

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.  
**Kapitel:** §1. Fonctions holomorphes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

CHAPITRE PREMIER

VARIÉTÉS HOLOMORPHES

§ 1. FONCTIONS HOLOMORPHES

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Pour toute application  $\mathbf{R}$ -linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$ , on définit deux applications  $u'$  et  $u''$  en posant

$$u'(t) = \frac{1}{2}(u(t) - iu(it)) \quad \text{et} \quad u''(t) = \frac{1}{2}(u(t) + iu(it)).$$

On vérifie aisément que la première est  $\mathbf{C}$ -linéaire et la seconde  $\mathbf{C}$ -antilineaire. On obtient ainsi une décomposition canonique

$$\text{Hom}_{\mathbf{R}}(E, F) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(E, F) \oplus \text{Hom}_{\bar{\mathbf{C}}}(E, F).$$

Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $E$ . On dit qu'une application  $f$  de  $U$  dans  $F$  est *holomorphe* si elle est continûment dérivable et si sa dérivée en tout point est  $\mathbf{C}$ -linéaire. Il revient au même de dire que  $(Df)''$  est nulle ou encore que  $(Df)'$  est égale à  $Df$ . On désigne par  $\mathcal{O}(U, F)$  l'ensemble des applications holomorphes de  $U$  dans  $F$ . Si  $F$  est égal à  $\mathbf{C}$ , on utilise aussi la notation  $\mathcal{O}(U)$ .

Notons que  $\mathcal{O}(U)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{C})$  et  $\mathcal{O}(U, F)$  un sous- $\mathcal{O}(U)$ -module fermé de  $\mathcal{C}^1(U, F)$ .

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition (voir aussi [2], chap. VIII).

LEMME 1. (1) *La composée de deux applications holomorphes est holomorphe.*

(2) *L'application réciproque d'un difféomorphisme holomorphe est holomorphe.*

(3) *Si une fonction holomorphe possède un logarithme, ce logarithme est holomorphe.*

On identifie désormais  $\mathbf{R}^{2n}$  à  $\mathbf{C}^n$  au moyen de l'isomorphisme  $\mathbf{R}$ -linéaire défini par

$$\lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$$

et

$$\lambda^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left( \frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1), \dots, \frac{1}{2}(z_n + \bar{z}_n), \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1), \dots, \frac{1}{2i}(z_n - \bar{z}_n) \right).$$

Les formules suivantes définissent des opérateurs différentiels sur  $\mathbf{C}^n$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{C}^n$  et soit  $f$  une application continûment dérivable de  $U$  dans  $E$ . On vérifie aisément que l'on a

$$(Df(z))'(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) t_j \quad \text{et} \quad (Df(z))''(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) \bar{t}_j$$

pour tout point  $z$  de  $U$  et tout vecteur  $t$  de  $\mathbf{C}^n$ . En particulier, pour que  $f$  soit holomorphe, il faut et il suffit que les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$  soient nulles (conditions de Cauchy-Riemann). Supposons que  $E$  soit l'espace numérique  $\mathbf{C}^m$  et que l'application  $(f_1, \dots, f_m)$  soit holomorphe. La matrice jacobienne de  $f$  est donnée par la formule

$$\text{Jac}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1'}{\partial x_n} & - & \frac{\partial f_1''}{\partial x_1} & \dots & - & \frac{\partial f_1''}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial f_m'}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m'}{\partial x_n} & - & \frac{\partial f_m''}{\partial x_1} & \dots & - & \frac{\partial f_m''}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1''}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1''}{\partial x_n} & & \frac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \dots & & \frac{\partial f_1'}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial f_m''}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m''}{\partial x_n} & & \frac{\partial f_m'}{\partial x_1} & \dots & & \frac{\partial f_m'}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

où  $f'_j$  et  $f''_j$  désignent les parties réelle et imaginaire de  $f_j$ . En particulier, si  $m$  est égal à  $n$ , le jacobien de  $f$  est donné par la formule

$$\text{jac}(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f'_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f'_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f'_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f''_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f''_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f''_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f''_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés des fonctions holomorphes d'une variable.

**THÉORÈME 1 (Cauchy).** *Désignons par  $Y$  une pièce compacte de  $\mathbf{C}$ , par  $U$  un voisinage ouvert de  $Y$  et par  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{C})$ . On a pour tout point  $\zeta$  de  $\overset{\circ}{Y}$ ,*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Y} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2i\pi} \int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}.$$

La fonction  $\frac{1}{z-\zeta}$  appartient à  $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ . On en déduit que

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Y \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}$$

où  $D_\varepsilon$  désigne le disque de centre  $\zeta$  et de rayon  $\varepsilon$ . De plus, la fonction  $\frac{1}{z-\zeta}$  étant holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus \{\zeta\}$ , la formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2) montre que l'on a

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} - \int_{\partial Y} f(z) \frac{dz}{z-\zeta}.$$

On conclut en remarquant que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = 2i\pi f(\zeta).$$

**COROLLAIRE 1.** *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$ . Pour tout point  $\zeta$  de  $U$ , il existe une suite  $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$  de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k (z-\zeta)^k$$

converge uniformément vers  $f$  sur tout disque  $D$  de centre  $\zeta$  relativement compact dans  $U$ . En particulier, la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{C})$  et l'on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\zeta) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{(z-\zeta)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k f}{\partial \bar{z}^k} = 0$$

pour tout entier naturel  $k$ .

Pour tout point  $w$  de  $D$ , la série

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{(w-\zeta)^k}{(z-\zeta)^{k+1}}$$

converge uniformément sur  $\partial D$  vers la fonction  $\frac{1}{z-w}$ . La formule de Cauchy

montre alors que l'on a

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{z-w} = \sum_{k \in \mathbf{N}} (w-\zeta)^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{(z-\zeta)^{k+1}}$$

ce qui démontre l'assertion.

**COROLLAIRE 2** (Principe du prolongement analytique). *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe  $U$  de  $\mathbf{C}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *La fonction  $f$  est identiquement nulle.*
- (2) *Il existe un point de  $U$  où le germe de  $f$  est nul.*
- (3) *Il existe un point de  $U$  où toutes les dérivées de  $f$  sont nulles.*

*En particulier, pour tout point  $z$  de  $\mathbf{C}$ , l'anneau  $\mathcal{O}_z$  des germes au point  $z$  de fonctions holomorphes est intègre.*

**COROLLAIRE 3.** *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe  $U$  de  $\mathbf{C}$ . On suppose que  $f$  n'est pas identiquement nulle. Pour tout point  $\zeta$  de  $U$ , il existe un entier naturel  $k$  et une fonction holomorphe  $g$  sur  $U$  tels que*

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z) \quad \text{et} \quad g(\zeta) \neq 0.$$

*De plus, l'entier  $k$  et la fonction  $g$  sont uniquement déterminés par ces conditions. En particulier, pour tout point  $z$  de  $\mathbf{C}$ , l'anneau  $\mathcal{O}_z$  est un anneau de valuation discrète <sup>1)</sup>.*

<sup>1)</sup> Ceci signifie que  $\mathcal{O}_z$  est principal et qu'il possède un unique idéal premier non nul.

COROLLAIRE 4 (Weierstrass). Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{C}$ . Les topologies induites sur  $\mathcal{O}(U)$  par  $L_{\text{loc}}^1(U, \mathbf{C})$  et  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{C})$  coïncident.

Soit  $K$  un ensemble compact de  $U$  et soit  $\alpha$  une fonction de  $\mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbf{R})$  égale à 1 au voisinage de  $K$ . Pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$ , tout entier naturel  $k$  et tout point  $\zeta$  de  $\overset{\circ}{K}$ , la formule de Cauchy appliquée à la fonction  $\alpha f$  montre que l'on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \zeta}$$

et

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\zeta) = \frac{(-1)^k k!}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(z - \zeta)^{k+1}}.$$

Comme  $\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}$  est nulle au voisinage de  $K$ , on en déduit qu'il existe une constante  $c_{\alpha, k}$  telle que

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial z^k} \right\|_K \leq c_{\alpha, k} \|f\|_{L^1, \text{supp}(\alpha)}.$$

L'assertion en découle aussitôt.

COROLLAIRE 5 (Liouville). Toute fonction holomorphe bornée sur  $\mathbf{C}$  est constante.

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C}$ . Pour tout entier naturel  $k$  et tout nombre réel  $r$ , on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial D_r} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \right| \leq \frac{k! \|f\|_{D_r}}{r^k}.$$

Si  $f$  est bornée et  $k$  strictement positif, ceci implique que  $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)$  est nul, d'où l'assertion.

COROLLAIRE 6 (Laurent). Soient  $r, r_1$  et  $r_2$  des nombres réels vérifiant les conditions

$$0 \leq r_1 < r \leq r_2.$$

On désigne par  $C$  la couronne définie par

$$C = \{z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$$

et par  $D$  le disque de centre 0 et de rayon  $r$ . Pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $C$ , il existe une suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de nombres complexes telle que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

converge uniformément vers  $f$  sur toute partie compacte de  $C$ . On a pour tout entier relatif  $k$ ,

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} \quad \text{et} \quad |a_k| \leq \frac{\|f\|_{\partial D}}{r^k}.$$

Pour tout entier  $k$ , la forme différentielle  $f(z) \frac{dz}{z^{k+1}}$  est fermée. On en déduit que son intégrale sur  $\partial D$  est indépendante de  $r$ .

Introduisons deux nombres réels  $\rho_1$  et  $\rho_2$  vérifiant les relations

$$r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$$

et désignons par  $K$  la couronne définie par

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2\}.$$

Il résulte de la formule de Cauchy que l'on a pour tout point  $\zeta$  de  $\overset{\circ}{K}$ ,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} f(z) \frac{dz}{z - \zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_2} f(z) \frac{dz}{z - \zeta} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z) \frac{dz}{z - \zeta}$$

où  $D_1$  et  $D_2$  désignent les disques de centre 0 et de rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  respectivement. Les séries

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} \quad \text{et} \quad - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$$

convergent uniformément vers la fonction  $\frac{1}{z - \zeta}$  sur  $\partial D_2$  et  $\partial D_1$  respectivement. On a par conséquent

$$f(\zeta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \zeta^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_2} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \zeta^{-(k+1)} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z) \frac{dz}{z^{-k}}$$

ce qui démontre l'assertion.

**COROLLAIRE 7 (Weierstrass).** Soit  $D$  un disque de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{C}$  et soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $D \setminus \{0\}$ . On désigne par

$(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  les coefficients du développement de Laurent de  $f$  à l'origine et par  $N$  l'ensemble

$$N = \{k \in \mathbf{Z} \mid k < 0 \text{ et } a_k \neq 0\}.$$

(1) Pour que  $N$  soit vide, il faut et il suffit que  $f$  soit bornée au voisinage de l'origine. La fonction  $f$  se prolonge alors en une fonction holomorphe sur  $D$ .

(2) Pour que  $N$  soit fini et non vide, il faut et il suffit que la fonction  $\frac{1}{f}$  soit bornée au voisinage de l'origine.

(3) Pour que  $N$  soit infini, il faut et il suffit que l'image de  $D$  soit dense dans  $\mathbf{C}$ .

Pour tout nombre réel  $\rho$  strictement compris entre 0 et  $r$ , on a

$$|a_k| \leq \rho^{-k} \sup_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

La première assertion en résulte aussitôt.

Supposons  $N$  fini et non vide et désignons par  $k_0$  sa borne inférieure. La fonction  $g$  définie par

$$g(z) = z^{-k_0} f(z)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur  $D$  ne s'annulant pas à l'origine, ce qui démontre la deuxième assertion.

Supposons  $N$  infini et montrons par l'absurde que l'image de  $f$  est dense. En effet, s'il existe un disque fermé de centre  $\zeta$  dans  $\mathbf{C}$  ne rencontrant pas  $f(D)$ , la fonction  $g$  définie sur  $D \setminus \{0\}$  par

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \zeta}$$

demeure bornée au voisinage de l'origine ce qui est absurde en vertu de ce qui précède.

Soit  $r = (r_1, \dots, r_n)$  un élément de  $(\mathbf{R}_+^*)^n$  et soit  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  un point de  $\mathbf{C}^n$ . On appelle *polydisque de centre  $\zeta$  et de rayon  $r$*  l'ensemble défini par

$$D(\zeta, r) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_j - \zeta_j| < r_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}.$$

On appelle *bord distingué du polydisque  $D(\zeta, r)$*  l'ensemble

$$\partial_0 D(\zeta, r) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_j - \zeta_j| = r_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}.$$

PROPOSITION 1 (Cauchy). Soit  $f$  une fonction holomorphe au voisinage de l'adhérence d'un polydisque  $D$  de  $\mathbf{C}^n$ . Pour tout point  $\zeta$  de  $D$ , on a

$$f(\zeta) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\partial_0 D} f(z) \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)}.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du théorème de Fubini.

COROLLAIRE 1. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}^n$ . Pour tout point  $\zeta$  de  $U$ , il existe une famille  $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$  de nombres complexes telle que la série

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_\alpha (z - \zeta)^{\alpha - 1}$$

converge uniformément vers  $f$  sur tout polydisque  $D$  de centre  $\zeta$  relativement compact dans  $U$ . En particulier, la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{C})$  et l'on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(\zeta) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(z) \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{(z_1 - \zeta_1)^{\alpha_1 + 1} \dots (z_n - \zeta_n)^{\alpha_n + 1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \bar{z}^\alpha} = 0.$$

pour tout multi-indice  $\alpha$ .

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1 du théorème 1.

COROLLAIRE 2 (Principe du prolongement analytique). Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe  $U$  de  $\mathbf{C}^n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) La fonction  $f$  est identiquement nulle.
- (2) Il existe un point de  $U$  où le germe de  $f$  est nul.
- (3) Il existe un point de  $U$  où toutes les dérivées de  $f$  sont nulles.

En particulier, pour tout point  $z$  de  $\mathbf{C}^n$ , l'anneau  $\mathcal{O}_z$  des germes au point  $z$  de fonctions holomorphes est intègre.

COROLLAIRE 3 (Weierstrass). Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{C}^n$ . Les topologies induites sur  $\mathcal{O}(U)$  par  $L_{\text{loc}}^1(U, \mathbf{C})$  et  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{C})$  coïncident.

<sup>1)</sup> Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et tout point  $z = (z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathbf{C}^n$ , on pose

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n & \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_n! & z^\alpha &= z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} & \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}^\alpha} &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}_1^{\alpha_1} \dots \partial \bar{z}_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

Une utilisation répétée de l'argument développé au corollaire 4 du théorème 1 montre qu'il existe pour tout polydisque  $D$  relativement compact dans  $U$  et pour tout multi-indice  $\alpha$  une constante  $c_{\alpha,D}$  telle que

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} \right\|_D \leq c_{\alpha,D} \|f\|_{L^1,K}$$

où  $K$  est un voisinage compact de l'adhérence de  $D$  dans  $U$ . L'assertion en résulte aussitôt.

## § 2. VARIÉTÉS HOLOMORPHES

Toutes les cartes de variétés topologiques considérées désormais prennent leurs valeurs dans des espaces numériques complexes.

Soit  $X$  une variété topologique.

On dit que deux cartes de  $X$  sont *holomorphiquement compatibles* si les changements de cartes sont holomorphes.

On appelle *atlas holomorphe de  $X$*  tout ensemble de cartes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent  $X$ . On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures holomorphes de  $X$* .

On appelle *variété holomorphe* toute variété topologique munie d'une structure holomorphe.

Soit  $X$  une variété holomorphe.

On appelle (abusivement) *atlas de  $X$*  tout atlas holomorphe appartenant à la structure holomorphe de  $X$  et *carte de  $X$*  toute carte appartenant à un atlas de  $X$ .

Soit  $x$  un point de  $X$ . Toutes les cartes de  $X$  dont le domaine contient  $x$  prennent leurs valeurs dans le même espace numérique complexe. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de  $X$  au point  $x$*  et se désigne par  $\dim_x(X)$ . La fonction  $\dim(X)$  est localement constante. On dit que  $X$  est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe holomorphe* (resp. *surface holomorphe*) toute variété holomorphe de dimension pure 1 (resp. 2).

Les changements de cartes étant en particulier des difféomorphismes, la variété topologique  $X$  se trouve naturellement munie d'une structure différentielle que l'on dit *sous-jacente à  $X$* . Pour éviter des confusions, on