Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: § 4. Calcul intégral

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

On pose alors

$$l(u)(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_j} \left(i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_{j-1}, t) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(t)\right) dt\,.$$

Il est clair que l est une application linéaire de A_{j-1} dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ qui commute avec l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et $j-1$. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(l(u))(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_j) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(x_j)$$
$$l(d_{j-1}u)(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_1)(x_1, \ldots, x_j)\,.$$

On pose finalement

$$k_{j-1}(u) = k_j(u_1) - dx_j \wedge k_j(u_2) + l(u)\,\omega_j$$

et l'on vérifie aisément l'assertion.

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n) \xrightarrow{i} \mathbf{R} \to 0$$

est exacte pour tout cube ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.

Toutes les constructions et les résultats de ce paragraphe demeurent valables si l'on utilise les germes de fonctions à valeurs complexes. On obtient alors le *fibré cotangent complexe à* X désigné par $\Omega_{\mathbf{C}}^1$. Pour tout point x de X et toute carte ϕ dont le domaine contient x, l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ identifie $\Omega_{\mathbf{C},x}^1$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (lemme 1). On désigne de même par $\Omega_{\mathbf{C}}^r$ et $\Omega_{\mathbf{C}}$ les fibrés vectoriels $\Lambda^r\Omega_{\mathbf{C}}^1$ et $\Lambda\Omega_{\mathbf{C}}^1$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega_{\mathbf{C}}^r = \Omega^r \otimes \mathbf{C}_X \qquad \text{et} \qquad \Omega_{\mathbf{C}} = \Omega \otimes \mathbf{C}_X\,.$$

§ 4. Calcul intégral

Lemme 1. *Pour qu'une variété différentielle* X *de dimension pure* n *soit orientable, il faut et il suffit que le fibré* Ω^n *soit trivial.*

Désignons par $(\phi_\iota)_{\iota\in I}$ un atlas orienté de X et par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota\in I}$ formé des domaines de cartes de cet atlas. On définit une forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ en posant

$$u = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \, d\phi_{\iota,1} \wedge \dots \wedge d\phi_{\iota,n} .$$

Pour tout indice κ, on a

$$u \mid_{U_\kappa} = \Big(\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota g_{\iota\kappa}\Big) d\phi_{\kappa,1} \wedge \dots \wedge d\phi_{\kappa,n}$$

où $g_{\iota\kappa}$ désigne le jacobien du changement de cartes de ϕ_κ dans ϕ_ι. Ceci montre que u ne s'annule jamais et par conséquent la condition est nécessaire.

Réciproquement, soit u une forme différentielle partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, il existe une fonction g partout non nulle dans $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ telle que

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n .$$

Quitte à remplacer ϕ_1 par $-\phi_1$, on peut supposer que g est strictement positive. Un atlas formé de telles cartes est évidemment orienté.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés différentielles considérées dans ce paragraphe sont orientées.

Soit X une variété différentielle (orientée) de dimension pure n.

On dit qu'une forme différentielle u homogène de degré n est *positive* si pour toute carte orientée ϕ de domaine U dans X, l'unique fonction g définie sur U par

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n$$

est à valeurs réelles positives.

Désignons par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_{\mathbf{C}})$, par ϕ et ψ des cartes orientées de domaines respectifs U et V dans X. On suppose que le support de u est contenu dans $U \cap V$. On peut écrire

$$u \mid_U = f d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n \qquad \text{et} \qquad u \mid_V = g \, d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n$$

où f et g sont des fonctions continues à valeurs complexes. On a les formules

$$f_\phi = \operatorname{jac}(\gamma) \, g_\phi \qquad \text{et} \qquad g_\psi = g_\phi \cdot \gamma^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Puisque le jacobien de γ est positif, la formule du changement de variables dans les intégrales multiples montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} g_\psi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} (g_\phi \cdot \gamma^{-1}) \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} |\operatorname{jac}(\gamma)| \, g_\phi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu$$

en désignant par μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. On pose alors

$$\int_X u = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu .$$

Ce nombre est indépendant de la carte orientée ϕ dont le domaine contient le support de u.

Dans le cas général où le support de u n'est contenu dans aucun domaine de carte, on désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ (resp. $(V_\kappa)_{\kappa\in K}$) un recouvrement de X par de tels domaines et par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ (resp. $(\beta_\kappa)_{\kappa\in K}$) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. La famille $(\alpha_\iota\beta_\kappa)$ est une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota \cap V_\kappa)$ et l'on a

$$\sum_{\iota\in I} \int_X \alpha_\iota u = \sum_{(\iota,\kappa)\in I\times K} \int_X \alpha_\iota\beta_\kappa u = \sum_{\kappa\in K} \int_X \beta_\kappa u .$$

On appelle *intégrale de* u *sur* X le nombre complexe défini par

$$\int_X u = \sum_{\iota\in I} \int_X \alpha_\iota u .$$

On notera que la forme linéaire canonique i ainsi obtenue sur $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_{\mathbf{C}})$ est réelle sur les formes différentielles réelles, positive sur les formes différentielles positives.

Munissons le fibré cotangent Ω^1 d'une métrique hermitienne (§ 2, lemme 3). Les fibrés vectoriels Ω et $\Omega_{\mathbf{C}}$ sont alors naturellement munis d'une métrique hermitienne (si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormale de Ω^1_x les vecteurs

$$e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}$$

où J parcourt $S_r(n)$ forment une base orthonormale de Ω^r_x et $\Omega^r{}_{\mathbf{C},x}$). On vérifie aisément que l'on a

$$|u \wedge v| \leqslant |u| \; |v|$$

quelles que soient les formes différentielles u et v.

Soient ϕ et ψ deux cartes orientées de X. Sur l'intersection de leurs domaines, on a la relation

$$\begin{aligned} &|d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n|^{-1} d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \\ &= |d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n|^{-1} d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n . \end{aligned}$$

La forme différentielle ω obtenue par recollement est positive, partout non nulle; on l'appelle la *forme volume associée à la métrique hermitienne de* Ω^1. En particulier, la forme volume fournit une trivialisation de Ω^n.

La forme linéaire définie sur $\mathscr{C}_c^0(X, \mathbf{C})$ par

$$\mu(f) = \int_X f\omega$$

est réelle positive. Le théorème de Riesz ([5], théorèmes (2.14) et (2.17)) montre qu'elle correspond à une unique mesure borélienne régulière que l'on désigne encore par μ.

La tribu des ensembles μ-mesurables de X ne dépend pas de la structure hermitienne de Ω^1: une partie de X est μ-mesurable si et seulement si son image par toute carte de X est Lebesgue-mesurable.

Pour toute partie mesurable A de X, toute fonction mesurable f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ ou toute fonction intégrable à valeurs dans $\mathbf{C}$, on pose

$$\int_A f\omega = \mu(\chi_A f)$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de A.

Soit π un fibré vectoriel complexe de rang pur m sur X, muni d'une métrique hermitienne. Pour tout ensemble mesurable A de X toute section mesurable s de π et tout nombre réel p au moins égal à 1, on pose

$$\| s \|_{L^p, A} = \left(\int_A | s |^p \omega\right)^{1/p}$$
$$\| s \|_{L^\infty, A} = \inf\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \mu(| s |^{-1}(]t, \infty[) \cap A) = 0\}.$$

Ce nombre dépend des structures hermitiennes de Ω^1 et de π.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, on désigne par $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de sections mesurables s de π telles que $\| s \|_{L^p, K}$ soit fini pour tout ensemble compact K de X. C'est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet pour la famille de semi-normes $\| \ \|_{L^p, K}$; c'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour qu'une section s appartienne à $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$, il faut et il suffit que l'application $(s_\Phi)_\phi$ appartienne à $L^p_{\text{loc}}(\phi(U), \mathbf{C}^m)$ pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine U. Ceci montre en particulier que l'espace vectoriel topologique $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$ est indépendant des structures hermitiennes de Ω^1 et π.

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $L^p_K(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$ dont le support [1]) est contenu dans K. C'est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert si p est égal à 2) pour la norme $\| \ \|_{L^p, K}$.

---

[1]) On appelle *support d'une section mesurable* le plus petit ensemble en dehors duquel elle est presque partout nulle.

On désigne enfin par $L_c^p(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L_{\mathrm{loc}}^p(X, \pi)$ à support compact. C'est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $L_K^p(X, \pi)$.

Notons que les inclusions canoniques

$$L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(X, \pi) \subset L_{\mathrm{loc}}^{q}(X, \pi) \subset L_{\mathrm{loc}}^{p}(X, \pi) \subset L_{\mathrm{loc}}^{1}(X, \pi)$$
$$L_c^{\infty}(X, \pi) \subset L_c^{q}(X, \pi) \subset L_c^{p}(X, \pi) \subset L_c^{1}(X, \pi)$$

sont continues pour tout nombre réel q au moins égal à p.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X est dense dans $L_c^p(X, \mathbf{C})$ et $L_{\mathrm{loc}}^p(X, \mathbf{C})$ (*loc. cit.* théorème (3.13)).

Pour tout élément p de $[1, \infty[$, l'ensemble $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ est dense dans $L_c^p(X, \pi)$ et $L_{\mathrm{loc}}^p(X, \pi)$ (*loc. cit.* théorème (3.14)). Notons que $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ est fermé dans $I_c^{\infty}(X, \pi)$ et que son adhérence dans $L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(X, \pi)$ est égale à $\mathscr{C}^0(X, \pi)$.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels complexes sur X et soit δ une dualité de $\pi \otimes \rho$ dans $\mathbf{C}_X$. On suppose π et ρ munis de métriques hermitiennes vérifiant la condition

$$|\delta_x(y' \otimes y'')| \leqslant |y'|\ |y''|$$

pour tout point x de X et tout point y' (resp. y'') de π_x (resp. ρ_x).

Soient p et q deux éléments conjugués de $[1, \infty]$ (i.e. tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et soit K une partie compacte de X. Pour toute section u de $L_K^p(X, \pi)$ et toute section v de $L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho)$, l'inégalité de Hölder (*loc. cit.* théorème (3.8)) montre que l'on a

$$\left| \int_X \delta(u, v)\, \omega \right| \leqslant \| u \|_{L^p, K} \| v \|_{L^q, K} .$$

En particulier, la forme bilinéaire

$$\Delta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X \delta(u, v)\, \omega$$

est séparément continue (et même hypocontinue).

LEMME 2. *La forme bilinéaire*

$$\Delta : \mathscr{C}_c^0(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^1(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est non dégénérée.

Il suffit de montrer que toute section v de $L_{\mathrm{loc}}^1(X, \rho)$ rendant la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ nulle est elle-même identiquement nulle. La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, que π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et que la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y_j' y_j''.$$

On se ramène immédiatement au cas où m est égal à 1. Pour tout ensemble compact K de X et pour tout voisinage compact L de K dans X, il existe une fonction u continue sur X dont le support est contenu dans L et égale à 1 sur K. On en déduit que

$$|\Delta(\chi_K, v)| = |\Delta(\chi_K - u, v)| \leqslant \mu(L \backslash K) \| v \|_{L^1, L}$$

et par conséquent la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ est nulle sur l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X. Par densité et continuité, elle est donc nulle sur $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$.

Pour toute partie compacte K de X, on définit alors une fonction u de $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$ en posant

$$\begin{cases} u(x) = \overline{v(x)}\ |v(x)|^{-1} & \text{si } x \in K \text{ et si } v(x) \neq 0 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou si } v(x) = 0 . \end{cases}$$

Il résulte de cette définition et de ce qui précède que l'on a

$$\| v \|_{L^1, K} = \Delta(u, v) = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

THÉORÈME 1. *Pour tout couple* (p, q) *d'éléments conjugués de* $]1, \infty[$, *la forme bilinéaire*

$$\Delta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques [1]).

Il résulte du lemme 2 que les applications Δ_1 et Δ_2 induites par Δ sont injectives. Pour montrer qu'elles sont surjectives, nous allons tout d'abord examiner le cas où π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et où la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y_j' y_j''.$$

---

[1]) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques. On dit qu'une forme bilinéaire Δ sur $E \times F$ est une *dualité d'espaces vectoriels topologiques* si elle est séparément continue et si elle induit une bijection Δ_1 (resp. Δ_2) de E (resp. F) sur le dual topologique de F (resp. E).

Toute forme linéaire continue α sur $L^q_{\text{loc}}(X, \rho)$ s'écrit

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^q_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Par définition de la topologie de $L^q_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$, il existe une partie compacte K de X et une constante c telles que

$$|\alpha_j(w)| \leqslant c \| w \|_{L^q, K}$$

pour tout w dans $L^q_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il existe donc une fonction u_j de $L^p_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\alpha_j(w) = \alpha_j(\chi_K w) = \mu(u_j w)$$

(*loc. cit.* théorème (6.16)) et si l'on pose

$$u = (u_1, \ldots, u_m)$$

on voit que l'on a

$$\varDelta(u, v) = \sum_{1 \leq j \leq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leq j \leq m} \alpha_j(v_j) = \alpha(v)$$

ce qui montre la surjectivité de $\varDelta_1$.

De même, toute forme linéaire continue β sur $L^p_c(X, \pi)$ s'écrit

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^p_c(X, \mathbf{C})$. Pour tout ensemble compact K de X, la restriction de β_j à $L^p_K(X, \mathbf{C})$ est continue et l'on voit qu'il existe une fonction $v_{K,j}$ et une seule dans $L^q_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\beta_j(w) = \mu(w\, v_{K,j})$$

pour tout w dans $L^p_K(X, \mathbf{C})$. Ces fonctions se recollent en une fonction v_j de $L^q_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et si l'on pose

$$v = (v_1, \ldots, v_m),$$

on voit que l'on a

$$\varDelta(u, v) = \sum_{1 \leq j \leq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j(u_j) = \beta(u)$$

ce qui montre la surjectivité de $\varDelta_2$.

Démontrons maintenant le cas général. Si α est une forme linéaire continue sur $L^q_{\text{loc}}(X, \rho)$, on voit comme précédemment qu'il existe un ensemble compact K de X tel que

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v)$$

pour tout v dans $L^q_{\text{loc}}(X, \rho)$. Il existe aussi un recouvrement fini $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de K par des domaines de cartes de ρ (ou de π) et pour chaque indice ι une fonction λ_ι de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ dont le support est contenu dans U_ι telle que

$$\sum_{\iota\in I} \lambda_\iota(x) = 1$$

pour tout point x de K. D'après la première partie de la démonstration, il existe une section u_ι de $L^p_c(U_\iota, \pi)$ telle que

$$\alpha(\lambda_\iota v) = \Delta(u_\iota, v).$$

La somme des u_ι est une section u de $L^p_c(X, \pi)$ et l'on a

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v) = \sum_{\iota\in I} \alpha(\lambda_\iota v) = \sum_{\iota\in I} \Delta(u_\iota, v) = \Delta(u, v).$$

L'assertion relative à Δ_2 est laissée en exercice au lecteur.

Exemple 1.

Soit π un fibré vectoriel complexe sur X et soit r un entier naturel. On définit une dualité canonique

$$\theta : (\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \otimes (\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \Omega^n_{\mathbf{C}}$$

en posant

$$\theta((y' \otimes t') \otimes (y'' \otimes t'')) = \langle y', y'' \rangle \; t' \wedge t''$$

pour tout point x de X et tout élément $y' \otimes t'$ (resp. $y'' \otimes t''$) de $\pi_x \otimes \Omega^r_{\mathbf{C},x}$ (resp. $\pi^*_x \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C},x}$). Pour toute section u de $\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}$ et toute section v de $\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}$, on pose

$$(u, v) = \theta(u, v).$$

On désigne par δ la dualité obtenue en composant θ avec la trivialisation de la forme volume. Il résulte immédiatement de ces définitions que l'on a

$$(u, v) = \delta(u, v)\, \omega.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : L^p_c(X, \pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \times L^q_{\text{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v)$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $]1, \infty[$.

Remarque 1.

Nous n'utiliserons le théorème 1 que dans le cas particulier où p et q sont tous deux égaux à 2. Le résultat d'intégration nécessaire à la démonstration est alors beaucoup plus simple (*loc. cit.* théorème (4.12)).

Remarque 2.

On montre de la même manière que la forme bilinéaire Δ induit des bijections de $L^\infty_{\text{loc}}(X, \rho)$ sur le dual topologique de $L^1_c(X, \pi)$ et de $L^\infty_c(X, \pi)$ sur le dual topologique de $L^1_{\text{loc}}(X, \rho)$ (*loc. cit.* théorème (6.16)).

Remarque 3.

Il résulte de l'hypocontinuité de la forme bilinéaire Δ que les bijections Δ_1 et Δ_2 sont continues (pour la topologie forte) et du théorème du graphe fermé que ce sont des isomorphismes.

On dit qu'une partie Y de X est une *pièce* si elle vérifie la condition suivante:

(P) Pour tout point x de X, il existe une carte ϕ de X dont le domaine U contient x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_1 \leqslant 0\}.$$

Ceci implique en particulier que Y est fermée et que ∂Y est une sous-variété de X. Nous allons munir ∂Y d'une orientation naturelle que l'on dit *induite par* X. Tout d'abord, si n est égal à 1, le bord de Y est de dimension 0. On munit tout point x de ∂Y de l'orientation 1 (resp. -1) (§ 1, remarque 2) s'il existe une carte orientée ϕ de domaine U centrée en x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \leqslant 0\}$$
$$(\text{resp. } \phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \geqslant 0\}).$$

Supposons n au moins égal à 2. Quitte à remplacer ϕ_n par $-\phi_n$, on peut supposer que les cartes qui vérifient la condition (P) sont orientées. Leurs restrictions à ∂Y forment alors un atlas orienté dont la classe est par définition l'orientation induite.

THÉORÈME 2 (Stokes). *Pour toute pièce Y de X et toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-1}_{\mathbf{C}})$, on a*

$$\int_{\partial Y} \imath^*(u) = \int_Y du$$

où $\imath$ désigne l'injection canonique de ∂Y dans X.

On se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et où Y est de la forme

$$Y = \{(x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_1 \leqslant 0\}.$$

Par linéarité, on peut supposer que u est donnée par

$$u = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^1_c(X, \mathbf{R})$. On a

$$du = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Supposons tout d'abord j égal à 1. On a par définition

$$\iota^*(u) = (f \cdot \iota)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et par conséquent

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

Supposons j strictement supérieur à 1. On a alors

$$\iota^*(u) = 0$$

et d'autre part

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{x_1 \leqslant 0} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Soient* u *et* v *deux formes différentielles de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega^r_{\mathbf{C}})$ *et* $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-r-1}_{\mathbf{C}})$ *respectivement. Pour toute pièce* Y *de* X, *on a*

$$\int_Y du \wedge v = \int_{\partial Y} \iota^*(u \wedge v) + (-1)^{r+1} \int_Y u \wedge dv$$

En particulier, on a

$$\int_X du \wedge v = (-1)^{r+1} \int_X u \wedge dv .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et de la formule

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

On appelle *complexe de de Rham de* X la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^{\infty}(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^{\infty}(X, \Omega^1) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{C}^{\infty}(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

où d^r désigne la restriction de la différentielle d aux formes homogènes de degré r. On appelle *groupes de cohomologie de* X les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{Im} d^{r-1}.$$

La différentielle diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_c^{\infty}(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d_c^0} \mathscr{C}_c^{\infty}(X, \Omega^1) \xrightarrow{d_c^1} \dots \xrightarrow{d_c^{n-1}} \mathscr{C}_c^{\infty}(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

et des groupes de cohomologie correspondants

$$\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d_c^r / \operatorname{Im} d_c^{r-1}.$$

Le noyau de d^0 s'identifie aux fonctions localement constantes sur X. Si X est connexe, on a donc

$$\mathbf{H}^0(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \mathbf{R})$ est nul.

La formule de Stokes montre que l'intégration des formes différentielles de degré n induit par passage au quotient une forme linéaire canonique i sur $\mathbf{H}_c^n(X, \mathbf{R})$.

THÉORÈME 3. *Si X est connexe, la forme linéaire i est un isomorphisme. Si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^n(X, \mathbf{R})$ est nul.*

Si X est un cube de $\mathbf{R}^n$, l'assertion résulte du lemme de Poincaré (§ 3, propositions 1 et 2).

Passons au cas général. Désignons par U_0 un domaine de carte isomorphe à un cube. Nous allons montrer qu'il existe pour toute forme u de $\mathscr{C}_c^{\infty}(X, \Omega^n)$ des formes u_0 et v de $\mathscr{C}_c^{\infty}(U_0, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^{\infty}(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u = u_0 + dv$$

ce qui établira la première assertion.

Par partition de l'unité, on voit aisément que l'on peut supposer le support de u contenu dans un domaine de carte isomorphe à un cube. On construit alors une suite $U_1, \dots, U_k$ de tels domaines vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et k, l'ensemble $U_j \cap U_{j-1}$ est non vide.

(2) Le support de u est contenu dans U_k.

Par récurrence descendante sur l'entier j, le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 2) montre qu'il existe des formes u_{j-1} et v_{j-1} de $\mathscr{C}_c^\infty(U_{j-1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u_k = u \quad \text{et} \quad u_j = u_{j-1} + dv_{j-1} .$$

Il suffit alors de prendre pour v la somme des v_j.

Supposons X ouverte et montrons que toute forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ est exacte. Désignons par $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X (avec K_0 vide pour fixer les idées) telles que $X \backslash K_j$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6) et par $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement

$$(\mathring{K}_{j+2} \backslash K_j)_{j\in\mathbf{N}} .$$

La première partie du théorème montre qu'il existe des formes u_0 et v_0 de $\mathscr{C}_c^\infty(X \backslash K_1, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_0 u = u_0 + dv_0 .$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit alors par récurrence des formes u_j et v_j de $\mathscr{C}_c^\infty(X \backslash K_{j+1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X \backslash K_j, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_j u + u_{j-1} = u_j + dv_j .$$

En effet, la restriction de $\alpha_j u + u_{j-1}$ à une composante connexe V de $X \backslash K_j$ est une forme différentielle de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$ et puisque $V \backslash K_{j+1}$ est non vide, l'assertion résulte de la première partie du théorème.

La famille des supports des v_j étant localement finie, la somme

$$v = \sum_{j\in\mathbf{N}} v_j$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{n-1})$. On a alors

$$dv = \sum_{j\in\mathbf{N}} dv_j = \alpha_0 u - u_0 + \sum_{j\geq 1} (\alpha_j u + u_{j-1} - u_j) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \alpha_j u = u ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 4. *Soient X et Y deux variétés différentielles (orientées) de dimension pure n et soit h une application indéfiniment dérivable de X*

dans Y. *On suppose que* Y *est connexe et* h *propre* [1]. *Il existe alors un entier relatif* ν *tel que*

$$\int_X h^*(u) = \nu \int_Y u$$

pour toute forme différentielle u *de* $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$.

La forme linéaire λ définie sur $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$ par

$$\lambda(u) = \int_X h^*(u)$$

induit par passage au quotient une forme linéaire sur $\mathbf{H}_c^n(Y, \mathbf{R})$. Il résulte du théorème 3 que cette forme linéaire est proportionnelle à i. Tout revient à montrer que le facteur de proportionnalité est un entier.

Désignons par y une valeur régulière de h (§ 1, théorème 2), par ψ une carte orientée de centre y et de domaine V dans Y et par $x_1, \ldots, x_p$ les points de $h^{-1}(y)$. Si V est suffisamment petit, l'application h induit pour tout entier j compris entre 1 et p un isomorphisme h_j de U_j sur V, où U_j désigne la composante connexe de x_j dans $h^{-1}(V)$ (§ 1, théorème 1). Posons

$$\begin{cases} \varepsilon(j) = 1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ est une carte orientée de } X \\ \varepsilon(j) = -1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ n'est pas une carte orientée de } X. \end{cases}$$

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$, on a

$$\int_X h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \int_{U_j} h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \varepsilon(j) \int_Y u$$

ce qui démontre l'assertion.

L'entier ν du théorème 4 s'appelle le *degré de* u et se désigne par deg (u).

Remarque 4.

La considération des formes différentielles complexes sur X permet d'introduire des groupes de cohomologie $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ et $\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C})$. On notera que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}\,.$$

Soit X une variété différentielle et soit $g = (g_\kappa)$ un cocycle complexe de rang 1 subordonné à un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ de X. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $u_{\kappa\iota}$ la forme différentielle

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dg_{\kappa\iota}}{g_{\kappa\iota}}.$$

[1] Ceci signifie que l'image réciproque par h de toute partie compacte de Y est une partie compacte de X.

Il existe pour tout indice ι une forme u_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ telle que

$$u_{\kappa\iota} = u_\iota - u_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$ (§ 2, lemme 1). En particulier, puisque $u_{\kappa\iota}$ est fermée, les différentielles du_ι se recollent en une forme fermée v homogène de degré 2.

Montrons que la classe de v dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ ne dépend que de g. En effet, si l'on a

$$u_{\kappa\iota} = u'_\iota - u'_\kappa$$

pour certaines formes u'_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, les formes du'_ι se recollent en une forme v' de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$, les $u'_\iota - u_\iota$ en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$v' = v + du$$

ce qui démontre l'assertion.

La classe de $-v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ s'appelle la *classe de Chern de* g et se désigne par ch (g).

LEMME 3. *Pour tout recouvrement ouvert* $\mathscr{U}$ *de* X, *la classe de Chern induit un homomorphisme de* Pic $(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*)$ *dans* $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. *Si* $\mathscr{V}$ *est un recouvrement ouvert de* X *plus fin que* $\mathscr{U}$, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\operatorname{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*) \arrow[rr, "\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}"'] & & \operatorname{Pic}(\mathscr{V}, \mathbf{C}^*) \arrow[dl, "\mathrm{ch}"] \\
& \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Par passage à la limite inductive, on obtient donc un homomorphisme canonique ch de Pic $(X, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. On appelle *classe de Chern d'un fibré en droites complexes* π *sur* X et l'on désigne par ch (π) la classe de Chern du fibré principal associé à π (§ 2, scholie).

§ 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une surface différentielle connexe et orientée.

Désignons par γ une application indéfiniment dérivable définie sur un ensemble ouvert W de $\mathbf{R}$ à valeurs dans X, et par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Il est clair que la restriction de $\gamma^*(u)$ à tout intervalle fermé de W ne dépend que de la restriction de γ à cet intervalle.