Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: §4. Courbes holomorphes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

§ 4. Courbes holomorphes

Nous allons maintenant nous limiter à l'étude des courbes holomorphes (appelées aussi *surfaces de Riemann*). Nous avons toujours supposé les variétés (topologiques, différentielles ou holomorphes) paracompactes. Un célèbre théorème de Radò affirme que cette hypothèse est superflue dans le cas des courbes holomorphes (voir par exemple [6]). Nous n'utiliserons pas ce résultat qui, au demeurant est très particulier à la dimension complexe 1.

Théorème 1. *Soient X et Y deux courbes holomorphes et soit u une application holomorphe de X dans Y. On suppose X connexe. Alors u est ouverte ou constante.*

Supposons u non constante. L'assertion étant locale, on se ramène aisément au cas où X et Y sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$. Soit x_0 un point de X. Il suffit de montrer que $u(X)$ est un voisinage de $u(x_0)$ (toutes les composantes connexes d'un ensemble ouvert de X sont ouvertes). Pour ce faire, on peut supposer que $u(x_0)$ est nul. Il existe alors un disque D de centre x_0 relativement compact dans X tel que u ne s'annule pas sur ∂D (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Posons

$$\rho = \inf_{z \in \partial D} |u(z)| .$$

Il suffit de montrer que tout point w de Y n'appartenant pas à $u(X)$ est de module strictement supérieur à $\frac{\rho}{2}$. On peut évidemment supposer qu'il est de module strictement inférieur à ρ et l'on définit une fonction holomorphe f sur X en posant

$$|f(z)| = \frac{1}{u(z) - w} .$$

Pour tout point z de ∂D, on a

$$f(z) = \frac{1}{|u(z) - w|} \leqslant \frac{1}{\rho - |w|} .$$

On en déduit que (§ 1, théorème 1, corollaire 1),

$$\frac{1}{|w|} = |f(x_0)| \leqslant \|f\|_{\partial D} \frac{1}{\rho - |w|}$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1 (Principe du maximum). *Soit X une courbe holomorphe connexe et soit f une fonction holomorphe sur X. Si la fonction f possède un maximum relatif, elle est constante.*

Soit x_0 un point de X et soit K un voisinage compact de x_0 tel que

$$|f(x_0)| = \|f\|_K .$$

L'ensemble $f(K)$ est contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $|f(x_0)|$, ce n'est donc pas un voisinage de $f(x_0)$ et par conséquent f est constante.

COROLLAIRE 2. *Soit X une courbe holomorphe connexe et soit K une partie compacte de X distincte de X. Pour toute fonction holomorphe f sur X, on a*

$$\|f\|_{\partial K} = \|f\|_K .$$

En effet, si f atteint son maximum en un point de $\overset{\circ}{K}$, elle est constante.

COROLLAIRE 3. *Toute fonction holomorphe sur une courbe holomorphe compacte et connexe est constante.*

COROLLAIRE 4. *Soient X et Y deux courbes holomorphes connexes et soit u une application holomorphe de X dans Y. On suppose X compacte. Si Y est ouverte, l'application u est constante. Si Y est compacte, l'application u est constante ou surjective.*

Remarque 1.

Le théorème 1 et ses corollaires demeurent valables si X est de dimension supérieure à 1. C'est une conséquence facile du cas traité ici.

PROPOSITION 1. *Soient X et Y deux courbes holomorphes et soit u une application holomorphe de X dans Y. On suppose que u n'est constante sur aucune composante connexe de X. Pour tout point x_0 de X, il existe une carte ϕ de X centrée en x_0, une carte ψ de Y centrée en $u(x_0)$ et un entier m strictement positif tels que*

$$u_{\psi\phi}(z) = z^m .$$

Soit ϕ (resp. ψ) une carte de domaine U (resp. V) centrée en x_0 (resp. $u(x_0)$). L'expression de u dans (ϕ, ψ) est une fonction holomorphe f sur

$\phi(U)$, nulle à l'origine mais non identiquement nulle. Si $\phi(U)$ est un disque suffisamment petit, il existe un entier m et une fonction g holomorphe inversible sur $\phi(U)$ tels que

$$f(z) = z^m g(z)$$

(§ 1, théorème 1, corollaire 3). Il existe alors une fonction holomorphe h sur $\phi(U)$ dont la puissance m^e est égale à g. En diminuant au besoin $\phi(U)$, on peut supposer que l'application θ définie par

$$\theta(z) = z\,h(z)$$

est un isomorphisme de $\phi(U)$ sur un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. Il suffit alors de remplacer ϕ par $\theta \cdot \phi$.

COROLLAIRE. *Soient* X *et* Y *deux courbes holomorphes et soit* u *une application holomorphe de* X *dans* Y. *Si* u *est injective au voisinage d'un point, elle est de rang* 1 *en ce point.*

On conserve les notations et les hypothèses de la proposition 1. L'entier $m-1$ est indépendant des cartes ϕ et ψ. On l'appelle l'*indice de ramification de* u *au point* x_0 et on le désigne par $v_{x_0}(u)$. On dit que x_0 est un *point de ramification de* u si $v_{x_0}(u)$ est strictement positif. Pour que x_0 soit un point de ramification de u, il faut et il suffit que le rang de u au point x_0 soit nul (autrement dit, les points de ramification sont exactement les points critiques). L'ensemble des points de ramification est fermé et discret.

Supposons de plus X et Y connexes et u propre (ce qui implique que u est surjective en vertu du théorème 1). L'image B des points de ramification de u (i.e. l'ensemble des valeurs critiques) est fermé discret, de même que son image réciproque A. La restriction de u à $X \backslash A$ est un revêtement de $Y \backslash B$ dont le nombre de feuillets est le degré de u (chap. 0, § 4, théorème 4). Il résulte immédiatement des définitions que l'on a

$$\deg(u) = \sum_{x \in u^{-1}(y)} v_x(u)$$

pour tout point y de Y.

Dans toute la suite, on désigne par X une courbe holomorphe que l'on suppose connexe pour fixer les idées.

Soit π un fibré en droites holomorphe sur X et soit ϕ une carte de X centrée en un point x. Tout germe non nul s de $\mathscr{H}(\pi)_x$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s = \phi_x^m v$$

où m est un entier relatif appelé l'*ordre de* s et v un germe de $\mathcal{O}(\pi)_x$ ne s'annulant pas en x. En particulier, les zéros et les pôles d'une section méromorphe s non identiquement nulle sont isolés. On vérifie aisément que l'ordre du germe s_x coïncide avec l'ordre de s au point x. Le lemme suivant en découle aussitôt (chap. 0, § 5, proposition 2).

LEMME 1. *Supposons X compacte. Toutes les sections méromorphes de π ont pour ordre la classe de Chern de π.*

En particulier, toutes les fonctions méromorphes sur X sont d'ordre 0.

La deuxième assertion s'exprime aussi en disant que le nombre de pôles d'une fonction méromorphe est égal au nombre de ses zéros.

LEMME 2. *Soit u une application holomorphe non constante de X dans une courbe holomorphe Y.*

(1) Pour toute fonction méromorphe h sur Y et pour tout point x de X, on a

$$0_x\big(u^*(h)\big) = \big(v_x(u) + 1\big)\, 0_{u(x)}(h)\,.$$

(2) Pour toute forme différentielle méromorphe s sur Y et pour tout point x de X, on a

$$0_x\big(u^*(s)\big) = \big(v_x(u) + 1\big)\, 0_{u(x)}(s) + v_x(u)\,.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

Soit u une fonction méromorphe sur X et soit $\tilde{u}$ la fonction holomorphe sur $R(u)$ qui lui est associée. On identifie $\mathbf{C}$ à l'ensemble ouvert U_0 de $\mathbf{P}^1$ défini par

$$U_0 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\}$$

et l'on prolonge $\tilde{u}$ en posant

$$\tilde{u}(x) = (0:1)$$

pour tout pôle x de u. On vérifie aisément que l'application $\tilde{u}$ de X dans $\mathbf{P}^1$ ainsi définie est holomorphe. On identifie de cette manière les fonctions méromorphes sur X aux applications holomorphes de X dans $\mathbf{P}^1$ non identiquement égales à (0: 1) [1]).

Si X est compacte, on peut en particulier parler du *degré d'une fonction méromorphe* non constante: c'est le degré de l'application holomorphe

[1]) On prendra garde que cette identification n'est plus possible si X est de dimension strictement supérieure à 1.

correspondante. Il résulte de ces définitions que c'est aussi le nombre de pôles (avec multiplicité) ou le nombre de zéros (avec multiplicité) de cette fonction.

Soit x un point de X et soit s une forme différentielle holomorphe sur $X \backslash \{x\}$. Pour toute carte ϕ de domaine U centrée en x, telle que $\phi(U)$ soit un disque de $\mathbf{C}$, on a

$$s \mid_U = f\, d\phi \qquad \text{et} \qquad f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \phi^k$$

où f est une fonction holomorphe sur $U \backslash \{x\}$ et $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes (§ 1, théorème 1, corollaire 6). La formule suivante permet de calculer le résidu de s au point x (chap. 0, § 5)

$$\text{Rés}\,(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} s = \sum_{k \in Z} a_k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \phi^k\, d\phi = a_{-1}$$

où D désigne un disque de centre x relativement compact dans ϕ.

Soit π un fibré vectoriel holomorphe de rang pur p sur X et soit u une partie principale de π. Pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert U de x et une section méromorphe s de π sur U représentant $u \mid_U$. On peut toujours supposer que U est le domaine commun à une carte Φ de π et à une carte ϕ de X centrée en x et que de plus $\phi(U)$ est un disque. L'expression de s dans Φ est alors un p-uple $(s_1, ..., s_p)$ de fonctions méromorphes sur U et l'on a

$$s_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{j,k} \phi^k$$

pour tout entier j compris entre 1 et p. Notons que les $a_{j,k}$ d'indice strictement négatif sont presque tous nuls (§ 1, théorème 1, corollaire 7). La restriction de u à U est représentée par le p-uple

$$\left(\sum_{k<0} a_{1,k} \phi^k, \ldots, \sum_{k<0} a_{p,k} \phi^k\right).$$

En particulier, l'ensemble des points de X où u est non nul est fermé discret.

Soit u un diviseur de X et soit x un point de X. Il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section méromorphe s non nulle de π dont le diviseur est u (§ 3, lemme 3). L'ordre de s au point x (ou l'ordre de s si X est compacte) ne dépend que de u *(loc. cit.)*. On l'appelle l'*ordre de* u *au point* x (ou l'*ordre de* u) et on le désigne par $0_x(u)$ (resp. $0(u)$).

L'application $\chi(u)$ de X dans $\mathbf{Z}$ définie par

$$\chi(u)(x) = 0_x(u)$$

est nulle en dehors d'un ensemble fermé discret. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions.

LEMME 3. *L'application* χ *induit un isomorphisme de* $\mathcal{D}(X)$ *sur l'ensemble des applications de* X *dans* $\mathbf{Z}$ *dont le support est fermé discret. Les diviseurs positifs correspondent aux applications à valeurs dans* $\mathbf{N}$.

Soient X et Y deux courbes holomorphes connexes et soit u une application holomorphe propre, non constante de degré p de X dans Y.

On désigne par $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions méromorphes sur X et par σ un polynôme de

$$\mathbf{C}\left[T_{jk}\right]_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p}$$

symétrique en $T_{j1}, \ldots, T_{jp}$ pour j fixé. Désignons par B l'image des points de ramification de u et des pôles de $h_1, \ldots, h_n$. Pour tout point y de $Y \backslash B$, la fibre $u^{-1}(y)$ contient exactement p points $x_1, \ldots, x_p$ et l'on pose

$$u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)(y) = \sigma(h_j(x_k)) .$$

L'hypothèse faite sur σ montre que cette définition est indépendante de la numérotation des points $x_1, \ldots, x_p$.

PROPOSITION 2. *La fonction* $u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)$ *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* Y *si* $h_1, \ldots, h_n$ *sont holomorphes (resp. méromorphes) sur* X.

Supposons tout d'abord $h_1, \ldots, h_n$ holomorphes et montrons qu'il en est de même de

$$w = u_\sigma(h_1, \ldots, h_n) .$$

Pour tout ensemble ouvert simplement connexe V de $Y \backslash B$, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est formé de p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ et la restriction de u à chacun des U_k est un isomorphisme sur V. On désigne par v_k l'isomorphisme réciproque. On a alors

$$w \mid_V = \sigma(h_j \cdot v_k)$$

ce qui montre déjà que $w \big|_{Y \backslash B}$ est holomorphe. De plus, la fonction w reste bornée au voisinage de tout point de B, ce qui démontre l'assertion (§ 1, théorème 1, corollaire 7).

Supposons maintenant $h_1, \ldots, h_n$ méromorphes et σ homogène de degré q. Le raisonnement précédent montre que $w \big|_{Y \backslash B}$ est holomorphe. Soit ψ une carte de Y centrée en un point y de B. La fonction $\psi \cdot u$ s'annule en tout point de $u^{-1}(y)$. Il existe par conséquent un entier naturel m tel que les fonctions $(\psi \cdot u)^m h_j$ soient holomorphes au voisinage de $u^{-1}(y)$. On a alors

$$u_\sigma((\psi \cdot u)^m h_1, \ldots, (\psi \cdot u)^m h_n) = (\psi \cdot u)^{mq} u_\sigma(h_1, \ldots, h_n)$$

et l'assertion résulte de la première partie de la démonstration.

Désignons par s une forme différentielle méromorphe sur X et par B l'image des points de ramification de u et des pôles de s. Pour tout ensemble ouvert simplement connexe V de $Y \backslash B$, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est formé de p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ et la restriction de u à chacun des U_k est un isomorphisme sur V. On désigne par v_k l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$w = v_1^*(s) + \ldots + v_p^*(s).$$

La forme différentielle w est holomorphe sur V et l'on obtient par recollement une forme différentielle holomorphe $u_*(s)$ sur $Y \backslash B$.

PROPOSITION 3. *La forme différentielle* $u_*(s)$ *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* Y *si* s *est holomorphe (resp. méromorphe) sur* X.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 2.

§ 5. EXEMPLES

(1) Quelques remarques sur la droite projective.

On fait opérer le groupe $G(2; \mathbf{C})$ des matrices carrées inversibles d'ordre 2 dans $\mathbf{P}^1$ par la formule

$$(w_0 : w_1) = (z_0 : z_1) \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = (dz_0 + cz_1 : bz_0 + az_1).$$

Cette opération est continue. Dans $\mathbf{C}$, identifié à l'ensemble

$$U_0 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\},$$

cette formule prend l'aspect suivant

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Une transformation de ce type est un automorphisme de $\mathbf{P}^1$ appelé *homographie*. Le noyau de l'opération contenant les homothéties, on peut se restreindre au groupe $Sl(2; \mathbf{C})$ des matrices de déterminant 1. Le noyau est alors réduit au centre de $Sl(2; \mathbf{C})$, i.e. le sous-groupe d'ordre 2 formé de l'identité et de son opposé. Ainsi le groupe des homographies apparaît comme le quotient de $Sl(2; \mathbf{C})$ par son centre.