Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §2. Variétés holomorphes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Une utilisation répétée de l'argument développé au corollaire 4 du théorème 1 montre qu'il existe pour tout polydisque D relativement compact dans U et pour tout multi-indice α une constante $c_{\alpha,D}$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} \right\|_{\bar{D}} \leqslant c_{\alpha,D} \| f \|_{L^1,K}$$

où K est un voisinage compact de l'adhérence de D dans U. L'assertion en résulte aussitôt.

§ 2. Variétés holomorphes

Toutes les cartes de variétés topologiques considérées désormais prennent leurs valeurs dans des espaces numériques complexes.

Soit X une variété topologique.

On dit que deux cartes de X sont *holomorphiquement compatibles* si les changements de cartes sont holomorphes.

On appelle *atlas holomorphe de* X tout ensemble de cartes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures holomorphes de* X.

On appelle *variété holomorphe* toute variété topologique munie d'une structure holomorphe.

Soit X une variété holomorphe.

On appelle (abusivement) *atlas de* X tout atlas holomorphe appartenant à la structure holomorphe de X et *carte de* X toute carte appartenant à un atlas de X.

Soit x un point de X. Toutes les cartes de X dont le domaine contient x prennent leurs valeurs dans le même espace numérique complexe. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* X *au point* x et se désigne par $\dim_x(X)$. La fonction $\dim(X)$ est localement constante. On dit que X est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe holomorphe* (resp. *surface holomorphe*) toute variété holomorphe de dimension pure 1 (resp. 2).

Les changements de cartes étant en particulier des difféomorphismes, la variété topologique X se trouve naturellement munie d'une structure différentielle que l'on dit *sous-jacente à* X. Pour éviter des confusions, on désigne quelquefois par $X^{\mathbf{R}}$ la variété différentielle obtenue en munissant X de la structure sous-jacente.

Le jacobien des changements de cartes étant toujours positif, la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ est orientable et munie d'une orientation naturelle.

On dit qu'une application de X dans un espace vectoriel complexe E de dimension finie est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de X (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de X). On désigne par $\mathcal{O}(X, E)$ l'ensemble de ces applications. Si E est égal à $\mathbf{C}$, on utilise aussi la notation $\mathcal{O}(X)$.

Notons que $\mathcal{O}(X)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^{\infty}(X, \mathbf{C})$ et $\mathcal{O}(X, E)$ un sous-$\mathcal{O}(X)$-module de $\mathscr{C}^{\infty}(X, E)$. De plus, les topologies induites par $\mathscr{C}^{\infty}(X, E)$ et $L^1_{\mathrm{loc}}(X, E)$ sur $\mathcal{O}(X, E)$ coïncident (§ 1, proposition 1, corollaire 3). Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}(X, E)$ est complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

On dit qu'une application continue u de X dans une variété holomorphe Y est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathcal{O}(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application u est un *isomorphisme* si elle est bijective et si u et u^{-1} sont holomorphes.

Les variétés holomorphes, les applications holomorphes et leur composition forment une catégorie. Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions.

Lemme 1. *Pour qu'une application continue u de X dans Y soit holomorphe, il faut et il suffit que l'application u^* envoie $\mathcal{O}(V)$ dans $\mathcal{O}(u^{-1}(V))$ pour tout ensemble ouvert V de Y.*

Les exemples donnés au paragraphe 1 du chapitre 0 fournissent *mutatis mutandis* des exemples de variétés holomorphes. En particulier, pour tout entier naturel n, on construit comme dans l'exemple 5 l'*espace projectif complexe* $\mathbf{P}^n$ *de dimension* n.

Soit X une variété holomorphe et soit π une application de but X.

On dit que deux cartes complexes de π sont *holomorphiquement compatibles* si la transition est holomorphe.

On appelle *atlas holomorphe de* π tout ensemble de cartes complexes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles holomorphes de* π.

On appelle *fibré vectoriel holomorphe sur* X toute application de but X munie d'une structure vectorielle holomorphe.

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

On appelle (abusivement) *atlas de* π tout atlas holomorphe appartenant à la structure vectorielle holomorphe de π et *carte de* π toute carte appartenant à un atlas de π.

On notera que la source $\tau(\pi)$ de π est naturellement munie d'une structure holomorphe (chap. 0, § 2).

Les transitions étant en particulier indéfiniment dérivables, l'application π est de manière naturelle un fibré vectoriel complexe sur $X^{\mathbf{R}}$. Pour éviter des confusions, nous dirons qu'un fibré vectoriel complexe sur $X^{\mathbf{R}}$ est un *fibré vectoriel différentiel sur* X.

On dit qu'une section de π est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de π (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de π ou encore si c'est une application holomorphe de X dans $\tau(\pi)$). On désigne par $\mathcal{O}(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que $\mathcal{O}(X, \pi)$ est un sous-$\mathcal{O}(X)$-module de $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$. De plus, les topologies induites par $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$ et $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ sur $\mathcal{O}(X, \pi)$ coïncident. Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}(X, \pi)$ est complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Si ρ est un second fibré vectoriel holomorphe sur X, on désigne par $\mathcal{O}(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes holomorphes de π dans ρ (i.e. les applications holomorphes u de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$ telles que

$$\rho \cdot u = \pi ,$$

qui induisent des applications $\mathbf{C}$-linéaires sur les fibres).

Les exemples et les constructions donnés au paragraphe 2 du chapitre 0 fournissent *mutatis mutandis* des exemples et des constructions de fibrés vectoriels holomorphes. En particulier, si π et ρ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur X, il en est de même des fibrés vectoriels $\pi \oplus \rho, \pi \otimes \rho, \pi^*$ et $\Lambda\pi$.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de X. On dit qu'un cocycle de rang p subordonné à $\mathscr{U}$ est *holomorphe* si les applications qui le composent sont holomorphes. On définit de la même manière la relation de cobordance entre cocycles holomorphes, d'où un ensemble $\mathrm{Pic}\big(X, G(p; \mathbf{C})\big)$ dont les éléments s'appellent les *fibrés principaux holomorphes de groupe structural* $G(p; \mathbf{C})$ *sur* X.

Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels holomorphes de rang p sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux holomorphes de groupe structural $G(p; \mathbf{C})$.

On prendra garde de distinguer Pic $(X, G(p; \mathbf{C}))$ et Pic $(X^{\mathbf{R}}, G(p; \mathbf{C}))$: un fibré vectoriel holomorphe différentiablement trivial n'est pas nécessairement holomorphiquement trivial (chap. IV, § 7).

Soit X une variété holomorphe de dimension pure n.

Le fibré cotangent complexe $\Omega_{\mathbf{C}}^1$ à $X^{\mathbf{R}}$ est un fibré vectoriel différentiel de rang $2n$ sur X. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X et pour tout point x de U, on a un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire

$$\varepsilon_{x,\phi} : \Omega^1_{\mathbf{C},X} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) .$$

(chap. 0, § 3, lemme 1). Il résulte de la définition même des applications holomorphes que les sous-espaces $\Omega_x^{1,0}$ et $\Omega_x^{0,1}$ de $\Omega^1_{\mathbf{C},x}$ images réciproques par $\varepsilon_{x,\phi}$ des sous-espaces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ et $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ sont indépendants de ϕ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{C})$, avec k au moins égal à 1, on définit des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \phi_n}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_n}$ de $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbf{C})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_j'} - i\,\frac{\partial f}{\partial \phi_j''}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_j'} + i\,\frac{\partial f}{\partial \phi_j''}\right)$$

où ϕ_j' et ϕ_j'' désignent les parties réelle et imaginaire de ϕ_j. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions (chap. 0, § 3, lemme 5).

LEMME 2. *Pour toute carte ϕ de X et tout point x du domaine de ϕ, les différentielles des germes $\phi_{1,x}, \ldots, \phi_{n,x}$ (resp. $\overline{\phi}_{1,x}, \ldots, \overline{\phi}_{n,x}$) forment une base de $\Omega_x^{1,0}$ (resp. $\Omega_x^{0,1}$). Pour tout germe f de A_x^1, on a*

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x)\, d\phi_{j,x} + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_j}(x)\, d\overline{\phi}_{j,x} .$$

Soit π la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega_x^{1,0}$ sur X et soient ϕ et ψ des cartes de domaines respectifs U et V dans X. Le lemme 2 montre que les applications

$$\tilde{\phi}' : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$$

définies par

$$\tilde{\phi}'(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)') \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}'(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y)')$$

(on utilise les notations du paragraphe 1) sont des cartes complexes de π.

Ces cartes sont holomorphiquement compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t(D\gamma(\phi(x))')^{-1} = {}^tD\gamma(\phi(x))^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Le fibré vectoriel holomorphe ainsi défini se désigne par $\Omega^{1,0}$. On l'appelle parfois le *fibré cotangent holomorphe à* X.

Soit ρ la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega_x^{0,1}$ sur X. Le lemme 2 montre que les applications

$$\tilde{\phi}'' : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}'' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$$

définies par

$$\tilde{\phi}''(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)'') \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}''(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y)'')$$

sont des cartes complexes de ρ. Ces cartes sont (différentiablement) compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t\overline{D\gamma(\phi(x))}^{-1}$$

Le fibré vectoriel différentiel ainsi défini se désigne par $\Omega^{0,1}$. Notons que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{\mathbf{C}}^1 = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$$

Pour tout couple (p, q) d'entiers, on pose

$$\Omega^{p,q} = \Lambda^p \Omega^{1,0} \oplus \Lambda^q \Omega^{0,1} .$$

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de bidegré* (p, q) si elle prend ses valeurs dans $\Omega^{p,q}$. La restriction à U de toute forme différentielle homogène de bidegré (p, q) s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u \mid_U = \sum_{J \in S_p(n) \quad K \in S_q(n)} u_{J,K}\, d\phi_J \wedge d\overline{\phi}_K$$

où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{j_p} \qquad \text{et} \qquad d\overline{\phi}_K = d\overline{\phi}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\overline{\phi}_{k_q} .$$

Lemme 3. *La différentielle de toute forme de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,q})$ *appartient à*

$$\mathscr{C}^0(X, \Omega^{p+1,q}) \oplus \mathscr{C}^0(X, \Omega^{p,q+1}) .$$

On peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$. L'assertion résulte alors des définitions.

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,q})$, on désigne par $d'u$ (resp. $d''u$) la composante homogène de bidegré $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$) de du. Le lemme suivant est laissé en exercice au lecteur (chap. 0, § 3, théorème 1).

Lemme 4. *Pour qu'une forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,0})$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $d''u$ soit nul.*

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^2(X, \Omega_{\mathrm{C}})$, on a

$$d'(d'u) = 0 \qquad d'(d''u) + d''(d'u) = 0 \qquad d''(d''u) = 0 .$$

Pour tout couple (u, v) de formes différentielles dans $\mathscr{C}^1(X, \Omega_{\mathrm{C}})$, avec u homogène de degré r, on a

$$d'(u \wedge v) = d'u \wedge v + (-1)^r u \wedge d'v$$

et

$$d''(u \wedge v) = d''u \wedge v + (-1)^r u \wedge d''v .$$

En particulier, l'application d'' de $\mathscr{C}^1(X, \Omega_{\mathrm{C}})$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Omega_{\mathrm{C}})$ est $\mathscr{O}(X)$-linéaire.

Soit h une application holomorphe de X dans une variété holomorphe Y de dimension pure m. Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V contenant $h(U)$ dans Y. On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k} d\phi_k$$

et

$$h^*(d\overline{\psi}_j) = d(\overline{\psi}_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\overline{\partial(\psi_j \cdot h)}}{\partial \phi_k} d\overline{\phi}_k$$

pour tout entier j compris entre 1 et m. On en déduit aisément que l'image réciproque par h d'une forme homogène de bidegré (p, q) est une forme homogène de bidegré (p, q) et que l'on a

$$d'h^*(u) = h^*(d'u) \qquad \text{et} \qquad d''h^*(u) = h^*(d''u)$$

pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(Y, \Omega_{\mathrm{C}})$.

Soit π un fibré vectoriel holomorphe de rang pur m sur X et soient Φ et Ψ des cartes de π de domaines respectifs U et V. Pour toute section s de $\mathscr{C}^1(X, \pi \otimes \Omega^{p,q})$, on a

$$s_\Phi = (u_1, \ldots, u_m) \qquad \text{et} \qquad s_\Psi = (v_1, \ldots v_m)$$

où les u_j et les v_j sont des formes différentielles homogènes de bidegré (p, q). Pour tout entier j compris entre 1 et m, on a

$$v_j = \sum_{1 \leq k \leq m} g_{jk} u_k$$

où $(g_{jk})_{1 \leq j,k \leq m}$ désigne la transition de Φ dans Ψ. On en déduit que

$$d''v_j = \sum_{1 \leq k \leq m} g_{jk} d''u_k .$$

Autrement dit, les m-uples $(d''u_1, \ldots, d''u_m)$ et $(d''v_1, \ldots, d''v_m)$ se recollent en une section de $\mathscr{C}^0 (X, \pi \otimes \Omega^{p,q+1})$ que l'on désigne encore par $d''s$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et du lemme 4.

LEMME 5. *Pour qu'une section s de $\mathscr{C}^1 (X, \pi)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $d''s$ soit nul.*

Pour toute section s de $\mathscr{C}^2 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a

$$d''(d''s) = 0 .$$

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1 (X, \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et toute section v de $\mathscr{C}^1 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a

$$d''(u \wedge v) = d''u \wedge v + (-1)^r u \wedge d''v .$$

Pour toute section u de $\mathscr{C}^1 (X, \pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et toute section v de $\mathscr{C}^1 (X, \pi^* \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a

$$d''(u,v) = (d''u, v) + (-1)^r (u, d''v) .$$

On appelle *complexe de Dolbeault de* π la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}^\infty (X, \pi) \xrightarrow{d''0} \mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \xrightarrow{d''1} \ldots \xrightarrow{d''n-1} \mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,n}) \to 0$$

où d''^r désigne la restriction de d'' à $\mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,r})$. On appelle *groupes de cohomologie de* π les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r (X, \pi) = \operatorname{Ker} d''^r / \operatorname{Im} d''^{r-1} .$$

La différentielle d'' diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \to \mathscr{C}^\infty_c (X, \pi) \xrightarrow{d''_c 0} \mathscr{C}^\infty_c (X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \xrightarrow{d''_c 1} \ldots \xrightarrow{d''_c n-1} \mathscr{C}^\infty_c (X, \pi \otimes \Omega^{0,n}) \to 0$$

et des groupes de cohomologie

$$\mathbf{H}^r_c (X, \pi) = \operatorname{Ker} d''^r_c / \operatorname{Im} d''^{r-1}_c .$$

Le noyau de d''^0 s'identifie aux sections holomorphes de π. On a donc

$$\mathbf{H}^0 (X, \pi) = \mathscr{O} (X, \pi)$$

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \pi)$ est nul (principe du prolongement analytique).

On prendra garde de ne pas confondre le groupe de cohomologie de de Rham $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ de la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ (chap. 0, § 4) et le groupe de cohomologie de Dolbeault $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}_X)$ du fibré produit $\mathbf{C}_X$.

§ 3. Fonctions méromorphes

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Lemme 1. *On suppose X connexe et l'on désigne par f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur X. L'ensemble V défini par*

$$V = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$$

est alors connexe et dense dans X.

Il suffit de montrer que tout point x_0 de X possède un voisinage U tel que $V \cap U$ soit connexe et dense dans U.

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et, par un changement linéaire affine de coordonnées, on peut également supposer que x_0 est l'origine et que la fonction partielle $f(0, \ldots, 0, z_n)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0. Désignons par D'' un disque fermé de centre 0 dans $\mathbf{C}$ tel que $f(0, \ldots, 0, z_n)$ soit holomorphe au voisinage de D'' et ne s'annule pas sur $\partial D''$ (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Par continuité, il existe un nombre réel ε strictement positif tel que f soit holomorphe au voisinage de $D' \times D''$ et ne s'annule pas sur $D' \times \partial D''$, en désignant par D' le polydisque de $\mathbf{C}^{n-1}$ défini par

$$D' = \{ (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid \max_{1 \leq j \leq n-1} |z_j| \leqslant \varepsilon \} .$$

L'ensemble $V \cap (D' \times D'')$ est connexe et dense dans $D' \times D''$ comme il résulte aussitôt de la formule

$$V \cap (D' \times D'') = (D' \times \partial D'') \cup \bigcup_{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in D'} \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid f(z_1, \ldots, z_n) \neq 0 \} .$$

Pour tout point x de X, l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes en x de fonctions holomorphes est intègre (§ 1, proposition 1, corollaire 2) et l'ensemble $\mathcal{O}(\pi)_x$