Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: §3. Fonctions méromorphes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0_c(X, \pi)$ est nul (principe du prolongement analytique).

On prendra garde de ne pas confondre le groupe de cohomologie de de Rham $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ de la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ (chap. 0, § 4) et le groupe de cohomologie de Dolbeault $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}_X)$ du fibré produit $\mathbf{C}_X$.

§ 3. Fonctions méromorphes

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Lemme 1. *On suppose X connexe et l'on désigne par f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur X. L'ensemble V défini par*

$$V = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$$

est alors connexe et dense dans X.

Il suffit de montrer que tout point x_0 de X possède un voisinage U tel que $V \cap U$ soit connexe et dense dans U.

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et, par un changement linéaire affine de coordonnées, on peut également supposer que x_0 est l'origine et que la fonction partielle $f(0, \ldots, 0, z_n)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0. Désignons par D'' un disque fermé de centre 0 dans $\mathbf{C}$ tel que $f(0, \ldots, 0, z_n)$ soit holomorphe au voisinage de D'' et ne s'annule pas sur $\partial D''$ (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Par continuité, il existe un nombre réel ε strictement positif tel que f soit holomorphe au voisinage de $D' \times D''$ et ne s'annule pas sur $D' \times \partial D''$, en désignant par D' le polydisque de $\mathbf{C}^{n-1}$ défini par

$$D' = \{ (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid \max_{1 \leqq j \leqq n-1} |z_j| \leqslant \varepsilon \} .$$

L'ensemble $V \cap (D' \times D'')$ est connexe et dense dans $D' \times D''$ comme il résulte aussitôt de la formule

$$\begin{aligned} & V \cap (D' \times D'') \\ &= (D' \times \partial D'') \cup \bigcup_{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in D'} \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid f(z_1, \ldots, z_n) \neq 0 \} . \end{aligned}$$

Pour tout point x de X, l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes en x de fonctions holomorphes est intègre (§ 1, proposition 1, corollaire 2) et l'ensemble $\mathcal{O}(\pi)_x$

des germes en x de sections holomorphes de π est un $\mathcal{O}_x$-module. On désigne par $\mathcal{K}_x$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$ et l'on pose

$$\mathcal{K}(\pi)_x = \mathcal{K}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(\pi)_x .$$

Tout élément de $\mathcal{K}(\pi)_x$ s'écrit comme quotient d'un élément de $\mathcal{O}(\pi)_x$ par un élément non nul de $\mathcal{O}_x$.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathcal{K}(\pi)_x$ sur X. Pour éviter des confusions, on désigne par u_x l'image du point x de X. On dit que u est une *section méromorphe de* π si elle vérifie la condition suivante:

(M) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert connexe U de x_0, une section holomorphe s de π sur U et une fonction holomorphe f non nulle sur U tels que

$$u_x = \frac{s_x}{f_x}$$

pour tout point x de U.

On désigne par $\mathcal{K}(X, \pi)$ l'ensemble des sections méromorphes de π et par $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur X (i.e. les sections méromorphes du fibré produit $\mathbf{C}_X$). On vérifie aisément que l'addition et la multiplication point par point définissent sur $\mathcal{K}(X)$ une structure d'anneau commutatif avec élément unité et sur $\mathcal{K}(X, \pi)$ une structure de $\mathcal{K}(X)$-module.

La restriction à un ensemble ouvert d'une section méromorphe est une section méromorphe. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathcal{K}(U, \pi) \to \mathcal{K}(\pi)_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'une section méromorphe à sa valeur au point x.

On dit qu'une section méromorphe u de π est *régulière au point* x si u_x appartient à $\mathcal{O}(\pi)_x$. On appelle *domaine de régularité de* u l'ensemble $R(u)$ des points où u est régulière. Les points n'appartenant pas au domaine de régularité s'appellent les *pôles de* u.

LEMME 2. *Supposons* X *connexe. Le domaine de régularité d'une section méromorphe* u *de* π *est un ensemble ouvert, connexe et dense dans* X.

Soit x_0 un point de X. On désigne par U un voisinage ouvert connexe de x_0, par s une section holomorphe de π sur U et par f une fonction holomorphe non nulle sur U tels que

$$u_x = \frac{s_x}{f_x}$$

pour tout point x de U. Si u est régulière au point x_0, on peut supposer que f ne s'annule pas sur U ce qui montre déjà que $R(u)$ est ouvert. Si u n'est pas régulière au point x_0, l'ensemble

$$V = \{ x \in U \mid f(x) \neq 0 \}$$

est connexe et dense dans U (lemme 1), d'où l'assertion puisqu'il est contenu dans $R(u)$.

Pour toute section méromorphe u de π et pour tout point x de $R(u)$, on pose

$$\tilde{u}(x) = u_x(x) .$$

Ceci a bien un sens puisque u_x appartient à $\mathcal{O}(\pi)_x$. Il est clair que $\tilde{u}$ est une section holomorphe de π sur $R(u)$. On dit qu'elle est *associée à* u.

PROPOSITION 1 (Principe du prolongement analytique). *Supposons* X *connexe et soient* u *et* v *deux sections méromorphes de* π. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Les sections u *et* v *coïncident partout.*

(2) Les sections u *et* v *coïncident sur* $R(u) \cap R(v)$.

(3) Les germes de u *et* v *coïncident en un point.*

Il suffit de montrer que (3) implique (1). Désignons par V l'ensemble des points de X où les germes de u et v coïncident. Puisqu'il est ouvert, il suffit de montrer qu'il est fermé. Tout point x_0 de $\overline{V}$ possède un voisinage ouvert connexe U tel que

$$u \mid_U = \frac{s}{f} \quad \text{et} \quad v \mid_U = \frac{t}{g} ,$$

et puisque les germes u_x et v_x coïncident en un point x de U, le principe du prolongement analytique (§ 1, proposition 1, corollaire 2) montre que l'on a

$$gs = ft$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Si* X *est connexe, l'anneau* $\mathcal{K}(X)$ *des fonctions méromorphes sur* X *est un corps.*

Désignons par u une fonction méromorphe non nulle sur X. Il résulte de la proposition 1 que u_x n'est jamais nul. On vérifie aisément que les germes u_x^{-1} définissent une fonction méromorphe sur X ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Supposons X connexe et désignons par s une section holomorphe de π sur un ensemble ouvert non vide U de X. La proposition 1 montre qu'il existe au plus une section méromorphe de π dont le domaine de régularité contient U et dont la restriction coïncide avec s. S'il en existe une, on dit (abusivement) que s est une *section méromorphe de* π.

Supposons π de rang pur p. On désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement de X par des domaines de cartes de π et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang p subordonné à ce recouvrement et associé à π. Les sections méromorphes de π sont en correspondance biunivoque avec les familles $(u_\iota)_{\iota\in I}$ où u_ι est un p-uple de fonctions méromorphes sur U_ι, vérifiant les conditions de recollement

$$u_\kappa = g_{\kappa\iota} u_\iota .$$

On appelle *forme différentielle méromorphe de degré* r toute section méromorphe de $\Omega^{r,0}$. On définit de manière évidente l'image réciproque d'une forme différentielle méromorphe par une application holomorphe.

Pour tout point x de X, on désigne par $\mathcal{Q}(\pi)_x$ le $\mathcal{O}_x$-module quotient de $\mathcal{K}(\pi)_x$ par $\mathcal{O}(\pi)_x$.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x\in X} \mathcal{Q}(\pi)_x$ sur X. Pour éviter des confusions, l'image d'un point x de X se désigne par u_x. On dit que u est une *partie principale de* π si elle vérifie la condition suivante:

(*PP*) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une section méromorphe de π sur U dont le germe représente u_x en tout point x de U.

On désigne par $\mathcal{Q}(X, \pi)$ l'ensemble des parties principales de π. L'addition et la multiplication point par point en font un $\mathcal{O}(X)$-module.

La restriction à un ensemble ouvert d'une partie principale est une partie principale. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathcal{Q}(U, \pi) \to \mathcal{Q}(\pi)_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'une partie principale à sa valeur au point x.

PREMIER PROBLÈME DE COUSIN. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie principale appartienne à l'image de l'application canonique*

$$\gamma_I : \mathscr{K}(X, \pi) \to \mathscr{Q}(X, \pi).$$

Pour tout élément u de $\mathscr{Q}(X, \pi)$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et pour chaque indice ι une section méromorphe s_ι de π sur U_ι représentant $u\,|_{U_\iota}$. Par définition, la section

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

est holomorphe sur $U_\iota \cap U_\kappa$. Il existe donc pour chaque indice ι une section t_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ telle que

$$s_{\kappa\iota} = t_\iota - t_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les formes différentielles $d''t_\iota$ se recollent en une section v de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. La forme différentielle $d''v$ est nulle et l'on vérifie aisément que la classe $\delta(u)$ de v dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ ne dépend que de u.

PROPOSITION 2. *La suite de $\mathscr{O}(X)$-modules et d'applications linéaires*

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

est exacte.

On conserve les notations précédentes. Si u provient d'une section méromorphe de π, on peut prendre comme recouvrement ouvert l'ensemble X lui-même et l'on voit que $\delta(u)$ est nul.

Réciproquement, supposons $\delta(u)$ nul. Ceci signifie qu'il existe une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ telle que

$$d''t = v.$$

Pour tout indice ι, la section $t_\iota - t\,|_{U_\iota}$ est holomorphe et les sections $s_\iota - t_\iota + t\,|_{U_\iota}$ se recollent en une section méromorphe de π représentant u, d'où l'assertion.

Pour tout point x de X, on désigne par $\mathscr{D}_x$ le groupe abélien quotient de $\mathscr{K}_x^*$ par $\mathscr{O}_x^*$, où $\mathscr{O}_x^*$ (resp. $\mathscr{K}_x^*$) désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{O}_x$ (resp. $\mathscr{K}_x$). Ce groupe est noté additivement.

Soit u une section de la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathscr{D}_x$ sur X. Pour éviter des confusions, l'image d'un point x de X se désigne par u_x. On dit que u est un *diviseur de* X si la condition suivante est vérifiée:

(D) Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une fonction méromorphe inversible sur U dont le germe en tout point représente u_x.

On désigne par $\mathscr{D}(X)$ l'ensemble des diviseurs de X. L'addition point par point en fait un groupe abélien.

La restriction d'un diviseur à un ensemble ouvert est un diviseur. En particulier, on a pour tout point x de X une application canonique

$$\theta_x : \varinjlim \mathscr{D}(U) \to \mathscr{D}_x$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x. Il résulte immédiatement des définitions que cette application est un isomorphisme qui permet d'identifier le germe en x d'un diviseur à sa valeur au point x.

Soit π un fibré en droites holomorphe sur X. On désigne par $\mathscr{K}^*(X, \pi)$ l'ensemble des sections méromorphes de π qui ne s'annulent identiquement sur aucune composante connexe de X. Soit s une telle section. L'expression de s dans toute carte Φ de π est une fonction méromorphe inversible sur le domaine U de Φ. La classe de cette fonction dans $\mathscr{D}(U)$ est indépendante de Φ. Par recollement, on obtient ainsi un diviseur sur X que l'on dit *associé à* s et que l'on désigne par (s). On définit ainsi une application canonique

$$\gamma_{II}(\pi) : \mathscr{K}^*(X, \pi) \to \mathscr{D}(X) .$$

Deuxième problème de Cousin. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un diviseur appartienne à l'image de l'application canonique*

$$\gamma_{II} : \mathscr{K}^*(X) \to \mathscr{D}(X) .$$

Pour tout diviseur u de X, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι une fonction méromorphe inversible s_ι sur U_ι représentant $u|_{U_\iota}$. Par définition, la fonction

$$s_{\kappa\iota} = s_\kappa s_\iota^{-1}$$

est holomorphe inversible sur $U_\iota \cap U_\kappa$ et la famille $(s_{\kappa\iota})$ est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι). On vérifie aisément que sa classe $v(u)$ dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de u.

LEMME 3. *Pour tout diviseur* u *de* X, *il existe un fibré en droites holomorphe* π *sur* X *et une section méromorphe* s *de* $\mathscr{K}^*(X, \pi)$ *dont le diviseur est* u.

La section s *est déterminée modulo la multiplication par une fonction holomorphe inversible. Le fibré* π *est déterminé à isomorphisme près.*

Conservons les notations précédentes et désignons par π un fibré en droites holomorphe associé au cocycle $(s_{\kappa\iota})$. Les fonctions méromorphes s_ι se recollent en une section méromorphe s de π ayant les propriétés requises. Si s' est une deuxième section méromorphe dont le diviseur est u, le diviseur de la fonction méromorphe $\frac{s}{s'}$ est identiquement nul et cette fonction est holomorphe inversible.

Enfin, si ρ est un deuxième fibré en droites holomorphe et t une section méromorphe de ρ dont le diviseur est u, la section $\frac{s}{t}$ de $\pi \otimes \rho^*$ est holomorphe et partout non nulle ce qui achève la démonstration du lemme.

PROPOSITION 3. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\mathscr{K}^*(X) \xrightarrow{\gamma_{II}} \mathscr{D}(X) \xrightarrow{\nu} \operatorname{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$$

est exacte.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2. Elle est laissée en exercice au lecteur.

On dit qu'un diviseur de $\mathscr{D}(X)$ est *positif* s'il est localement représentable par une fonction holomorphe. Les diviseurs positifs de X forment un sous-ensemble $\mathscr{D}_+(X)$ de $\mathscr{D}(X)$ stable par addition. La relation

$$\text{« } u - v \text{ appartient à } \mathscr{D}_+(X) \text{ »}$$

est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{D}(X)$ que l'on désigne par $v \leqslant u$.

Supposons X connexe. Pour tout diviseur u de X, l'ensemble

$$\mathscr{K}_u(X) = \{ h \in \mathscr{K}(X) \mid h = 0 \text{ ou } (h) \geqslant -u \}$$

est un sous-$\mathscr{O}(X)$-module de $\mathscr{K}(X)$. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section méromorphe non nulle de π ayant u pour diviseur (lemme 3). On vérifie aisément que la division par s induit un isomorphisme de $\mathscr{O}(X, \pi)$ sur $\mathscr{K}_u(X)$.