ainsi définie vérifie la condition (Q). Tout d'abord, l'application π est holomorphe par définition. D'autre part, toute fonction Γ-invariante f sur X définit par passage au quotient une fonction continue sur Y qui est holomorphe sur $Y\backslash\{\pi(0)\}$. Le théorème de Weierstrass (§ 1, théorème 1, corollaire 7) montre qu'elle est holomorphe sur Y ce qui achève la démonstration du théorème.

Avant de donner des exemples concrets, nous allons établir un critère permettant de reconnaître aisément si un sous-groupe Γ du groupe des automorphismes de **D** (ou de **H**) est proprement discontinu. Rappelons tout d'abord que le groupe des automorphismes de **D** (ou de **H**) est naturellement muni d'une topologie (et même d'une structure de groupe de Lie), à savoir celle provenant de la topologie de $G(2; \mathbf{C})$ (numéro 1).

LEMME 5. *Pour qu'un sous-groupe Γ du groupe des automorphismes de* **D** *(ou de* **H**) *soit proprement discontinu, il faut et il suffit qu'il soit discret.*

La condition est évidemment nécessaire: si une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de Γ converge vers l'identité, la suite $(\gamma_n(0))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 et Γ ne peut pas être proprement discontinu.

Montrons qu'elle est suffisante. Désignons par

$$w = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p} \quad \text{avec} \quad |p|^2 - |q|^2 = 1$$

une transformation de Γ (proposition 2). Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$1 - |w|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|qz + p|^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{q}{p}\right| < 1 .$$

Soit r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. Si z et w sont tous deux de module au plus égal à r, on a

$$|qz + p| = |p| \left|\frac{q}{p} z + 1\right| \geqq |p|(1-r) \quad \text{et} \quad 1 - r^2 \leqq \frac{1}{|p|^2(1-r)^2} .$$

On en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de Γ transformant un point z de module au plus égal à r en un point w de module au plus égal à r, d'où l'assertion.

Désignons par ω_1 et ω_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur **R** et par Γ le groupe d'automorphismes de **C** engendré par les translations

$$\gamma_1(z) = z + \omega_1 \quad \text{et} \quad \gamma_2(z) = z + \omega_2 .$$

Il est clair que Γ est proprement discontinu et n'a pas de points fixes. La courbe holomorphe $\mathbf{C}/\Gamma$ se désigne par $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$. Elle est compacte et connexe et l'application canonique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$ est le revêtement universel de $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$.

On appelle *courbe elliptique* toute courbe holomorphe isomorphe à une courbe de la forme $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$. Remarquons que le groupe des automorphismes d'une courbe elliptique opère de manière transitive.

Nous allons chercher à quelles conditions deux courbes elliptiques sont isomorphes.

Tout d'abord, quitte à remplacer ω_1 par $-\omega_1$, on peut supposer que le nombre complexe défini par

$$\tau = \omega_1 \omega_2^{-1}$$

a une partie imaginaire strictement positive. Considérons ensuite l'automorphisme θ de $\mathbf{C}$ défini par

$$\theta(z) = \omega_2^{-1} z .$$

Par passage aux quotients, il définit un isomorphisme de $\mathbf{T}(\omega_1, \omega_2)$ sur $\mathbf{T}(\tau, 1)$. Pour étudier une courbe elliptique, on peut donc toujours supposer qu'elle est de la forme $\mathbf{T}(\tau, 1)$ avec τ dans $\mathbf{H}$. Un tel nombre complexe s'appelle un *module de la courbe elliptique.*

Soient X et Y deux courbes elliptiques et soit u un isomorphisme de X sur Y. On désigne par π et ρ les revêtements universels de $\mathbf{C}$ dans X et Y respectivement. Quitte à modifier u par un automorphisme de Y, on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \rho(0) .$$

Il existe alors un automorphisme v de $\mathbf{C}$ et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \rho \cdot v = u \cdot \pi .$$

Cet automorphisme est de la forme

$$v(z) = \alpha z$$

où α est un nombre complexe non nul (proposition 1). De plus, puisqu'il passe aux quotients, il existe des entiers relatifs a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} \alpha\tau = a\sigma + b \\ \alpha = c\sigma + d \end{cases} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 ,$$

en désignant par τ et σ des modules de X et Y respectivement. On en déduit que X et Y sont isomorphes si et seulement si les modules τ et σ sont dans la même orbite pour l'action de $Sl(2; \mathbf{Z})$.

Le quotient de $Sl(2; \mathbf{Z})$ par son centre est un sous-groupe discret Γ du groupe des automorphismes de $\mathbf{H}$. Il résulte alors du lemme 5 et du théorème 1 qu'il existe sur $\mathbf{H}/\Gamma$ une structure holomorphe canonique. On notera que les classes d'isomorphie de courbes elliptiques sont en correspondance biunivoque avec les points de $\mathbf{H}/\Gamma$.

Remarque 1.

La courbe $\mathbf{H}/\Gamma$ est isomorphe à $\mathbf{C}$. Ceci résulte par exemple de l'existence et des propriétés de la fonction modulaire J ([3], Kap. IV, § 3, Satz 3).

(4) Courbes algébriques

On dit qu'une partie X de l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ est *algébrique* si elle est le lieu des zéros d'une famille de polynômes. L'ensemble $\underline{a}$ des polynômes de $\mathbf{C}[T_1, ..., T_n]$ qui s'annulent sur X est un idéal que l'on appelle l'*idéal de* X. On notera que X est aussi le lieu des zéros de toute famille de générateurs de $\underline{a}$. En particulier, le théorème de la base de Hilbert ([4], chap. VI, § 2, théorème 1) montre que X est le lieu des zéros d'une famille finie de polynômes.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal.

On dit qu'une fonction définie sur X et à valeurs complexes est *régulière* si elle est la restriction d'une fonction polynomiale sur $\mathbf{C}^n$. L'ensemble des fonctions régulières sur X est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\circ(X, \mathbf{C})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathbf{C}[T_1, ..., T_n]/\underline{a}$.

On dit qu'un point x de X est *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{C}^n$ tel que $U \cap X$ soit une sous-variété (holomorphe) de U. Un point est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Il résulte de cette définition que l'ensemble des points réguliers de X est une partie ouverte de X et une sous-variété localement fermée de $\mathbf{C}^n$.

On dit que X est *irréductible* s'il satisfait l'une des conditions suivantes dont on vérifie aisément qu'elles sont équivalentes:

(1) L'idéal $\underline{a}$ est premier.

(2) Si X est réunion de deux ensembles algébriques, l'un au moins est égal à X.

Supposons X irréductible. On appelle *dimension algébrique de* X le degré de transcendance du corps des fractions de l'anneau $\mathbf{C}[T_1, ..., T_n]/\underline{a}$.

On appelle *courbe algébrique affine* tout ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique 1 dans un certain espace numérique.

LEMME 5. *Soient* z, $a_1, \ldots, a_k$ *des nombres complexes vérifiant la relation*

$$z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k = 0 .$$

On a l'inégalité

$$|z| \leqslant 2 \max_{1 \leqq j \leqq k} |a_j|^{1/j} .$$

Désignons par r le maximum des $|a_j|^{1/j}$. On peut supposer r non nul et l'on a

$$\left(\frac{z}{r}\right)^k + \frac{a_1}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{k-1} + \ldots + \frac{a_k}{r^k} = 0 .$$

On en déduit que

$$\left|\frac{z}{r}\right|^k \leqslant 1 + \left|\frac{z}{r}\right| + \ldots + \left|\frac{z}{r}\right|^{k-1}$$

ce qui démontre l'assertion.

LEMME 6. *Soit* U *un voisinage ouvert connexe du point* $(0:1)$ *dans* $\mathbf{P}^1$ *et soient* $u_0, \ldots, u_k$ *des fonctions méromorphes sur* U. *On suppose que* u_0 *est non nulle. Il existe alors des nombres réels* r *et* M *strictement positifs et un entier relatif* m *tels que*

$$|z_1^m z_2| \leqslant M$$

pour tout couple (z_1, z_2) *de nombres complexes vérifiant les relations*

$$|z_1| \geqslant r \quad \text{et} \quad u_0(z_1) z_2^k + \ldots + u_k(z_1) = 0 .$$

Soit m un entier vérifiant la relation

$$m \leqslant \inf_{1 \leqq j \leqq k} \frac{0_{(0:1)}(u_j) - 0_{(0:1)}(u_0)}{j}$$

et soit r un nombre réel strictement positif tel que u_0 soit holomorphe inversible et les $u_1, \ldots, u_k$ holomorphes au voisinage de la couronne

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| \geqslant r \} .$$

Pour tout entier j compris entre 1 et n, on définit une fonction holomorphe au voisinage de C en posant

$$w_j(z) = u_j(z) u_0(z)^{-1} z^{mj} .$$

L'ordre au point (0: 1) de cette fonction étant positif, on pose

$$M = 2 \max_{1 \leq j \leq k} \| w_j \|_C^{1/j} .$$

Si (z_1, z_2) est un couple de nombres complexes vérifiant les conditions de l'énoncé, on a

$$(z_1^m z_2)^k + w_1(z_1)(z_1^m z_2)^{k-1} + \ldots + w_k(z_1) = 0 .$$

On conclut en appliquant le lemme 5.

LEMME 7. *Soit X un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{C}^n$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^n \backslash X$. Si f est bornée au voisinage de chaque point de $\mathbf{C}^n$, elle se prolonge en une unique fonction holomorphe g sur $\mathbf{C}^n$. Si de plus il existe une constante M et un entier naturel k tels que*

$$|f(z)| \leqslant M |z|^k$$

pour tout point z de $\mathbf{C}^n \backslash X$, alors g est polynomiale.

Soit ζ un point de $\mathbf{C}^n$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'il existe un polydisque $D' \times D''$ de centre ζ dans $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$ tel que

$$(D' \times \partial D'') \cap X = \varnothing$$

(§ 3, démonstration lemme 1). Supposons f bornée sur $D' \times D''$. Pour tout point $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ de D', la fonction partielle $f(z_1, \ldots, z_{n-1},)$ se prolonge en une fonction holomorphe $g(z_1, \ldots, z_{n-1},)$ sur D'' (§ 1, théorème 1, corollaire 1) et l'on a

$$g(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D''} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, z)}{z - z_n} dz$$

pour tout point z_n de D''. On vérifie aisément que cette fonction g est holomorphe sur $D' \times D''$, ce qui démontre la première assertion.

Démontrons la seconde. Il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de nombres complexes telle que

$$g(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha \quad \text{et} \quad |a_\alpha| \leqslant M r^{k-|\alpha|}$$

pour tout nombre réel strictement positif r (§ 1, théorème 1, corollaire 1). L'assertion en découle aussitôt.

Pour la commodité du lecteur, les résultats d'algèbre nécessaires à la démonstration du théorème suivant sont groupés dans l'appendice III.

THÉORÈME 2. *Soit X un ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique k. Il existe des fonctions régulières $u_1, \ldots, u_k$ sur X et un ensemble algébrique N de $\mathbf{C}^k$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'application $u = (u_1, \ldots, u_k)$ de X dans $\mathbf{C}^k$ est propre à fibres finies.

(2) Tous les points de $X \setminus u^{-1}(N)$ sont réguliers et la restriction de u à cet ensemble est un isomorphisme local (donc en particulier un revêtement fini de $\mathbf{C}^k \setminus N$ d'après (1)).

(3) L'ensemble $X \setminus u^{-1}(N)$ est connexe et dense dans X.

Supposons X plongé dans l'espace numérique $\mathbf{C}^n$. On désigne par A l'anneau $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_k]$, par K son corps des fractions, par B l'anneau des fonctions régulières sur X et par L son corps des fractions. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, on peut supposer que l'on est dans la situation suivante:

(a) Les classes $u_1, \ldots, u_k$ de $T_1, \ldots, T_k$ dans B sont algébriquement indépendantes. Elles engendrent un sous-anneau sur lequel B est entier. Autrement dit, l'application canonique de A dans $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ induit une injection de A dans B et B est un A-module de type fini.

(b) La classe α de T_{k+1} dans B est un générateur de L sur K.

Désignons par p le polynôme minimal de α dans $K[T_{k+1}]$. C'est un polynôme monique irréductible, et puisque α est entier sur A et A factoriel, il appartient à $A[T_{k+1}]$. On a donc un isomorphisme

$$A[T_{k+1}]/(p) \simeq A[\alpha] \subset B .$$

Désignons par m le degré de p et par Δ son discriminant. On a les inclusions

$$\Delta B \subset A[\alpha] \subset B .$$

En particulier, il existe pour tout entier j compris entre $k+2$ et n un polynôme r_j de degré strictement inférieur à m dans $A[T_{k+1}]$ tel que le polynôme

$$q_j = \Delta T_j - r_j$$

appartienne à l'idéal $\underline{b}$ de X.

LEMME 8. *Il existe un entier naturel ν tel que $\Delta^\nu \underline{b}$ soit contenu dans l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$.*

Désignons par q un polynôme de degré ν dans $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$. Modulo l'idéal engendré par $q_{k+2}, \ldots, q_n$, le polynôme $\Delta^\nu q$ est congru à un polynôme

r de $A\,[T_{k+1}]$ (à savoir le polynôme $\Delta^v q\,(T_1, \ldots, T_{k+1}, \Delta^{-1} r_{k+2}, \ldots, \Delta^{-1} r_n)$). La division euclidienne des polynômes montre que modulo l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$, on peut choisir r de degré strictement inférieur à m. Si q appartient à $\underline{b}$, il en est de même de r qui est donc nul (car p est le polynôme minimal de α). Ceci montre que $\Delta^v q$ appartient à l'idéal engendré par $p, q_{k+2}, \ldots, q_n$. On conclut en remarquant que $\underline{b}$ est de type fini.

Revenons à notre théorème. L'ensemble N des zéros de Δ est un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{C}^k$ (car p est irréductible).

Démontrons (1). On voit comme précédemment que le polynôme minimal p_j de la classe de T_j appartient à $A\,[T_j]$ pour tout entier j compris entre $k+2$ et n. Tout point $(z_1, \ldots, z_n)$ de X vérifiant les équations

$$p\,(z_1, \ldots, z_{k+1}) = p_{k+2}\,(z_1, \ldots, z_k, z_{k+2}) = \ldots = p_n\,(z_1, \ldots, z_k, z_n) = 0\,,$$

l'assertion découle du lemme 5.

Démontrons (2). On définit une application ψ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n-k}$ en posant

$$\psi\,(z_1, \ldots, z_n) =$$
$$\big(p\,(z_1, \ldots, z_{k+1}), q_{k+2}\,(z_1, \ldots, z_k, z_{k+2}), \ldots, q_n\,(z_1, \ldots, z_k, z_n)\big)\,.$$

L'ensemble Z des zéros de ψ coïncide avec X sur $(\mathbf{C}^k \backslash N) \times \mathbf{C}^{n-k}$ (lemme 8). Puisque $\dfrac{\partial p}{\partial T_{k+1}}\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k+1})$ est non nul en tout point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ de $X \backslash u^{-1}\,(N)$, l'application partielle $\psi\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_k,)$ est de rang $n-k$ au point $(\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)$. On conclut à l'aide du théorème des fonctions implicites (appendice I, théorème 3).

Démontrons (3). On désigne par Y l'ensemble des zéros de p dans $\mathbf{C}^{k+1}$, par v_1 la restriction à Y de la première projection de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^k$ et par v_2 la restriction à X de la première projection de $\mathbf{C}^{k+1} \times \mathbf{C}^{n-k-1}$ dans $\mathbf{C}^{k+1}$. Il est clair que l'image de v_2 est contenue dans Y et que l'on a

$$u = v_1 \cdot v_2\,.$$

De plus, il résulte aisément de ce qui précède que v_2 induit un isomorphisme de $X \backslash u^{-1}\,(N)$ sur $Y \backslash v_1^{-1}\,(N)$. Démontrons par l'absurde que ce dernier ensemble est connexe. Supposons qu'il existe deux ensembles ouverts non vides disjoints Y' et Y'' recouvrant $Y \backslash u^{-1}\,(N)$. Pour tout point z de $\mathbf{C}^k \backslash N$, on pose

$$p'\,(z, T_{k+1}) = \prod_{(z, z_{k+1}) \in Y'} (T_{k+1} - z_{k+1})$$
$$p''\,(z, T_{k+1}) = \prod_{(z, z_{k+1}) \in Y''} (T_{k+1} - z_{k+1})\,.$$

On a par définition

$$p(z, T_{k+1}) = p'(z, T_{k+1})\, p''(z, T_{k+1})$$

et il suffit de montrer que les coefficients de p' et p'' sont des fonctions polynomiales. Tout d'abord, ces coefficients sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^k \backslash N$ (§ 4, proposition 2), et puisque v_1 est propre, ils demeurent bornés au voisinage de tout point de N. On conclut à l'aide des lemmes 6 et 7.

Il reste à montrer que $X \backslash u^{-1}(N)$ est dense dans X. C'est une conséquence immédiate de l'irréductibilité de X et du lemme suivant.

LEMME 9. *L'adhérence de* $X \backslash u^{-1}(N)$ *est un ensemble algébrique.*

Pour toute fonction polynomiale f sur $\mathbf{C}^n$ et pour tout point z de $\mathbf{C}^k \backslash N$, on pose

$$\theta_f(z, T) = \prod_{(z, z_{k+1}, \ldots, z_n) \in X} (T - f(z, z_{k+1}, \ldots, z_n)).$$

On vérifie comme précédemment que les coefficients de θ_f sont des fonctions polynomiales. Nous allons montrer que l'adhérence V de $X \backslash u^{-1}(N)$ est égale à l'ensemble algébrique W défini par

$$W = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid \theta_f(z_1, \ldots, z_k, f(z_1, \ldots, z_n)) = 0 \\ \text{pour tout } f \in \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]\}.$$

Tout d'abord, il résulte des définitions que W contient V. Réciproquement, soit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un point de W et montrons qu'il appartient à la fibre

$$E = u^{-1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \cap V.$$

Raisonnons par l'absurde. Puisque E est fini, il existe un polynôme f qui s'annule au point $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ mais ne s'annule en aucun point de E. Ceci implique en particulier que 0 est une racine du polynôme $\theta_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, T)$. Il existe alors une suite $(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}^k \backslash N$ qui converge vers $(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ et une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}$ qui converge vers 0, telles que α_j soit une racine du polynôme $\theta_j(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)}, T)$ pour tout entier j (continuité des racines d'un polynôme).

On désigne par $z^{(j)}$ un point de $X \backslash u^{-1}(N)$ se projetant sur $(z_1^{(j)}, \ldots, z_k^{(j)})$ tel que $f(z^{(j)})$ soit égal à α_j. La restriction de u à V étant propre, on peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que $(z^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers un point z de V. On en déduit que

$$f(z) = \lim_{j \to \infty} f(z^{(j)}) = 0$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE. *L'ensemble des points singuliers d'une courbe algébrique affine X est fini. L'ensemble des points réguliers est une courbe holomorphe connexe et dense dans X.*

THÉORÈME 3. *Pour toute courbe algébrique X de $\mathbf{C}^n$, il existe une courbe holomorphe $\tilde{X}$ et une application holomorphe non constante π de $\tilde{X}$ dans $\mathbf{C}^n$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image de π est contenue dans X.

(2) Pour toute courbe holomorphe Y et toute application holomorphe v de Y dans $\mathbf{C}^n$ constante sur aucune composante connexe de Y, il existe une application holomorphe et une seule $\tilde{v}$ de Y dans $\tilde{X}$ telle que

$$\pi \cdot \tilde{v} = v .$$

Le couple $(\tilde{X}, \pi)$ est déterminé à isomorphisme près par ces conditions. De plus, l'application π est propre (à fibres finies). Elle induit un isomorphisme de $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X.

Désignons par u une fonction régulière sur X et par N un ensemble fini de $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions du théorème 2. Pour tout point ζ de N, il existe un disque D de centre ζ et de rayon r dans $\mathbf{C}$ tel que la restriction de u à $u^{-1}(D \backslash \{\zeta\})$ soit un revêtement à m feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$. Désignons par $U_1, \ldots, U_p$ les composantes connexes de $u^{-1}(D \backslash \{\zeta\})$. La restriction de u à U_j est un revêtement à m_j feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$ et l'on a

$$m = m_1 + \ldots + m_p .$$

Désignons par D_j le disque centré à l'origine et de rayon r^{1/m_j} dans $\mathbf{C}$ et par ψ_j l'application de D_j dans D définie par

$$\psi_j(z) = z^{m_j} + \zeta .$$

La restriction de ψ_j à $D_j \backslash \{0\}$ est un revêtement à m_j feuillets de $D \backslash \{\zeta\}$. Il existe donc un unique homéomorphisme h_j de $D_j \backslash \{0\}$ sur U_j rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} D_j \backslash \{0\} \arrow[rr, "h_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & U_j \arrow[dl, "u"] \\ & D \backslash \{\zeta\} & \end{tikzcd} .$$

Cette application est en fait un isomorphisme. On désigne par $\tilde{X}$ l'espace obtenu en recollant $X \backslash u^{-1}(N)$ et les D_j au moyen des homéomorphismes h_j (lorsque ζ parcourt N), par π l'application réciproque de l'injection canonique de $X \backslash u^{-1}(N)$ dans $\tilde{X}$ et par ϕ_j l'application réciproque de l'injection canonique de D_j dans $\tilde{X}$. On vérifie aisément que $\tilde{X}$ est une surface topologique et que les ϕ_j sont des cartes holomorphiquement compatibles avec toute carte de $X \backslash u^{-1}(N)$. On munit $\tilde{X}$ de la structure holomorphe correspondante.

L'application π est une application holomorphe à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, définie sur le complémentaire d'un ensemble fini de $\tilde{X}$. Puisqu'elle demeure bornée au voisinage de chaque point, elle se prolonge en une application holomorphe de $\tilde{X}$ dans $\mathbf{C}^n$.

Il est clair que l'application π est propre à fibres finies, que son image est contenue dans X et qu'elle induit un isomorphisme de $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$ (§ 4, proposition 1, corollaire). Il reste à vérifier la condition (2). L'image réciproque de A est un ensemble fini et l'on pose

$$\tilde{v} = \pi^{-1} \cdot v \,|_{X \backslash v^{-1}(A)} \,.$$

On vérifie aisément que $\tilde{v}$ se prolonge par continuité aux points de $v^{-1}(A)$ ce qui achève la démonstration du théorème.

Le couple $(\tilde{X}, \pi)$ construit dans le théorème 3 s'appelle la *normalisation* (ou la *désingularisation*) *de* X. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ce qui précède.

LEMME 10. *Soit X une courbe algébrique de $\mathbf{C}^n$ et soit v une application holomorphe d'une courbe holomorphe Y dans $\mathbf{C}^n$. On suppose que l'application v est propre (à fibre finies) et qu'elle induit un isomorphisme de $Y \backslash v^{-1}(A)$ sur $X \backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X. Alors (Y, v) est la normalisation de X.*

Tout polynôme p de $\mathbf{C}[T_0, \ldots, T_n]$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$p = p_0 + \ldots + p_k$$

où p_j est homogène de degré j. Pour tout point x de $\mathbf{C}^{n+1}$ et tout nombre complexe λ, on a

$$p(\lambda x) = p_0 + \ldots + \lambda^k p_k(x) \,.$$

En particulier, si p s'annule sur une partie de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ saturée pour la projection canonique ψ de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, il en est de même de chacun des p_j.

Pour tout polynôme homogène p de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$, l'ensemble des zéros de p dans $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ est saturé pour ψ. Son image dans $\mathbf{P}^n$ s'appelle (abusivement) le *lieu des zéros de* p.

On dit qu'une partie X de $\mathbf{P}^n$ est *algébrique* si elle est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes. L'ensemble $\underline{a}$ des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$ est un idéal homogène (i.e. engendré par des polynômes homogènes) que l'on appelle l'*idéal de* X. On notera que X est aussi le lieu des zéros de toute famille de générateurs de $\underline{a}$. En particulier, le théorème de la base de Hilbert montre que X est le lieu des zéros d'une famille finie de polynômes homogènes.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal.

On dit qu'un point x de X est *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{P}^n$ tel que $U \cap X$ soit une sous-variété (holomorphe) de U. Un point est dit *singulier* s'il n'est pas régulier.

Il résulte de cette définition que l'ensemble des points réguliers de X est une partie ouverte de X et une sous-variété localement fermée de $\mathbf{P}^n$.

Pour tout entier j compris entre 0 et n, la trace de X sur l'ensemble

$$U_j = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbf{P}^n \mid z_j \neq 0\}$$

est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ dont l'idéal est donné par la formule

$$\underline{a}_j = \{p \in \mathbf{C}[T_0, ..., \hat{T}_j, ..., T_n] \mid \text{ il existe } q \in \underline{a} \text{ tel que}$$
$$p = q(T_0, ..., 1, ..., T_n)\}.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

On dit que X est *irréductible* s'il vérifie l'une des conditions suivantes dont on vérifie aisément qu'elles sont équivalentes:

(1) L'idéal $\underline{a}$ est premier.

(2) Si X est réunion de deux ensembles algébriques, l'un au moins est égal à X.

Supposons X irréductible. On vérifie aisément que l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{C}(T_0, ..., T_n) \mid p \text{ et } q \text{ homogènes de même degré et } q \notin \underline{a} \right\}$$

est un sous-anneau de $\mathbf{C}(T_0, ..., T_n)$ et que le quotient $A/\underline{a}A$ est un corps. On l'appelle le *corps des fonctions rationnelles sur* X et on le désigne par

$\kappa(X)$. On appelle *dimension algébrique de* X le degré de transcendance de $\kappa(X)$.

PROPOSITION 4. *Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$ et soit $\underline{a}$ son idéal. Si X est irréductible et si T_j n'appartient pas à $\underline{a}$, la trace de X sur U_j est irréductible et le corps $\kappa(X)$ des fonctions rationnelles sur X s'identifie au corps des fractions de $\mathbf{C}[T_0, \ldots, \hat{T}_j, \ldots, T_n]/\underline{a}_j$.*

Désignons par p_1 et p_2 des polynômes de degré k_1 et k_2 respectivement dans $\mathbf{C}[T_0, \ldots, \hat{T}_j, \ldots, T_n]$ tels que le produit $p_1 p_2$ appartienne à $\underline{a}_j$. Ceci signifie qu'il existe un polynôme q dans $\underline{a}$ tel que

$$p_1 p_2 = q(T_0, \ldots, 1, \ldots, T_n).$$

Comme $\underline{a}$ est premier et que T_j n'appartient pas à $\underline{a}$, on peut supposer que q n'est pas divisible par T_j. On a alors

$$T_j^{k_1+k_2} p_1\left(\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right) p_2\left(\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right)$$
$$= T_j^{k_1+k_2} q\left(\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{1}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right) = q,$$

d'où l'assertion. Le reste de la proposition est laissé en exercice au lecteur.

On appelle *courbe algébrique projective* tout ensemble algébrique irréductible de dimension algébrique 1 dans un espace projectif.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des résultats correspondants du cas affine.

THÉORÈME 4. *L'ensemble des points singuliers d'une courbe algébrique projective X est fini. L'ensemble des points réguliers est une courbe holomorphe connexe et dense dans X.*

THÉORÈME 5. *Pour toute courbe algébrique projective X de $\mathbf{P}^n$, il existe une courbe holomorphe $\tilde{X}$ et une application holomorphe non constante π de $\tilde{X}$ dans $\mathbf{P}^n$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image de π est contenue dans X.

(2) Pour toute courbe holomorphe connexe Y et toute application holomorphe non constante v de Y dans $\mathbf{P}^n$ dont l'image est contenue dans

X, il existe une application holomorphe $\tilde{v}$ et une seule de Y dans $\tilde{X}$ telle que

$$\pi \cdot v = \tilde{v}\,.$$

Le couple $(\tilde{X},\pi)$ est déterminé à isomorphisme près par ces conditions. De plus, la courbe $\tilde{X}$ est compacte et connexe et l'application π induit un isomorphisme de $\tilde{X}\backslash\pi^{-1}(A)$ sur $X\backslash A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de X.

Le couple $(\tilde{X},\pi)$ du théorème 5 s'appelle la *normalisation* (ou la *désingularisation*) *de* X.