Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: Chapitre 0 VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE 0

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. DÉFINITIONS

On dit qu'un espace topologique est une *variété topologique* s'il est séparé et si tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ensemble ouvert d'un espace numérique.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et de quelques résultats classiques de topologie générale (que l'on trouve dans [1], chap. I, par exemple).

LEMME 1. *Toute variété topologique est un espace localement connexe, localement compact et localement de type dénombrable. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Elle est paracompacte.

(2) Chacune de ses composantes connexes est de type dénombrable.

(3) Chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés considérées sont paracompactes.

Soit X une variété topologique.

On appelle *carte de* X tout homéomorphisme ϕ d'un ensemble ouvert U de X (appelé le *domaine de* ϕ) sur un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soient x un point de U et r un nombre réel strictement positif. On appelle *boule de centre* x *et de rayon* r *dans* ϕ l'image réciproque de la boule $B(\phi(x), r)$ de centre $\phi(x)$ et de rayon r dans $\mathbf{R}^n$. On dit que ϕ est *centrée au point* x si $\phi(x)$ est l'origine.

Soient ϕ et ψ deux cartes de X de domaines respectifs U et V. On appelle *changement de cartes de* ϕ *dans* ψ l'homéomorphisme γ de $\phi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$ défini par

$$\gamma(x) = \psi(\phi^{-1}(x)).$$

On dit que ϕ et ψ sont *compatibles* si γ est un difféomorphisme (i.e. si γ et γ^{-1} sont indéfiniment dérivables).

On appelle *atlas de* X tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures différentielles de* X.

On appelle *variété différentielle* toute variété topologique munie d'une structure différentielle.

Soit X une variété différentielle.

On appelle (abusivement) *atlas de* X tout atlas appartenant à la structure différentielle de X et *carte de* X toute carte appartenant à un atlas de X.

Soit x un point de X. Toutes les cartes de X dont le domaine contient x prennent leurs valeurs dans le même espace numérique. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* X *au point* x et se désigne par $\dim_x(X)$. La fonction $\dim(X)$ est localement constante. On dit que X est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe différentielle* (resp. *surface différentielle*) toute variété différentielle de dimension pure 1 (resp. 2).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et soit f une application de X dans E. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, l'application f_ϕ de $\phi(U)$ dans E définie par

$$f_\phi(x) = f(\phi^{-1}(x))$$

s'appelle l'*expression de* f *dans* ϕ. Si ψ est une deuxième carte de domaine V et si γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ, on a

$$f_\phi(x) = f_\psi(\gamma(x))$$

pour tout point x de $\phi(U \cap V)$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que f est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de X (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de X). On désigne par $\mathscr{C}^k(X, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarquons que $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ et $\mathscr{C}^k(X, E)$ un sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$-module de $\mathscr{F}(X, E)$, en désignant par $\mathscr{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications de X dans E.

Si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, on munit l'ensemble $\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes des dérivées jusqu'à l'ordre k. C'est un espace de Fréchet.

Dans le cas général, l'expression dans une carte ϕ de domaine U induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k(X, E)$ dans $\mathscr{C}^k(\phi(U), E)$ et l'on munit

$\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\mathscr{C}^k_K(X, E)$ des fonctions dont le support est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, E)$.

L'ensemble $\mathscr{C}^k_c(X, E)$ des fonctions de $\mathscr{C}^k(X, E)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}^k_K(X, E)$.

Soient X et Y deux variétés différentielles et soit u une application continue de X dans Y.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V dans Y. On appelle *expression de u dans (ϕ, ψ)* l'application

$$u_{\psi\phi} : \phi\left(U \cap u^{-1}(V)\right) \to \psi(V)$$

définie par

$$u_{\psi\phi}(x) = \psi\left(u\left(\phi^{-1}(x)\right)\right).$$

On dit que u est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathscr{C}^k(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application u est un *isomorphisme* (ou un *difféomorphisme*) si elle est bijective et si u et u^{-1} sont indéfiniment dérivables.

Les variétés différentielles, les applications indéfiniment dérivables et leur composition usuelle forment une catégorie.

LEMME 2. *Soient X et Y deux variétés différentielles. Pour qu'une application continue u de X dans Y soit indéfiniment dérivable, il faut et il suffit que l'application u^* de $\mathscr{F}(Y, \mathbf{R})$ dans $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ définie par*

$$u^*(f) = f \cdot u$$

envoie $\mathscr{C}^\infty(Y, \mathbf{R})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient ϕ une carte de domaine U dans X et ψ une carte de domaine V contenant $u(U)$ dans Y. On désigne par $\psi_1, \ldots, \psi_m$ les fonctions coordonnées de ψ et par $v_1, \ldots, v_m$ les fonctions coordonnées de $u_{\psi\phi}$. Pour tout point x de $\phi(U)$, il existe une fonction α de $\mathscr{C}^\infty_c(V, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $u(\phi^{-1}(x))$ (appendice I, lemme 3). Les fonctions $u^*(\alpha\psi_1), \ldots, u^*(\alpha\psi_m)$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$. On conclut en remarquant que leur expression dans ϕ coïncide avec $v_1, \ldots, v_m$ au voisinage de x.

Exemple 1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Tout isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de E sur $\mathbf{R}^n$ est une carte et deux telles cartes sont évidemment compatibles. Nous munirons toujours E de la structure différentielle correspondante.

Exemple 2.

On dit qu'un sous-espace Y d'une variété différentielle est une *sous-variété* s'il vérifie la condition suivante:

(*SV*) Pour tout point x de Y, il existe une carte ϕ de X centrée en x, de domaine U et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et un entier naturel m au plus égal à n tels que

$$\phi\,(U \cap Y) = \phi\,(U) \cap (\mathbf{R}^m \oplus 0).$$

Les cartes de la forme $\phi\,|_{U \cap Y}$ définissent une structure différentielle sur Y que l'on dit *induite par* X. Nous munirons toujours une sous-variété de la structure différentielle induite.

Notons que l'injection canonique de Y dans X est indéfiniment dérivable et que Y est un sous-espace localement fermé de X. Enfin tout ensemble ouvert de X est une sous-variété.

Exemple 3.

Soient X et Y deux variétés différentielles. Pour toute carte ϕ de X et toute carte ψ de Y, l'application $\phi \times \psi$ est une carte du produit $X \times Y$. Deux telles cartes sont évidemment compatibles. On munit toujours $X \times Y$ de la structure différentielle correspondante.

Les projections canoniques de $X \times Y$ dans chacun de ses facteurs sont indéfiniment dérivables. L'application diagonale induit un difféomorphisme de X sur une sous-variété fermée de $X \times X$.

Exemple 4.

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit u un homéomorphisme local de X dans Y.

Si Y est une variété topologique, il en est de même de chacune des composantes connexes de X (appendice II, théorème 1). De plus, pour toute structure différentielle de Y, il existe une structure différentielle de X et une seule faisant de u un difféomorphisme local.

Si u est surjective et si X est une variété topologique, il en est de même de Y. De plus, pour toute structure différentielle de X, il existe une structure différentielle de Y et une seule faisant de u un difféomorphisme local.

Exemple 5.

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ l'ensemble des droites issues de l'origine dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et par π la projection de $\mathbf{R}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ associant à tout point $(x_0, \ldots, x_n)$ la droite $(x_0 : \ldots : x_n)$ qu'il définit. Muni de la topologie quotient, l'espace $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est compact et connexe.

Pour tout entier j compris entre 0 et n, on pose

$$U_j = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \mid x_j \neq 0\}.$$

L'application ϕ_j de U_j dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\phi_j(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

est une carte de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. On vérifie aisément que ces cartes sont deux à deux compatibles. Muni de la structure différentielle correspondante, l'ensemble $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ s'appelle l'*espace projectif réel de dimension* n.

Soient X et Y deux variétés différentielles de dimension pure n et m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de X dans Y.

Pour tout point x de X, le rang à l'origine de l'application $u_{\psi\phi}$ est indépendant de la carte ϕ centrée en x et de la carte ψ centrée en $u(x)$. On l'appelle le *rang de* u *au point* x et on le désigne par $rg_x(u)$.

On dit que x est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* u si $rg_x(u)$ est égal à m (resp. strictement inférieur à m). On dit qu'un point y de Y est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* u si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des versions locales correspondantes (appendice I, théorèmes 1 et 4).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Supposons* n *égal à* m. *Si l'application* u *est de rang* n *en un point* x *de* X, *elle induit un isomorphisme d'un voisinage de* x *sur un voisinage de* $u(x)$.

THÉORÈME 2 (Sard). *Si* X *est dénombrable à l'infini, l'ensemble des valeurs critiques de* u *n'a pas de point intérieur. Si* y *est une valeur régulière de* u, *alors* $u^{-1}(y)$ *est une sous-variété de dimension* $n-m$ *dans* X.

Remarque 1.

En fait, l'ensemble des valeurs critiques de u est de mesure nulle. C'est une conséquence immédiate de la définition donnée au paragraphe 4 et du théorème de Sard donné dans l'appendice I.

LEMME 3. *Soit X une variété différentielle et soient x et y des points de X. Pour tout voisinage connexe V de $\{x, y\}$, il existe un difféomorphisme u de X sur elle-même tel que*

$$u(x) = y \qquad et \qquad u|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}.$$

En particulier, si X est connexe, le groupe des difféomorphismes opère transitivement sur X.

Il existe une famille $(\phi_j)_{0 \leq j \leq k}$ de cartes de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 0 et k, la carte ϕ_j est centrée au point x_j, son domaine U_j est contenu dans V et l'ensemble $\phi_j(U_j)$ est un cube de $\mathbf{R}^n$.

(2) Le point x_0 coïncide avec x, le point x_k coïncide avec y et pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, le point x_{j+1} appartient à U_j.

Il existe alors un difféomorphisme u_j de X sur elle-même tel que

$$u_j(x_j) = x_{j+1} \qquad\qquad u_j|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}$$

(appendice I, lemme 4). Il suffit de poser

$$u = u_{k-1} \cdot \ldots \cdot u_0 .$$

Soit X une variété différentielle et soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *partition de l'unité subordonnée à* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ toute famille $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions indéfiniment dérivables à valeurs réelles positives sur X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout indice ι, le support de α_ι est contenu dans U_ι.

(2) La famille des supports des α_ι est localement finie.

(3) Pour tout point x de X, la somme des $\alpha_\iota(x)$ (qui existe d'après (2)) est égale à 1.

PROPOSITION 1. *Pour tout recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X, il existe une partition de l'unité $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ subordonnée à $(U_\iota)_{\iota \in I}$* [1]).

Il existe deux recouvrements ouverts $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ et $(W_\kappa)_{\kappa \in K}$ localement finis et plus fins que $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tels que V_κ soit un domaine de carte relativement compact dans X et W_κ un ensemble relativement compact dans V_κ ([1], chap. IX, § 4, théorème 3).

---

[1]) C'est ici la première fois que nous utilisons l'hypothèse de paracompacité que nous avons faite sur les variétés.

Désignons par β_κ une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles positives sur X dont le support est contenu dans V_κ et égale à 1 sur W_κ (appendice I, lemme 3).

Il suffit alors de poser

$$\alpha_\iota = \left(\sum_{\tau(\kappa)=\iota} \beta_\kappa \right) \left(\sum_{\kappa \in K} \beta_\kappa \right)^{-1}$$

où τ désigne une application de raffinement de K dans I.

COROLLAIRE. *Pour tout ensemble compact K de X et tout voisinage U de K, il existe une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ dont le support est contenu dans U et égale à 1 sur K.*

On dit qu'un atlas d'une variété différentielle est *orienté* si le jacobien des changements de cartes est positif. Deux atlas orientés sont dits *compatibles* si leur réunion est un atlas orienté. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *orientations de X*.

On dit qu'une variété différentielle est *orientable* si elle possède un atlas orienté. On dit qu'une variété différentielle est *orientée* si elle est orientable et munie d'une orientation.

Soit X une variété différentielle orientée. On appelle (abusivement) *atlas orienté de X* tout atlas appartenant à l'orientation de X et *carte orientée de X* toute carte appartenant à un atlas orienté de X.

LEMME 4. *Toute variété différentielle X orientable, connexe de dimension strictement positive possède exactement deux orientations.*

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux atlas orientés de X. Désignons par ϕ une carte de $\mathscr{A}$ et par ψ une carte de $\mathscr{B}$. Le signe du jacobien du changement de cartes de ϕ dans ψ est indépendant de ces cartes. Comme c'est une fonction localement constante, on voit que X possède au plus deux orientations.

D'autre part, l'ensemble des cartes de la forme $(-\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ où ϕ parcourt $\mathscr{A}$ est un atlas orienté de X non compatible avec $\mathscr{A}$ ce qui démontre l'assertion.

Remarque 2.

Toute variété différentielle connexe de dimension 0 est réduite à un point. Elle est évidemment orientable. Par convention, on dit qu'elle possède deux orientations notées 1 et -1.

§ 2. Fibrés vectoriels

Dans tout ce paragraphe, on désigne par $\mathbf{k}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on désigne par $M(p, q; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes (à coefficients dans $\mathbf{k}$), par $M(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p et par $G(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre p.

Rappelons que l'ensemble $G(p; \mathbf{k})$ est ouvert dans l'espace vectoriel $M(p; \mathbf{k})$ et que le passage à l'inverse est un difféomorphisme.

Soit X une variété différentielle et soit π une application de but X.

On appelle *carte réelle* (resp. *complexe*) de π toute bijection Φ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbf{R}^p$ (resp. $U \times \mathbf{C}^p$), où U est un ensemble ouvert de X appelé (abusivement) le *domaine de* Φ, vérifiant la relation

$$pr_1 \cdot \Phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)} .$$

Pour tout point x de U, on désigne par Φ_x la bijection de la fibre π_x de π au point x sur $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$) définie par

$$\Phi_x(y) = (pr_2 \cdot \Phi)(y) .$$

Soient Φ et Ψ deux cartes réelles (resp. complexes) de π de domaines respectifs U et V. On dit que Φ et Ψ sont *compatibles* si pour tout point x de $U \cap V$ la bijection $\Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$ est linéaire et si l'application g de $U \cap V$ dans $M(p; \mathbf{R})$ (resp. $M(p; \mathbf{C})$) définie par

$$g(x) = \Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$$

est indéfiniment dérivable. Cette application s'appelle la *transition de* Φ *dans* Ψ.

On appelle *atlas réel* (resp. *complexe*) *de* π tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles réelles* (resp. *complexes*) *de* π.

On appelle *fibré vectoriel réel* (resp. *complexe*) *sur* X toute application de but X munie d'une structure vectorielle réelle (resp. complexe).

Soit π un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur X.

On appelle (abusivement) *atlas de* π tout atlas appartenant à la structure vectorielle de π et *carte de* π toute carte appartenant à un atlas de π.

La fibre de π en un point x est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel qui fait de Φ_x un isomorphisme pour toute carte Φ dont le domaine contient x. La dimension de cet espace vectoriel s'appelle (malheureusement) le *rang de* π *au point* x et se désigne par $rg_x(\pi)$. La fonction $rg(\pi)$ est localement constante. On dit que π est de *rang pur* si elle est constante.

On appelle *fibré en droites* tout fibré vectoriel de rang pur 1.

Désignons par $\tau(\pi)$ la source de π. Pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine, l'application $(\phi \cdot \pi, pr_2 \cdot \Phi)$ est une carte de $\tau(\pi)$. On vérifie aisément que deux telles cartes sont compatibles et l'on munit $\tau(\pi)$ de la structure différentielle correspondante. L'application π est indéfiniment dérivable, son rang est égal à la dimension de X (on prendra garde de ne pas confondre le rang du fibré vectoriel π avec le rang de l'application π).

On appelle *section de* π toute application s de X dans $\tau(\pi)$ telle que

$$\pi \cdot s = 1_X .$$

Pour toute carte Φ de domaine U, l'application s_Φ définie sur U par

$$s_\Phi(x) = \Phi_x(s(x))$$

s'appelle l'*expression de* s *dans* Φ. Si Ψ est une deuxième carte de domaine V et si g désigne la transition de Φ dans Ψ, on a

$$s_\Psi(x) = g(x)(s_\Phi(x))$$

pour tout point x de $U \cap V$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que s est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de π (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de π ou encore si elle appartient à $\mathscr{C}^k(X, \tau(\pi))$). On désigne par $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{F}(X, \pi)$ de toutes les sections de π est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{F}(X, \mathbf{k})$-module et que $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ en est un sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{k})$-module.

L'expression dans une carte Φ de domaine U induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ dans $\mathscr{C}^k(U, \mathbf{k}^p)$ et l'on munit $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\mathscr{C}_K^k(X, \pi)$ des sections dont le support [1]) est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$.

L'ensemble $\mathscr{C}_c^k(X, \pi)$ des sections de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}_K^k(X, \pi)$.

LEMME 1. *On désigne par* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *un recouvrement ouvert de* X *et, pour tout couple* (ι, κ) *d'indices, par* $s_{\kappa\iota}$ *une section de* $\mathscr{C}^k(U_\iota \cap U_\kappa, \pi)$. *On suppose que l'on a*

$$s_{\kappa\lambda} - s_{\iota\lambda} + s_{\iota\kappa} = 0$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$. *Il existe alors pour tout indice* ι *une section* s_ι *de* $\mathscr{C}^k(U_\iota, \pi)$ *telle que l'on ait*

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Désignons par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (§ 1, proposition 1). La section $t_{\kappa\iota}$ obtenue en prolongeant par 0 la section $\alpha_\kappa s_{\kappa\iota}$ appartient à $\mathscr{C}^k(U_\iota, \pi)$ et l'on pose

$$s_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} t_{\kappa\iota} .$$

On vérifie aisément que ces sections ont toutes les propriétés requises.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) sur X et soit u une application de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$. On suppose que l'on a

$$\rho \cdot u = \pi$$

et que l'application u_x de π_x dans ρ_x induite par u est linéaire pour tout point x de X.

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π et ρ à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ et $U \times \mathbf{k}^r$ respectivement. On appelle *expression de* u *dans* (Φ, Ψ) l'application $u_{\Psi\Phi}$ de U dans $M(r, p; \mathbf{k})$ définie par

$$u_{\Psi\Phi}(x) = \Psi_x \cdot u_x \cdot \Phi_x^{-1} .$$

On dit que l'application u est un *morphisme* si elle vérifie les conditions ci-dessus et si son expression dans tout couple de cartes est indéfiniment dérivable (ou ce qui revient au même si c'est une application indéfiniment dérivable de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$). On désigne par $\mathscr{C}^\infty(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes de π dans ρ. C'est de manière naturelle un $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{k})$-module.

---

[1]) On appelle *support* d'une section continue le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle.

Les fibrés vectoriels sur X et leurs morphismes s'organisent de manière évidente en une catégorie.

LEMME 2. *Pour qu'un morphisme de* π *dans* ρ *soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il soit bijectif.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si u est bijective, on a

$$(u^{-1})_{\Phi\Psi}(x) = \Phi_x \cdot (u^{-1})_x \cdot \Psi_x^{-1} = \left(u_{\Psi\Phi}(x)\right)^{-1}$$

et par conséquent $(u^{-1})_{\Phi\Psi}$ est indéfiniment dérivable.

Exemple 1.

On appelle *fibré vectoriel produit de rang* p *sur* X et l'on désigne par $\mathbf{k}_X^p$ l'application pr_1 de $X \times \mathbf{k}^p$ dans X munie de la structure vectorielle dont un atlas est réduit à l'application identique de $X \times \mathbf{k}^p$. On dit qu'un fibré vectoriel π sur X est *trivial* s'il est isomorphe à un fibré produit $\mathbf{k}_X^p$. Il revient au même de dire qu'il existe p sections de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui engendrent la fibre en tout point.

Exemple 2.

Soit π un fibré vectoriel sur X. Pour toute sous-variété Y de X, l'application $\pi\,|_{\pi^{-1}(Y)}$ est naturellement munie d'une structure vectorielle. Le fibré vectoriel correspondant se désigne par $\pi\,|_Y$.

Exemple 3.

Soit π un fibré vectoriel sur X. On dit que la restriction ρ de π à une partie de $\tau(\pi)$ est un *sous-fibré* si elle vérifie la condition suivante:

(*SF*) Pour tout point x de X, il existe une carte Φ de π à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ dont le domaine contient x et un entier naturel r au plus égal à p tel que

$$\Phi\left(\rho^{-1}(U)\right) = U \times (\mathbf{k}^r \oplus 0).$$

Les cartes de la forme $(1_U \times pr_1) \cdot \Phi$ définissent une structure vectorielle sur ρ que l'on dit *induite par* π. Nous munirons toujours un sous-fibré de la structure vectorielle induite.

Notons que $\tau(\rho)$ est une sous-variété fermée de $\tau(\pi)$ et que l'injection canonique est un morphisme.

La relation

$$« \ \pi(y') = \pi(y'') \quad \text{et} \quad y' - y'' \in \tau(\rho) \ »$$

est une relation d'équivalence sur $\tau(\pi)$. On désigne par σ l'application déduite de π par passage au quotient. On vérifie aisément que les applications de la forme

$$(1_U \times pr_2) \cdot \Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{k}^{p-r}$$

où Φ vérifie (SF) induisent par passage au quotient des cartes de σ deux à deux compatibles. Munie de la structure vectorielle correspondante, l'application σ s'appelle le *fibré quotient de* π *par* ρ. Notons que la projection canonique de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\sigma)$ est un morphisme.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels sur X.

On désigne par Φ et Φ' (resp. Ψ et Ψ') des cartes de π (resp. ρ) de domaines respectifs U et U' et par g (resp. h) la transition de Φ dans Φ' (resp. de Ψ dans Ψ').

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \oplus \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = \big(x, (\Phi_x \oplus \Psi_x)(y)\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = \big(x, (\Phi'_x \oplus \Psi'_x)(y)\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \oplus h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle la *somme directe de* π *et* ρ et se désigne par $\pi \oplus \rho$.

En particulier, pour tout entier naturel q, on désigne par π^q le fibré vectoriel somme directe de q exemplaires de π.

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \otimes \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = \big(x, (\Phi_x \otimes \Psi_x)(y)\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = \big(x, (\Phi'_x \otimes \Psi'_x)(y)\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \otimes h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *produit tensoriel de* π *et* ρ et se désigne par $\pi \otimes \rho$.

Supposons π de rang p. Pour tout entier j compris entre 1 et p, on désigne par e_j le j^e vecteur de base dans $\mathbf{k}^p$ et par t_j (resp. t'_j) la section de π sur U (resp. U') définie par

$$t_j(x) = \Phi_x^{-1}(e_j) \qquad (\text{resp. } t'_j(x) = \Phi'^{-1}_x(e_j)).$$

Pour tout point x de $U \cap U'$, on a

$$t_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{kj}(x)\, t'_k(x)$$

où les g_{kj} désignent les coefficients de la matrice g. D'autre part, la restriction à U (resp. U') de toute section s de $\pi \otimes \rho$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s \mid_U = \sum_{1 \leq j \leq p} t_j \otimes u_j \qquad (\text{resp} \quad s \mid_{U'} = \sum_{1 \leq j \leq p} t'_j \otimes u'_j)$$

où les u_j (resp. u'_j) sont des sections de ρ sur U (resp. U'). Un calcul élémentaire montre que ces sections sont liées par les relations

$$u'_j = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{jk} u_k .$$

Désignons par σ un troisième fibré vectoriel sur X et par δ un morphisme de $\pi \otimes \rho$ dans σ. Pour toute section u de π et toute section v de ρ, on définit une section $\delta(u, v)$ de σ en posant

$$\delta(u, v)(x) = \delta\big(u(x) \otimes v(x)\big).$$

On définit ainsi une application bilinéaire de $\mathscr{F}(X, \pi) \times \mathscr{F}(X, \rho)$ dans $\mathscr{F}(X, \sigma)$. De plus, on vérifie aisément que si u est une section de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ et v une section de $\mathscr{C}^k(X, \rho)$, alors $\delta(u, v)$ est une section de $\mathscr{C}^k(X, \sigma)$.

On dit que δ est une *dualité* si pour tout point x de X, l'application bilinéaire de $\pi_x \times \rho_x$ dans σ_x déduite de δ_x induit des isomorphismes de π_x sur $\mathrm{Hom}(\rho_x, \sigma_x)$ et de ρ_x sur $\mathrm{Hom}(\pi_x, \sigma_x)$.

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x^*$ [1]) dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = (x, y \cdot \Phi_x^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \Lambda'(x, y) = (x, y \cdot \Phi'^{-1}_x).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = {}^t g(x)^{-1} .$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *dual de* π et se désigne par π^*.

On construit de la même manière des fibrés vectoriels $\Lambda^q \pi$ et $\Lambda \pi$.

---

[1]) Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbf{k}$, on désigne par E^* l'espace dual de E, i.e. l'espace des applications linéaires de E dans $\mathbf{k}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbf{k}$. On appelle *forme hermitienne sur* E toute application α de $E \times E$ dans $\mathbf{k}$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout vecteur t de E, l'application partielle $\alpha(\ \ , t)$ est $\mathbf{k}$-linéaire.

(2) Pour tout couple (t', t'') de vecteurs de E, on a

$$\alpha(t', t'') = \overline{\alpha(t'', t')}.$$

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{R}$, une forme hermitienne est donc une forme bilinéaire symétrique. On désigne par Herm (E) l'espace vectoriel (réel) des formes hermitiennes sur E. Sa dimension est égale à $\dfrac{p(p+1)}{2}$ si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{R}$, à p^2 si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$. Les formes hermitiennes sur $\mathbf{k}^p$ s'identifient de manière naturelle à des matrices de $M(p; \mathbf{k})$.

On dit qu'une forme hermitienne est *positive* (resp. *positive non dégénérée*) si le nombre réel $\alpha(t, t)$ est positif (resp. strictement positif) pour tout vecteur t non nul.

Reprenons le cours de notre histoire. Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \mathrm{Herm}(\pi_x)$ dans X d'une structure vectorielle. On définit deux cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, \alpha) = \big(x, \alpha \cdot (\Phi_x^{-1} \times \Phi_x^{-1})\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, \alpha) = \big(x, \alpha \cdot (\Phi_x'^{-1} \times \Phi_x'^{-1})\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par le produit de matrices

$$f(x) = {}^t\overline{g(x)}^{-1}\, \alpha\, g(x)^{-1}$$

pour tout point x de $U \cap U'$ et toute forme hermitienne α sur $\mathbf{k}^p$. En particulier, ces cartes sont compatibles. Le fibré vectoriel réel correspondant se désigne par Herm (π).

On appelle *métrique hermitienne sur* π toute section de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(\pi))$ qui induit une forme hermitienne positive non dégénérée sur toutes les fibres.

Désignons par α une métrique hermitienne sur π.

Pour toute section s de π, on définit une fonction $|s|$ à valeurs réelles positives sur X en posant

$$|s|(x) = \big(\alpha(x)(s(x), s(x))\big)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit aussi une application u de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\pi^*)$ en posant

$$u(x, y) = \big(x, \alpha(\ \ , y)\big).$$

On vérifie aisément que u est un isomorphisme de fibrés vectoriels réels qui permet d'identifier π à son dual π^*.

LEMME 3. *Tout fibré vectoriel π sur X possède une métrique hermitienne.*

L'assertion est évidente si π est trivial. Sinon, on désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X formé de domaines de cartes de π et par $(\lambda_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour tout indice ι, il existe une métrique hermitienne α_ι sur $\pi\,|_{U_\iota}$ et l'on pose

$$\alpha = \sum_{\iota\in I} \lambda_\iota \alpha_\iota$$

On vérifie aisément que α est une métrique hermitienne sur π.

Désignons par X une variété différentielle, par p un entier naturel et par $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *cocycle réel* (resp. *complexe*) *de rang p subordonné à $\mathscr{U}$* toute famille $(g_{\kappa\iota})_{(\iota,\kappa)\in I\times I}$, où $g_{\kappa\iota}$ est une application indéfiniment dérivable de $U_\iota \cap U_\kappa$ dans $G(p;\mathbf{R})$ (resp. $G(p;\mathbf{C})$) vérifiant la relation

$$g_{\lambda\iota} = g_{\lambda\kappa}\, g_{\kappa\iota}$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$.

On dit que deux tels cocycles $(g_{\kappa\iota})$ et $(h_{\kappa\iota})$ sont *cobordants* s'il existe une famille (f_ι), où f_ι est une application indéfiniment dérivable de U_ι dans $G(p;\mathbf{k})$ vérifiant la relation

$$f_\kappa = h_{\kappa\iota} f_\iota\, g_{\iota\kappa}$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des cocycles de rang p subordonnés à $\mathscr{U}$. L'ensemble quotient se désigne par $\mathrm{Pic}\,(\mathscr{U}, G(p;\mathbf{k}))$.

Soit $\mathscr{V} = (V_\kappa)_{\kappa\in K}$ un second recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathscr{U}$ et soit τ une application de raffinement de K dans I. Pour tout cocycle $g = (g_{\kappa\iota})$ de rang p subordonné à $\mathscr{U}$, on définit un cocycle $\tau^*(g)$ de rang p subordonné à $\mathscr{V}$ en posant

$$\tau^*(g)_{\kappa\iota} = g_{\tau(\kappa)\tau(\iota)}\,|_{V_\iota\cap V_\kappa}\,.$$

L'application τ^* est compatible avec la relation de cobordance. De plus, si τ' est une autre application de raffinement, on a

$$g_{\tau'(\kappa)\tau(\kappa)} = g_{\tau'(\kappa)\tau'(\iota)}\, g_{\tau'(\iota)\tau(\iota)}\, g_{\tau(\iota)\tau(\kappa)}\,.$$

Ceci montre que l'application de $\mathrm{Pic}\,(\mathscr{U}, G(p;\mathbf{k}))$ dans $\mathrm{Pic}\,(\mathscr{V}, G(p;\mathbf{k}))$ déduite de τ^* par passage aux quotients est indépendante de τ. On la désigne par $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$.

Si $\mathscr{W}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathscr{V}$, on a

$$\sigma(\mathscr{W}, \mathscr{V}) \cdot \sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U}) = \sigma(\mathscr{W}, \mathscr{U}).$$

En particulier, si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont équivalents (i.e. si chacun d'eux est plus fin que l'autre), les applications $\sigma(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ et $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

On fixe une fois pour toutes un système cofinal de recouvrements ouverts de X et l'on désigne par $\mathrm{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ la limite inductive des ensembles $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, G(p; \mathbf{k}))$ et des applications $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ lorsque $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ parcourent ce système. Les éléments de $\mathrm{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ s'appellent les *fibrés principaux de groupe structural* $G(p; \mathbf{k})$ *sur* X.

Soit π (resp. ρ) un fibré vectoriel de rang pur p (resp. r) sur X et soit $(\Phi_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(\Psi_\iota)_{\iota \in I}$) un atlas de π (resp. ρ). On suppose que Φ_ι et Ψ_ι ont même domaine U_ι et l'on désigne par $g_{\kappa\iota}$ (resp. $h_{\kappa\iota}$) la transition de Φ_ι dans Φ_κ (resp. de Ψ_ι dans Ψ_κ). L'expression dans (Φ_ι, Ψ_ι) d'un morphisme u de π dans ρ est une application indéfiniment dérivable u_ι de U_ι dans $M(r, p; \mathbf{k})$ et l'on a

$$u_\kappa = h_{\kappa\iota} u_\iota g_{\iota\kappa}.$$

En particulier, on voit que π et ρ sont isomorphes si et seulement si les cocycles $(g_{\kappa\iota})$ et $(h_{\kappa\iota})$ sont cobordants. On en déduit que l'image $\delta(\pi)$ de $(g_{\kappa\iota})$ dans $\mathrm{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ ne dépend que de π (et non de l'atlas (Φ_ι)). On l'appelle le *fibré principal associé à* π.

Nous allons montrer que tout fibré principal de groupe structural $G(p; \mathbf{k})$ sur X est associé à un fibré vectoriel de rang pur p.

Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang p subordonné à ce recouvrement. Pour tout couple d'indices (ι, κ), on définit une bijection $\Phi_{\kappa\iota}$ de $(U_\iota \cap U_\kappa) \times \mathbf{k}^p$ sur lui-même en posant

$$\Phi_{\kappa\iota}(x, t) = (x, g_{\kappa\iota}(x)(t)).$$

En tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$, on a

$$\Phi_{\lambda\iota} = \Phi_{\lambda\kappa} \cdot \Phi_{\kappa\iota}.$$

Désignons par Y l'ensemble obtenu par recollement des $U_\iota \times \mathbf{k}^p$ au moyen des applications $\Phi_{\kappa\iota}$ et par π l'application de Y dans X obtenue par recollement des premières projections. Pour tout indice ι, l'application canonique de $U_\iota \times \mathbf{k}^p$ dans $\pi^{-1}(U_\iota)$ est une bijection et la bijection réciproque Φ_ι est une carte de π. La transition de Φ_ι dans Φ_κ n'est autre que $g_{\kappa\iota}$ ce qui démontre l'assertion.

SCHOLIE. *Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de rang pur p sur X sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux de groupe structural $G(p;\mathbf{R})$ (resp. $G(p;\mathbf{C})$) sur X.*

Le groupe $G(1;\mathbf{k})$ étant commutatif, on vérifie aisément que la multiplication point par point des applications induit une structure de groupe commutatif sur $\mathrm{Pic}(X, G(1;\mathbf{k}))$. Si π et ρ sont des fibrés en droites sur X, on a

$$\delta(\pi\otimes\rho) = \delta(\pi)\,\delta(\rho) \qquad \text{et} \qquad \delta(\pi^*) = \delta(\pi)^{-1}.$$

Soit ξ un fibré principal de groupe structural $\mathbf{C}^*$ sur X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang 1 représentant ξ et subordonné à un recouvrement $(U_\iota)_{\iota\in I}$. Il est clair que la classe de $(\overline{g_{\kappa\iota}})$ dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de ξ. On la désigne par $\bar{\xi}$.

LEMME 4. *Le fibré principal $\bar{\xi}$ est l'inverse du fibré principal ξ.*

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $f_{\kappa\iota}$ le logarithme de la fonction $|g_{\kappa\iota}|^2$. Il existe pour tout indice ι une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{R})$ telle que

$$f_{\kappa\iota} = f_\iota - f_\kappa$$

sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (lemme 1) et l'on pose

$$g_\iota = \exp(f_\iota).$$

On a alors la relation

$$g_\iota = |g_{\kappa\iota}|^2 g_\kappa = g_{\iota\kappa}^{-1} g_\kappa \overline{g_{\kappa\iota}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur p sur X.

Désignons par Φ et Ψ deux cartes de π ayant pour domaine le même voisinage U d'un point x de X et par g la transition de Φ dans Ψ. Pour toute section s de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g \cdot s_\Phi.$$

On dit que s est *transverse (à la section nulle) au point* x si $s(x)$ est non nul ou si s_Φ est de rang p au point x. En vertu de ce qui précède, cette condition est indépendante de Φ. On dit que s est *transverse (à la section nulle)* si elle est transverse en tout point de X.

LEMME 5. *Les sections transverses de π forment une partie dense de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$.*

Supposons X connexe; l'espace $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ est alors un espace de Fréchet. Pour toute partie compacte K de X, on désigne par W_K l'ensemble des sections de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui sont transverses en tout point de K. En vertu du théorème de Baire ([1], chap. IX, § 5, n° 3, théorème 1), il suffit de montrer que W_K est ouvert et dense dans $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$. Pour ce faire, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et que π est le fibré produit $\mathbf{R}^p_X$. Les sections de π s'identifient alors aux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et les sections transverses aux fonctions ayant l'origine pour valeur régulière.

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}^p)$. Posons

$$g(x) = |f(x)| + \sum_j |A_j(f)(x)|$$

où les $A_j(f)$ désignent le déterminant des mineurs d'ordre p extraits de la matrice jacobienne de f. Pour que l'origine soit une valeur régulière de f, il faut et il suffit que g ne s'annule pas sur X. On en déduit aisément que W_K est ouvert. D'autre part, le théorème de Sard (appendice I, théorème 4) montre qu'en ajoutant à f un vecteur convenable, l'origine devient une valeur régulière, d'où l'assertion.

Remarque 1.

Si p est strictement supérieur à n, la même démonstration montre que le fibré π possède une section indéfiniment dérivable partout non nulle.

LEMME 6. *Soient x_0 et x_1 deux points de X et soit s une section de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$. On suppose que x_0 est l'unique zéro de s dans un voisinage connexe V de $\{x_0, x_1\}$. Il existe alors une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui coïncide avec s sur $X \backslash V$ et dont x_1 est l'unique zéro dans V. Si de plus s est transverse, on peut choisir t transverse.*

On se ramène aisément au cas où x_0 et x_1 sont contenus dans un ensemble ouvert connexe U lui-même relativement compact dans le domaine d'une carte Φ de π contenu dans V. Il existe un difféomorphisme u de X tel que

$$u(x_1) = x_0 \qquad\qquad u|_{X \backslash U} = 1_{X \backslash U}$$

(§ 1, lemme 3). On vérifie aisément que la section t définie par

$$\begin{aligned} t(x) &= s(x) && \text{si } x \in X \backslash U \\ t(x) &= (\Phi_x^{-1} \cdot \Phi_{u(x)})(s(u(x))) && \text{si } x \in U \end{aligned}$$

a toutes les propriétés requises.

THÉORÈME 1. *Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur n sur X. On suppose que X est ouverte* [1]. *Il existe alors une section s de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ partout non nulle.*

On suppose X connexe et l'on désigne par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X telles que $X \backslash K_j$ n'ait aucune composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6). On va construire par récurrence sur j une section transverse s_j de π qui coïncide avec s_{j-1} sur K_{j-1} et qui ne s'annule pas sur K_j. Ceci établira l'assertion. On suppose que K_0 est vide et l'on prend pour s_0 une section transverse quelconque de π (il en existe en vertu du lemme 5). Supposons s_j construite; on désigne par A l'ensemble de ses zéros (c'est un ensemble fermé et discret puisqu'elle est transverse et puisque le rang de π est égal à la dimension de X) et par $\{x_1, \ldots, x_p\}$ l'intersection de A et de K_{j+1}. Il existe un ensemble de points $\{y_1, \ldots, y_p\}$ deux à deux distincts dans $X \backslash (K_{j+1} \cup A)$ tel que x_k et y_k se trouvent dans la même composante connexe de $X \backslash K_j$.

Désignons par V_1 un voisinage connexe de $\{x_1, y_1\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_1 soit le seul zéro de s_j dans V_1. Il existe une section transverse t_1 de π qui coïncide avec s_j sur $X \backslash V_1$ et dont le seul zéro dans V_1 soit y_1 (lemme 6). On construit de la même manière et par récurrence sur k un voisinage connexe V_k de $\{x_k, y_k\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_k soit le seul zéro de t_{k-1} dans V_k et une section transverse t_k de π qui coïncide avec t_{k-1} sur $X \backslash V_k$ et dont le seul zéro dans V_k soit y_k. Il suffit alors de prendre pour s_{j+1} la section t_p.

COROLLAIRE. *Tout fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface différentielle ouverte est trivial.*

Remarque 2.

Tout fibré vectoriel complexe π sur une surface différentielle ouverte est trivial: la démonstration se fait par récurrence sur le rang de π. Elle est laissée en exercice au lecteur (voir chap. V, § 4, théorème 6).

§ 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété différentielle de dimension pure n.

---

[1]) On dit qu'une variété est *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est compacte.

Pour tout point x de X, l'algèbre A_x^k des germes en x de fonctions k-fois continûment dérivables à valeurs réelles possède un unique idéal maximal $\underline{m}(A_x^k)$, à savoir l'idéal des germes de fonctions qui s'annulent au point x.

Soient ϕ et ψ deux cartes de X dont les domaines contiennent x. On désigne par γ le changement de cartes de ϕ dans ψ. Pour toute fonction f continûment dérivable au voisinage de x, on a

$$Df_\phi(\phi(x)) = Df_\psi(\psi(x)) \cdot D\gamma(\phi(x)).$$

En particulier, la condition

$$Df_\phi(\phi(x)) = 0$$

ne dépend que du germe de f au point x (et non de la carte ϕ).

Supposons k strictement positif. On dit qu'un germe de $\underline{m}(A_x^k)$ est *stationnaire* s'il vérifie cette condition. L'ensemble des germes stationnaires est un idéal $\underline{a}(A_x^k)$ de A_x^k et on a les inclusions

$$\underline{m}^2(A_x^k) \subset \underline{a}(A_x^k) \subset \underline{m}(A_x^k).$$

Pour toute carte ϕ de X dont le domaine contient x, on désigne par $\varepsilon_{x,\phi}$ l'application linéaire de A_x^k dans $(\mathbf{R}^n)^*$ définie par

$$\varepsilon_{x,\phi}(f) = Df_\phi(\phi(x)).$$

LEMME 1. *Par restriction et passage au quotient, l'application* $\varepsilon_{x,\phi}$ *induit un isomorphisme de* $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ *sur* $(\mathbf{R}^n)^*$.

L'application induite est injective par définition même de $\underline{a}(A_x^k)$. D'autre part, pour toute forme linéaire α sur $\mathbf{R}^n$, le germe en x de la fonction

$$\alpha \cdot \phi - (\alpha \cdot \phi)(x)$$

a pour image α ce qui démontre l'assertion.

On appelle *espace cotangent à* X *au point* x et l'on désigne par Ω_x^1 l'espace vectoriel $\underline{m}(A_x^1)/\underline{a}(A_x^1)$. Il résulte du lemme 1 que Ω_x^1 est de dimension n et que l'injection canonique de A_x^k dans A_x^1 induit un isomorphisme de $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ sur Ω_x^1 pour tout entier k strictement positif.

LEMME 2. *Il existe des germes* $u_1, \ldots, u_n$ *de* $\underline{m}(A_x^\infty)$ *tels que tout germe* f *de* $\underline{a}(A_x^k)$ *s'écrive*

$$f = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j u_j$$

avec $f_1, \ldots, f_n$ *dans* $\underline{m}(A_x^{k-1})$.

En particulier, on a

$$\underline{a}(A_x^\infty) = \underline{m}^2(A_x^\infty).$$

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ et tout point y de X, on a

$$f(y) - f(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j(y)(y_j - x_j)$$

où l'on a posé

$$f_j(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(ty + (1-t)x)\,dt.$$

On en déduit aisément l'assertion.

On appelle *différentielle d'un germe* f *de* A_x^1 et l'on désigne par df la classe dans Ω_x^1 du germe $f - f(x)$.

LEMME 3. *L'application* d *de* A_x^1 *dans* Ω_x^1 *est linéaire et l'on a*

$$d(fg) = g(x)\,df + f(x)\,dg$$

pour tout couple (f, g) *d'éléments de* A_x^1.

La première assertion est évidente. La seconde résulte de la formule

$$\begin{aligned} fg - f(x)g(x) &= g(x)(f - f(x)) + f(x)(g - g(x)) \\ &\quad + (f - f(x))(g - g(x)). \end{aligned}$$

Soit ϕ une carte de domaine U dans X. On désigne par $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et par $\phi_1, \ldots, \phi_n$ les fonctions coordonnées de ϕ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$, on définit des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \phi_n}$ de $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbf{R})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x) = \varepsilon_{x,\phi}(f_x)(e_j) = \frac{\partial f_\phi}{\partial x_j}(\phi(x)).$$

Remarquons que si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si ϕ est l'injection canonique de X dans $\mathbf{R}^n$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_j}$ coïncide avec la dérivée partielle usuelle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la règle de dérivation des fonctions composées.

LEMME 4. *Soient* ϕ *et* ψ *deux cartes de* X *et soit* f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$. *On a*

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \phi_j}.$$

LEMME 5. *Pour toute carte* ϕ *de* X *et pour tout point* x *du domaine de* ϕ, *les différentielles des germes* $\phi_{1,x}, \ldots, \phi_{n,x}$ *forment une base de* Ω^1_x. *Pour tout germe* f *de* A^1_x, *on a*

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x)\, d\phi_{j,x}.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et du lemme 1.

Soit π la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega^1_x$ dans X et soient ϕ et ψ des cartes de domaines respectifs U et V dans X. Le lemme 1 montre que les applications

$$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to U \times (\mathbf{R}^n)^* \quad \text{et} \quad \tilde{\psi} : \pi^{-1}(V) \to V \times (\mathbf{R}^n)^*$$

définies par

$$\tilde{\phi}(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y))$$

sont des cartes de π. Ces cartes sont compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t D\gamma(\phi(x))^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Le fibré vectoriel réel de rang n ainsi défini s'appelle le *fibré cotangent à* X et se désigne par Ω^1 (ou $\Omega^1(X)$ s'il y a risque de confusion).

Pour tout entier r, on désigne par Ω^r le fibré vectoriel $\Lambda^r \Omega^1$ et par Ω le fibré vectoriel $\Lambda \Omega^1$.

On appelle *forme différentielle* toute section de Ω. La structure des fibres munit l'ensemble $\mathscr{F}(X, \Omega)$ de toutes les formes différentielles d'une structure de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$-algèbre graduée. Notons que $\mathscr{C}^k(X, \Omega)$ en est une sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$-algèbre.

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de degré* r si elle prend ses valeurs dans Ω^r.

On appelle *différentielle d'une fonction* f *de* $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ et l'on désigne par df la forme différentielle homogène de degré 1 définie par

$$df(x) = d(f_x).$$

Avec les notations précédentes, on a

$$(df)_{\tilde{\phi}} = Df_{\phi} \cdot \phi = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j} d\phi_j .$$

En particulier, si f appartient à $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$, alors df appartient à $\mathscr{C}^{k-1}(X, \Omega^1)$.

Il résulte du lemme 5 que la restriction à U de toute forme différentielle s homogène de degré r s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s \mid_U = \sum_{J \in S_r(n)} u_J \, d\phi_J$$

où $S_r(n)$ désigne l'ensemble des suites strictement croissantes de r entiers compris entre 1 et n et où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_r} \qquad J = (j_1, \ldots, j_r) .$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions et de ce qui précède (§ 1, proposition 1, corollaire).

LEMME 6. *Pour tout point x de X, il existe un voisinage V de x et des fonctions $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ vérifiant la condition suivante : pour toute forme différentielle s de $\mathscr{C}^k(X, \Omega^r)$, il existe des fonctions s_J de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ telles que*

$$s \mid_V = \sum_{J \in S_r(n)} s_J \, dv_J \mid_V .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une application* **R**-*linéaire et une seule d de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Omega)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) La restriction de d à $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ coïncide avec la différentielle des fonctions.

(2) Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$d(df) = 0 .$$

(3) Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$, avec u homogène de degré r, on a

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

De plus, l'opérateur d vérifie les conditions suivantes :

(4) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$, le support de du est contenu dans le support de u.

(5) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^2(X, \Omega)$, on a

$$d(du) = 0 .$$

(6) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^k(X, \Omega^r)$, la forme du appartient à $\mathscr{C}^{k-1}(X, \Omega^{r+1})$.

Montrons tout d'abord que si d vérifie (1), (2) et (3), il vérifie aussi (4), (5) et (6).

Soit u une forme différentielle de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ nulle sur un ensemble ouvert V de X. Pour tout point x de V, il existe une fonction α de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de x. On a d'après (1) et (3),

$$0 = d(\alpha u) = d\alpha \wedge u + \alpha du$$

et puisque le germe de $\alpha - 1$ au point x est stationnaire, on en déduit que $du(x)$ est nul.

Pour démontrer (5), on peut supposer u de la forme

$$u = f\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_r$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ et $v_1, \ldots, v_r$ des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ (lemme 6). Par récurrence sur r, on déduit alors de (1), (2) et (3) que l'on a

$$du = df \wedge dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_r$$

(ce qui en passant démontre (6) et l'unicité de d). De même,

$$d(du) = 0\,.$$

Il reste à montrer l'existence de d. Par localisation et unicité, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J\, dx_J\,,$$

où les fonctions u_J appartiennent à $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ et pour tout entier j compris entre 1 et n, on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{J \in S_r(n)} \frac{\partial u_J}{\partial x_j}\, dx_J \quad \text{et} \quad du = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j}\,.$$

Si u est de degré 0, cette définition coïncide avec celle de la différentielle d'une fonction. Si de plus u appartient à $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} d(du) &= \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k = 0\,. \end{aligned}$$

Montrons enfin la condition (3). On peut supposer u et v de la forme

$$u = f\,dx_J \quad \text{et} \quad v = g\,dx_K$$

où J appartient à $S_r(n)$ et K à $S_s(n)$. On a alors

$$d(u \wedge v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial (fg)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\,dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K + (-1)^r \sum_{1 \leq j \leq n} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_J \wedge dx_j \wedge dx_K$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

On appelle *différentielle d'une forme* u *de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ la forme différentielle du définie dans le théorème 1. On dit qu'une forme différentielle est *fermée* (resp. *exacte*) si elle appartient au noyau (resp. à l'image) de d.

Soit h une application indéfiniment dérivable de X dans une variété différentielle Y de dimension pure m.

Pour tout point x de X, la composition des applications induit un homomorphisme

$$h_x^* : A^1_{h(x)} \to A^1_x$$

qui envoie l'idéal maximal (resp. l'idéal des germes stationnaires) de $A^1_{h(x)}$ dans l'idéal correspondant de A^1_x. Par restriction et passage aux quotients, on en déduit une application linéaire de $\Omega^1_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega^1_x(X)$ que l'on appelle l'*application cotangente à* h *au point* x. Par passage à l'algèbre extérieure, cette application définit un homomorphisme de $\Omega_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega_x(X)$ que l'on désigne encore par h_x^*.

Pour toute forme différentielle u sur Y, on définit une forme différentielle $h^*(u)$ sur X appelée l'*image réciproque de* u *par* h en posant

$$h^*(u)(x) = h_x^*(u(h(x))).$$

Cette application induit un homomorphisme de $\mathscr{F}(Y, \Omega)$ dans $\mathscr{F}(X, \Omega)$.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V contenant $h(U)$ dans Y. On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial (\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k} d\phi_k$$

pour tout entier j compris entre 1 et m. Si u est homogène de degré r, on a

$$u \mid_V = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} u_{j_1, \ldots, j_r} d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_r}$$

et par conséquent

$$h^*(u) \mid_U = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} (u_{j_1, \ldots, j_r} \cdot h)\, d(\psi_{j_1} \cdot h) \wedge \ldots \wedge d(\psi_{j_r} \cdot h)\,.$$

En particulier, si u appartient à $\mathscr{C}^k(Y, \Omega)$, alors $h^*(u)$ appartient à $\mathscr{C}^k(X, \Omega)$ et si k est strictement positif, on a

$$h^*(du) = dh^*(u)\,.$$

PROPOSITION 1 (Lemme de Poincaré). *Désignons par X un voisinage convexe de l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Il existe une application linéaire k de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ dans lui-même telle que*

$$d \cdot k + k \cdot d = 1 - \varepsilon$$

où ε désigne la forme linéaire sur $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ qui associe à toute forme différentielle la valeur à l'origine de sa partie homogène de degré 0.

On désigne par I l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et par h l'application de $I \times X$ dans X définie par

$$h(t, x) = tx\,.$$

Pour toute forme différentielle

$$v = \sum_{J \in S_r(n)} v_J\, dx_J$$

sur $I \times X$ indépendante de dt, on pose

$$d_X v = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial v}{\partial x_j} = dv - dt \wedge \frac{\partial v}{\partial t}$$

et

$$\int_0^1 v\, dt = \sum_{J \in S_r(n)} \left(\int_0^1 v_J\, dt\right) dx_J\,.$$

Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J\, dx_J$$

sur X, l'image réciproque $h^*(u)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$h^*(u) = u_1 + dt \wedge u_2$$

où les formes différentielles u_1 et u_2 sont indépendantes de dt. Notons que les coefficients a_J de u_1 sont donnés par la formule

$$a_J(t, x) = t^r u_J(tx)\,.$$

On pose alors

$$k(u) = \int_0^1 u_2\, dt\,.$$

L'image réciproque de la différentielle de u est donnée par la formule

$$h^*(du) = dh^*(u) = d_X u_1 + dt \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_X u_2\right)$$

et par conséquent

$$(k \cdot d)(u) = \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt - \int_0^1 (d_X u_2)\, dt$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\textstyle\int_0^1 (d_X u_2)\, dt = d\left(\int_0^1 u_2\, dt\right) = (d \cdot k)(u)$$

et

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt = u & \text{si} \quad r \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt = u - u(0) & \text{si} \quad r = 0\,. \end{cases}$$

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{\iota} \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n) \to 0$$

où ι désigne l'injection canonique de $\mathbf{R}$ dans les fonctions constantes, est exacte pour tout ensemble ouvert convexe (non vide) de $\mathbf{R}^n$.

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = \sum_J u_J\, dx_J$$

où J parcourt l'ensemble de toutes les suites strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n. On pose

$$i(u) = \textstyle\int_X u_{1,\dots,n}\, dt_1 \dots dt_n\,.$$

PROPOSITION 2 (Lemme de Poincaré). *Désignons par X un cube ouvert de $\mathbf{R}^n$. Il existe une forme différentielle ω de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n)$ et une application linéaire k de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega)$ dans lui-même telles que*

$$i(\omega) = 1 \quad \textit{et} \quad d \cdot k + k \cdot d = 1 - \omega i\,.$$

Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par A_j l'ensemble des formes différentielles de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ indépendantes de $dx_1, \dots, dx_j$. Notons que l'on a

$$A_0 = \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega) \quad \text{et} \quad A_n = \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})\,.$$

On désigne par d_j l'application de A_j dans lui-même définie par

$$d_j u = \sum_{j+1 \leq k \leq n} dx_k \wedge \frac{\partial u}{\partial x_k} .$$

Notons que d_n est identiquement nulle et que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec d_j pour k compris entre 1 et n.

Désignons par I le côté de X. On définit une application i_j de A_j dans $C^\infty(I^j, \mathbf{R})$ en posant

$$i_j(u)(x_1, \ldots, x_j) = \int_{I^{n-j}} u_{j+1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n)\, dt_{j+1} \ldots dt_n$$

où $u_{j+1,\ldots,n}$ désigne le coefficient de la partie homogène de degré $n-j$ dans u. Notons que i_n est l'application identique et que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec i_j pour k compris entre 1 et j.

La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral montre que l'on a

$$i_j(d_j u) = \sum_{j+1 \leq k \leq n} (-1)^{k-j-1} \int_{I^{n-j}} \frac{\partial u_{j+1,\ldots,\hat{k},\ldots,n}}{\partial x_k}\, dt_{j+1} \ldots dt_n = 0 .$$

Choisissons une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(I, \mathbf{R})$ telle que

$$\int_I \alpha(t)\, dt = 1$$

et posons

$$\omega_j(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{j+1 \leq k \leq n} \alpha(x_k)\, dx_k .$$

Notons que ω_n est la fonction constante 1 et que $i_0(\omega_0)$ est égal à 1.

Par récurrence descendante sur j, nous allons construire une application linéaire k_j de A_j dans lui-même qui commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et j et telle que

$$d_j \cdot k_j + k_j \cdot d_j = 1 - \omega_j i_j .$$

On prend pour k_n l'application identique de A_n. Supposons j inférieur ou égal à n et k_j construit. Toute forme différentielle u de A_{j-1} s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = u_1 + dx_j \wedge u_2$$

avec u_1 et u_2 dans A_j. Notons que l'on a

$$d_{j-1}(u) = d_j u_1 + dx_j \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} - d_j u_2\right).$$

On pose alors

$$l(u)(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_j} \left(i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_{j-1}, t) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(t)\right) dt\,.$$

Il est clair que l est une application linéaire de A_{j-1} dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ qui commute avec l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et $j-1$. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(l(u))(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_j) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(x_j)$$
$$l(d_{j-1}u)(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_1)(x_1, \ldots, x_j)\,.$$

On pose finalement

$$k_{j-1}(u) = k_j(u_1) - dx_j \wedge k_j(u_2) + l(u)\,\omega_j$$

et l'on vérifie aisément l'assertion.

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n) \xrightarrow{i} \mathbf{R} \to 0$$

est exacte pour tout cube ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.

Toutes les constructions et les résultats de ce paragraphe demeurent valables si l'on utilise les germes de fonctions à valeurs complexes. On obtient alors le *fibré cotangent complexe à* X désigné par $\Omega_{\mathbf{C}}^1$. Pour tout point x de X et toute carte ϕ dont le domaine contient x, l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ identifie $\Omega_{\mathbf{C},x}^1$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (lemme 1). On désigne de même par $\Omega_{\mathbf{C}}^r$ et $\Omega_{\mathbf{C}}$ les fibrés vectoriels $\Lambda^r\Omega_{\mathbf{C}}^1$ et $\Lambda\Omega_{\mathbf{C}}^1$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega_{\mathbf{C}}^r = \Omega^r \otimes \mathbf{C}_X \quad \text{et} \quad \Omega_{\mathbf{C}} = \Omega \otimes \mathbf{C}_X\,.$$

§ 4. Calcul intégral

Lemme 1. *Pour qu'une variété différentielle X de dimension pure n soit orientable, il faut et il suffit que le fibré Ω^n soit trivial.*

Désignons par $(\phi_\iota)_{\iota\in I}$ un atlas orienté de X et par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota\in I}$ formé des domaines de

cartes de cet atlas. On définit une forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ en posant

$$u = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \, d\phi_{\iota,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\iota,n} .$$

Pour tout indice κ, on a

$$u \mid_{U_\kappa} = \Big(\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota g_{\iota\kappa}\Big) d\phi_{\kappa,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\kappa,n}$$

où $g_{\iota\kappa}$ désigne le jacobien du changement de cartes de ϕ_κ dans ϕ_ι. Ceci montre que u ne s'annule jamais et par conséquent la condition est nécessaire.

Réciproquement, soit u une forme différentielle partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, il existe une fonction g partout non nulle dans $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ telle que

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n .$$

Quitte à remplacer ϕ_1 par $-\phi_1$, on peut supposer que g est strictement positive. Un atlas formé de telles cartes est évidemment orienté.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés différentielles considérées dans ce paragraphe sont orientées.

Soit X une variété différentielle (orientée) de dimension pure n.

On dit qu'une forme différentielle u homogène de degré n est *positive* si pour toute carte orientée ϕ de domaine U dans X, l'unique fonction g définie sur U par

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$$

est à valeurs réelles positives.

Désignons par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_{\mathbf{C}})$, par ϕ et ψ des cartes orientées de domaines respectifs U et V dans X. On suppose que le support de u est contenu dans $U \cap V$. On peut écrire

$$u \mid_U = f \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \quad \text{et} \quad u \mid_V = g \, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$$

où f et g sont des fonctions continues à valeurs complexes. On a les formules

$$f_\phi = \operatorname{jac}(\gamma) \, g_\phi \quad \text{et} \quad g_\psi = g_\phi \cdot \gamma^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Puisque le jacobien de γ est positif, la formule du changement de variables dans les intégrales multiples montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} g_\psi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} (g_\phi \cdot \gamma^{-1}) \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} |\operatorname{jac}(\gamma)| \, g_\phi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu$$

en désignant par μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. On pose alors

$$\int_X u = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu .$$

Ce nombre est indépendant de la carte orientée ϕ dont le domaine contient le support de u.

Dans le cas général où le support de u n'est contenu dans aucun domaine de carte, on désigne par $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$) un recouvrement de X par de tels domaines et par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(\beta_\kappa)_{\kappa \in K}$) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. La famille $(\alpha_\iota \beta_\kappa)$ est une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota \cap V_\kappa)$ et l'on a

$$\sum_{\iota \in I} \int_X \alpha_\iota u = \sum_{(\iota,\kappa) \in I \times K} \int_X \alpha_\iota \beta_\kappa u = \sum_{\kappa \in K} \int_X \beta_\kappa u .$$

On appelle *intégrale de u sur X* le nombre complexe défini par

$$\int_X u = \sum_{\iota \in I} \int_X \alpha_\iota u .$$

On notera que la forme linéaire canonique i ainsi obtenue sur $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_{\mathbf{C}})$ est réelle sur les formes différentielles réelles, positive sur les formes différentielles positives.

Munissons le fibré cotangent Ω^1 d'une métrique hermitienne (§ 2, lemme 3). Les fibrés vectoriels Ω et $\Omega_{\mathbf{C}}$ sont alors naturellement munis d'une métrique hermitienne (si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormale de Ω^1_x les vecteurs

$$e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}$$

où J parcourt $S_r(n)$ forment une base orthonormale de Ω^r_x et $\Omega^r{}_{\mathbf{C},x}$). On vérifie aisément que l'on a

$$|u \wedge v| \leqslant |u| \; |v|$$

quelles que soient les formes différentielles u et v.

Soient ϕ et ψ deux cartes orientées de X. Sur l'intersection de leurs domaines, on a la relation

$$\begin{aligned} &|d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n|^{-1} \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \\ &= |d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n|^{-1} \, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n . \end{aligned}$$

La forme différentielle ω obtenue par recollement est positive, partout non nulle; on l'appelle la *forme volume associée à la métrique hermitienne de Ω^1*. En particulier, la forme volume fournit une trivialisation de Ω^n.

La forme linéaire définie sur $\mathscr{C}_c^0(X, \mathbf{C})$ par

$$\mu(f) = \int_X f\omega$$

est réelle positive. Le théorème de Riesz ([5], théorèmes (2.14) et (2.17)) montre qu'elle correspond à une unique mesure borélienne régulière que l'on désigne encore par μ.

La tribu des ensembles μ-mesurables de X ne dépend pas de la structure hermitienne de Ω^1: une partie de X est μ-mesurable si et seulement si son image par toute carte de X est Lebesgue-mesurable.

Pour toute partie mesurable A de X, toute fonction mesurable f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ ou toute fonction intégrable à valeurs dans $\mathbf{C}$, on pose

$$\int_A f\omega = \mu(\chi_A f)$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de A.

Soit π un fibré vectoriel complexe de rang pur m sur X, muni d'une métrique hermitienne. Pour tout ensemble mesurable A de X toute section mesurable s de π et tout nombre réel p au moins égal à 1, on pose

$$\| s \|_{L^p,A} = \left(\int_A | s |^p \omega\right)^{1/p}$$
$$\| s \|_{L^\infty,A} = \inf\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \mu(| s |^{-1}(]t, \infty[) \cap A) = 0 \}.$$

Ce nombre dépend des structures hermitiennes de Ω^1 et de π.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, on désigne par $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de sections mesurables s de π telles que $\| s \|_{L^p,K}$ soit fini pour tout ensemble compact K de X. C'est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet pour la famille de semi-normes $\| \ \|_{L^p,K}$; c'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour qu'une section s appartienne à $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$, il faut et il suffit que l'application $(s_\Phi)_\phi$ appartienne à $L^p_{\text{loc}}(\phi(U), \mathbf{C}^m)$ pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine U. Ceci montre en particulier que l'espace vectoriel topologique $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$ est indépendant des structures hermitiennes de Ω^1 et π.

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $L^p_K(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L^p_{\text{loc}}(X, \pi)$ dont le support [1]) est contenu dans K. C'est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert si p est égal à 2) pour la norme $\| \ \|_{L^p,K}$.

---

[1]) On appelle *support d'une section mesurable* le plus petit ensemble en dehors duquel elle est presque partout nulle.

On désigne enfin par $L_c^p(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$ à support compact. C'est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $L_K^p(X, \pi)$.

Notons que les inclusions canoniques

$$L_{\text{loc}}^\infty(X, \pi) \subset L_{\text{loc}}^q(X, \pi) \subset L_{\text{loc}}^p(X, \pi) \subset L_{\text{loc}}^1(X, \pi)$$
$$L_c^\infty(X, \pi) \subset L_c^q(X, \pi) \subset L_c^p(X, \pi) \subset L_c^1(X, \pi)$$

sont continues pour tout nombre réel q au moins égal à p.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X est dense dans $L_c^p(X, \mathbf{C})$ et $L_{\text{loc}}^p(X, \mathbf{C})$ (*loc. cit.* théorème (3.13)).

Pour tout élément p de $[1, \infty[$, l'ensemble $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ est dense dans $L_c^p(X, \pi)$ et $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$ (*loc. cit.* théorème (3.14)). Notons que $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ est fermé dans $I_c^\infty(X, \pi)$ et que son adhérence dans $L_{\text{loc}}^\infty(X, \pi)$ est égale à $\mathscr{C}^0(X, \pi)$.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels complexes sur X et soit δ une dualité de $\pi \otimes \rho$ dans $\mathbf{C}_X$. On suppose π et ρ munis de métriques hermitiennes vérifiant la condition

$$|\delta_x(y' \otimes y'')| \leqslant |y'| \; |y''|$$

pour tout point x de X et tout point y' (resp. y'') de π_x (resp. ρ_x).

Soient p et q deux éléments conjugués de $[1, \infty]$ (i.e. tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et soit K une partie compacte de X. Pour toute section u de $L_K^p(X, \pi)$ et toute section v de $L_{\text{loc}}^q(X, \rho)$, l'inégalité de Hölder (*loc. cit.* théorème (3.8)) montre que l'on a

$$\left| \int_X \delta(u, v)\, \omega \right| \leqslant \| u \|_{L^p, K} \| v \|_{L^q, K}.$$

En particulier, la forme bilinéaire

$$\Delta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\text{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X \delta(u, v)\, \omega$$

est séparément continue (et même hypocontinue).

Lemme 2. *La forme bilinéaire*

$$\Delta : \mathscr{C}_c^0(X, \pi) \times L_{\text{loc}}^1(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est non dégénérée.

Il suffit de montrer que toute section v de $L_{\text{loc}}^1(X, \rho)$ rendant la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ nulle est elle-même identiquement nulle. La question étant

locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, que π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et que la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y'_j y''_j .$$

On se ramène immédiatement au cas où m est égal à 1. Pour tout ensemble compact K de X et pour tout voisinage compact L de K dans X, il existe une fonction u continue sur X dont le support est contenu dans L et égale à 1 sur K. On en déduit que

$$|\Delta(\chi_K, v)| = |\Delta(\chi_K - u, v)| \leqslant \mu(L \backslash K) \| v \|_{L^1, L}$$

et par conséquent la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ est nulle sur l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X. Par densité et continuité, elle est donc nulle sur $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$.

Pour toute partie compacte K de X, on définit alors une fonction u de $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$ en posant

$$\begin{cases} u(x) = \overline{v(x)}\ |v(x)|^{-1} & \text{si } x \in K \text{ et si } v(x) \neq 0 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou si } v(x) = 0 . \end{cases}$$

Il résulte de cette définition et de ce qui précède que l'on a

$$\| v \|_{L^1, K} = \Delta(u, v) = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

THÉORÈME 1. *Pour tout couple* (p, q) *d'éléments conjugués de* $]1, \infty[$, *la forme bilinéaire*

$$\Delta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques [1]).

Il résulte du lemme 2 que les applications Δ_1 et Δ_2 induites par Δ sont injectives. Pour montrer qu'elles sont surjectives, nous allons tout d'abord examiner le cas où π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et où la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y'_j y''_j .$$

---

[1]) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques. On dit qu'une forme bilinéaire Δ sur $E \times F$ est une *dualité d'espaces vectoriels topologiques* si elle est séparément continue et si elle induit une bijection Δ_1 (resp. Δ_2) de E (resp. F) sur le dual topologique de F (resp. E).

Toute forme linéaire continue α sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ s'écrit

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Par définition de la topologie de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$, il existe une partie compacte K de X et une constante c telles que

$$|\alpha_j(w)| \leqslant c \| w \|_{L^q, K}$$

pour tout w dans $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il existe donc une fonction u_j de $L^p_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\alpha_j(w) = \alpha_j(\chi_K w) = \mu(u_j w)$$

(*loc. cit.* théorème (6.16)) et si l'on pose

$$u = (u_1, \ldots, u_m)$$

on voit que l'on a

$$\Delta(u, v) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \alpha_j(v_j) = \alpha(v)$$

ce qui montre la surjectivité de Δ_1.

De même, toute forme linéaire continue β sur $L^p_c(X, \pi)$ s'écrit

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^p_c(X, \mathbf{C})$. Pour tout ensemble compact K de X, la restriction de β_j à $L^p_K(X, \mathbf{C})$ est continue et l'on voit qu'il existe une fonction $v_{K,j}$ et une seule dans $L^q_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\beta_j(w) = \mu(w v_{K,j})$$

pour tout w dans $L^p_K(X, \mathbf{C})$. Ces fonctions se recollent en une fonction v_j de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et si l'on pose

$$v = (v_1, \ldots, v_m),$$

on voit que l'on a

$$\Delta(u, v) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \beta_j(u_j) = \beta(u)$$

ce qui montre la surjectivité de Δ_2.

Démontrons maintenant le cas général. Si α est une forme linéaire continue sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$, on voit comme précédemment qu'il existe un ensemble compact K de X tel que

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v)$$

pour tout v dans $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$. Il existe aussi un recouvrement fini $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de K par des domaines de cartes de ρ (ou de π) et pour chaque indice ι une fonction λ_ι de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ dont le support est contenu dans U_ι telle que

$$\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota(x) = 1$$

pour tout point x de K. D'après la première partie de la démonstration, il existe une section u_ι de $L^p_c(U_\iota, \pi)$ telle que

$$\alpha(\lambda_\iota v) = \Delta(u_\iota, v).$$

La somme des u_ι est une section u de $L^p_c(X, \pi)$ et l'on a

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v) = \sum_{\iota \in I} \alpha(\lambda_\iota v) = \sum_{\iota \in I} \Delta(u_\iota, v) = \Delta(u, v).$$

L'assertion relative à Δ_2 est laissée en exercice au lecteur.

Exemple 1.

Soit π un fibré vectoriel complexe sur X et soit r un entier naturel. On définit une dualité canonique

$$\theta : (\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \otimes (\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \Omega^n_{\mathbf{C}}$$

en posant

$$\theta\big((y' \otimes t') \otimes (y'' \otimes t'')\big) = \langle y', y'' \rangle \; t' \wedge t''$$

pour tout point x de X et tout élément $y' \otimes t'$ (resp. $y'' \otimes t''$) de $\pi_x \otimes \Omega^r_{\mathbf{C},x}$ (resp. $\pi^*_x \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C},x}$). Pour toute section u de $\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}$ et toute section v de $\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}$, on pose

$$(u, v) = \theta(u, v).$$

On désigne par δ la dualité obtenue en composant θ avec la trivialisation de la forme volume. Il résulte immédiatement de ces définitions que l'on a

$$(u, v) = \delta(u, v)\, \omega.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : L^p_c(X, \pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \times L^q_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v)$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $]1, \infty[$.

Remarque 1.

Nous n'utiliserons le théorème 1 que dans le cas particulier où p et q sont tous deux égaux à 2. Le résultat d'intégration nécessaire à la démonstration est alors beaucoup plus simple (*loc. cit.* théorème (4.12)).

Remarque 2.

On montre de la même manière que la forme bilinéaire Δ induit des bijections de $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ sur le dual topologique de $L^1_c(X, \pi)$ et de $L^{\infty}_c(X, \pi)$ sur le dual topologique de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ (*loc. cit.* théorème (6.16)).

Remarque 3.

Il résulte de l'hypocontinuité de la forme bilinéaire Δ que les bijections Δ_1 et Δ_2 sont continues (pour la topologie forte) et du théorème du graphe fermé que ce sont des isomorphismes.

On dit qu'une partie Y de X est une *pièce* si elle vérifie la condition suivante:

(P) Pour tout point x de X, il existe une carte ϕ de X dont le domaine U contient x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_1 \leqslant 0\}.$$

Ceci implique en particulier que Y est fermée et que ∂Y est une sous-variété de X. Nous allons munir ∂Y d'une orientation naturelle que l'on dit *induite par* X. Tout d'abord, si n est égal à 1, le bord de Y est de dimension 0. On munit tout point x de ∂Y de l'orientation 1 (resp. -1) (§ 1, remarque 2) s'il existe une carte orientée ϕ de domaine U centrée en x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \leqslant 0\}$$
$$(\text{resp. } \phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \geqslant 0\}).$$

Supposons n au moins égal à 2. Quitte à remplacer ϕ_n par $-\phi_n$, on peut supposer que les cartes qui vérifient la condition (P) sont orientées. Leurs restrictions à ∂Y forment alors un atlas orienté dont la classe est par définition l'orientation induite.

THÉORÈME 2 (Stokes). *Pour toute pièce Y de X et toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-1}_{\mathbf{C}})$, on a*

$$\int_{\partial Y} \iota^*(u) = \int_Y du$$

où ι désigne l'injection canonique de ∂Y dans X.

On se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et où Y est de la forme

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_1 \leqslant 0\}.$$

Par linéarité, on peut supposer que u est donnée par

$$u = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_j} \ldots \wedge dx_n$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^1_c(X, \mathbf{R})$. On a

$$du = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Supposons tout d'abord j égal à 1. On a par définition

$$\iota^*(u) = (f \cdot \iota)\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et par conséquent

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

Supposons j strictement supérieur à 1. On a alors

$$\iota^*(u) = 0$$

et d'autre part

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{x_1 \leqslant 0} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \ldots \hat{dx_j} \ldots dx_n = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Soient u et v deux formes différentielles de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-r-1}_{\mathbf{C}})$ respectivement. Pour toute pièce Y de X, on a*

$$\int_Y du \wedge v = \int_{\partial Y} \iota^*(u \wedge v) + (-1)^{r+1} \int_Y u \wedge dv$$

En particulier, on a

$$\int_X du \wedge v = (-1)^{r+1} \int_X u \wedge dv .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et de la formule

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

On appelle *complexe de de Rham de* X la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

où d^r désigne la restriction de la différentielle d aux formes homogènes de degré r. On appelle *groupes de cohomologie de* X les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{Im} d^{r-1} .$$

La différentielle diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d_c^0} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d_c^1} \dots \xrightarrow{d_c^{n-1}} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

et des groupes de cohomologie correspondants

$$\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d_c^r / \operatorname{Im} d_c^{r-1} .$$

Le noyau de d^0 s'identifie aux fonctions localement constantes sur X. Si X est connexe, on a donc

$$\mathbf{H}^0(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \mathbf{R})$ est nul.

La formule de Stokes montre que l'intégration des formes différentielles de degré n induit par passage au quotient une forme linéaire canonique i sur $\mathbf{H}_c^n(X, \mathbf{R})$.

THÉORÈME 3. *Si X est connexe, la forme linéaire i est un isomorphisme. Si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^n(X, \mathbf{R})$ est nul.*

Si X est un cube de $\mathbf{R}^n$, l'assertion résulte du lemme de Poincaré (§ 3, propositions 1 et 2).

Passons au cas général. Désignons par U_0 un domaine de carte isomorphe à un cube. Nous allons montrer qu'il existe pour toute forme u de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n)$ des formes u_0 et v de $\mathscr{C}_c^\infty(U_0, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u = u_0 + dv$$

ce qui établira la première assertion.

Par partition de l'unité, on voit aisément que l'on peut supposer le support de u contenu dans un domaine de carte isomorphe à un cube. On construit alors une suite $U_1, \dots, U_k$ de tels domaines vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et k, l'ensemble $U_j \cap U_{j-1}$ est non vide.

(2) Le support de u est contenu dans U_k.

Par récurrence descendante sur l'entier j, le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 2) montre qu'il existe des formes u_{j-1} et v_{j-1} de $\mathscr{C}_c^\infty(U_{j-1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u_k = u \quad \text{et} \quad u_j = u_{j-1} + dv_{j-1}\,.$$

Il suffit alors de prendre pour v la somme des v_j.

Supposons X ouverte et montrons que toute forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ est exacte. Désignons par $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X (avec K_0 vide pour fixer les idées) telles que $X\backslash K_j$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6) et par $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement

$$(\mathring{K}_{j+2}\backslash K_j)_{j\in\mathbf{N}}\,.$$

La première partie du théorème montre qu'il existe des formes u_0 et v_0 de $\mathscr{C}_c^\infty(X\backslash K_1, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_0 u = u_0 + dv_0\,.$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit alors par récurrence des formes u_j et v_j de $\mathscr{C}_c^\infty(X\backslash K_{j+1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X\backslash K_j, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_j u + u_{j-1} = u_j + dv_j\,.$$

En effet, la restriction de $\alpha_j u + u_{j-1}$ à une composante connexe V de $X\backslash K_j$ est une forme différentielle de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$ et puisque $V\backslash K_{j+1}$ est non vide, l'assertion résulte de la première partie du théorème.

La famille des supports des v_j étant localement finie, la somme

$$v = \sum_{j\in\mathbf{N}} v_j$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{n-1})$. On a alors

$$dv = \sum_{j\in\mathbf{N}} dv_j = \alpha_0 u - u_0 + \sum_{j\geq 1}(\alpha_j u + u_{j-1} - u_j) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \alpha_j u = u\,,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 4. *Soient X et Y deux variétés différentielles (orientées) de dimension pure n et soit h une application indéfiniment dérivable de X*

dans Y. *On suppose que* Y *est connexe et* h *propre* [1]). *Il existe alors un entier relatif* ν *tel que*

$$\int_X h^*(u) = \nu \int_Y u$$

pour toute forme différentielle u *de* $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$.

La forme linéaire λ définie sur $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$ par

$$\lambda(u) = \int_X h^*(u)$$

induit par passage au quotient une forme linéaire sur $\mathbf{H}_c^n(Y, \mathbf{R})$. Il résulte du théorème 3 que cette forme linéaire est proportionnelle à i. Tout revient à montrer que le facteur de proportionnalité est un entier.

Désignons par y une valeur régulière de h (§ 1, théorème 2), par ψ une carte orientée de centre y et de domaine V dans Y et par $x_1, \ldots, x_p$ les points de $h^{-1}(y)$. Si V est suffisamment petit, l'application h induit pour tout entier j compris entre 1 et p un isomorphisme h_j de U_j sur V, où U_j désigne la composante connexe de x_j dans $h^{-1}(V)$ (§ 1, théorème 1). Posons

$$\begin{cases} \varepsilon(j) = 1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ est une carte orientée de } X \\ \varepsilon(j) = -1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ n'est pas une carte orientée de } X. \end{cases}$$

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$, on a

$$\int_X h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \int_{U_j} h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \varepsilon(j) \int_Y u$$

ce qui démontre l'assertion.

L'entier ν du théorème 4 s'appelle le *degré de* u et se désigne par deg (u).

Remarque 4.

La considération des formes différentielles complexes sur X permet d'introduire des groupes de cohomologie $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ et $\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C})$. On notera que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}.$$

Soit X une variété différentielle et soit $g = (g_\kappa)$ un cocycle complexe de rang 1 subordonné à un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ de X. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $u_{\kappa\iota}$ la forme différentielle

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dg_{\kappa\iota}}{g_{\kappa\iota}}.$$

---

[1]) Ceci signifie que l'image réciproque par h de toute partie compacte de Y est une partie compacte de X.

Il existe pour tout indice ι une forme u_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ telle que

$$u_{\kappa\iota} = u_\iota - u_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$ (§ 2, lemme 1). En particulier, puisque $u_{\kappa\iota}$ est fermée, les différentielles du_ι se recollent en une forme fermée v homogène de degré 2.

Montrons que la classe de v dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ ne dépend que de g. En effet, si l'on a

$$u_{\kappa\iota} = u'_\iota - u'_\kappa$$

pour certaines formes u'_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, les formes du'_ι se recollent en une forme v' de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$, les $u'_\iota - u_\iota$ en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$v' = v + du$$

ce qui démontre l'assertion.

La classe de $-v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ s'appelle la *classe de Chern de* g et se désigne par ch (g).

LEMME 3. *Pour tout recouvrement ouvert* $\mathscr{U}$ *de* X, *la classe de Chern induit un homomorphisme de* $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*)$ *dans* $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. *Si* $\mathscr{V}$ *est un recouvrement ouvert de* X *plus fin que* $\mathscr{U}$, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*) \arrow[rr, "\sigma(\mathscr{V},\mathscr{U})"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}"'] & & \mathrm{Pic}(\mathscr{V}, \mathbf{C}^*) \arrow[dl, "\mathrm{ch}"] \\ & \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) & \end{tikzcd}$$

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Par passage à la limite inductive, on obtient donc un homomorphisme canonique ch de $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. On appelle *classe de Chern d'un fibré en droites complexes* π *sur* X et l'on désigne par ch (π) la classe de Chern du fibré principal associé à π (§ 2, scholie).

§ 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une surface différentielle connexe et orientée.

Désignons par γ une application indéfiniment dérivable définie sur un ensemble ouvert W de $\mathbf{R}$ à valeurs dans X, et par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Il est clair que la restriction de $\gamma^*(u)$ à tout intervalle fermé de W ne dépend que de la restriction de γ à cet intervalle.

On dit qu'un chemin c de X défini sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ est *dérivable* s'il existe un intervalle ouvert W contenant $[a, b]$ et une application γ indéfiniment dérivable de W dans X prolongeant c. Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on désigne par $c^*(u)$ la restriction de $\gamma^*(u)$ à $[a, b]$.

On appelle *intégrale de u sur c* le nombre complexe défini par

$$\int_c u = \int_a^b c^*(u).$$

On définit ainsi une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, réelle sur les formes différentielles réelles. De plus, si h est une application dérivable à dérivée positive d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u.$$

Autrement dit l'intégrale de u sur c ne dépend pas de la paramétrisation de c. Enfin, pour toute fonction f de $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Désignons maintenant par u une forme fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 1) montre qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{U_\iota} = df_\iota$$

D'autre part, la compacité de l'intervalle $[a, b]$ montre qu'il existe une suite de nombres réels

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} = b$$

et pour tout entier j compris entre 0 et n un indice $\tau(j)$ tel que $U_{\tau(j)}$ contienne l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Une telle suite est dite *subordonnée au recouvrement* $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Une telle application est dite de *subordination*.
On a alors

$$\int_c u = \sum_{0 \leqq j \leqq n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} c^*(u) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j)).$$

Si c est un chemin quelconque de X (continu mais non nécessairement dérivable), et si u est fermée, le membre de droite est toujours défini. Nous allons voir qu'il est indépendant des différents choix que nous avons faits.

Tout d'abord, il est indépendant de τ : désignons par σ une autre application de subordination de $\{0, \ldots, n\}$ dans I. Pour tout entier j compris entre 0 et n, l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante

connexe de $U_{\tau(j)} \cap U_{\sigma(j)}$, d'où l'assertion puisque la fonction $f_{\tau(j)} - f_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout nombre réel t compris entre t_j et t_{j+1}, la suite

$$a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = b$$

est encore subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et la somme correspondante ne change pas. On en déduit que cette somme est indépendante de la suite subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Finalement, désignons par $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ un deuxième recouvrement ouvert de X et, pour chaque indice κ, par g_κ une fonction de $\mathscr{C}^\infty(V_\kappa, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{V_\kappa} = dg_\kappa .$$

Il existe une suite

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = b$$

subordonnée aux deux recouvrements. On désigne par τ (resp. σ) une application de subordination de $\{0, \ldots, n\}$ dans I (resp. K). Pour tout entier j compris entre 0 et n, l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j)} \cap V_{\sigma(j)}$ et l'on conclut en remarquant que $f_{\tau(j)} - g_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout chemin c de X et toute forme fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on pose

$$\int_c u = \sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j)}\big(c(t_{j+1})\big) - f_{\tau(j)}\big(c(t_j)\big) .$$

Cette définition coïncide avec la précédente si c est dérivable. Pour toute application continue et croissante h d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u .$$

De plus, pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f\big(c(b)\big) - f\big(c(a)\big) ;$$

enfin, si c' est un deuxième chemin de X ayant pour origine l'extrémité de c, on a

$$\int_{cc'} u = \int_c u + \int_{c'} u .$$

LEMME 1. *Soient c_0 et c_1 deux chemins homotopes de X. On a alors*

$$\int_{c_0} u = \int_{c_1} u$$

pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

On peut toujours supposer que c_0 et c_1 sont définis sur l'intervalle [0, 1] et l'on désigne par Γ une homotopie de c_0 vers c_1, i.e. une application continue du carré

$$C = \{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \}$$

dans X vérifiant les conditions suivantes:

$$\Gamma(s, 0) = c_0(s) \quad \text{et} \quad \Gamma(s, 1) = c_1(s)$$
$$\Gamma(0, t) = c_0(0) = c_1(0) \quad \text{et} \quad \Gamma(1, t) = c_0(1) = c_1(1).$$

Il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{U_\iota} = df_\iota .$$

Par compacité, il existe deux suites de nombres réels

$$0 = s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_{n+1} = 1$$
$$0 = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_{m+1} = 1$$

et pour tout couple d'entiers (j, k) un indice $\tau(j, k)$ tel que l'image par Γ du rectangle

$$\{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s_j \leqslant s \leqslant s_{j+1} \quad \text{et} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1} \}$$

soit contenue dans $U_{\tau(j,k)}$. Pour tout entier k compris entre 0 et m, la restriction de Γ à $[0, 1] \times \{ t_k \}$ est un chemin γ_k de X et il suffit de montrer que l'on a

$$\int_{\gamma_k} u = \int_{\gamma_{k+1}} u .$$

Or, pour tout entier j compris entre 1 et $n+1$, l'image par Γ de l'ensemble

$$\{ s_j \} \times [t_k, t_{k+1}]$$

est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j-1,k)} \cap U_{\tau(j,k)}$. On en déduit que

$$f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_k(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j)) = f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) .$$

Par sommation, et en utilisant le fait que γ_k et γ_{k+1} ont mêmes extrémités, on voit que l'on a

$$\sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j))$$
$$= \sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j))$$

ce qui établit l'assertion.

Désignons par $\mathbf{C}^*$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et par $\mathbf{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On appelle *support d'une fonction continue à valeurs dans* $\mathbf{C}^*$ (ou $\mathbf{U}$) le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est égale à 1.

On désigne par $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$) le groupe multiplicatif des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ (resp. $\mathbf{U}$) et par $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})$) le sous-groupe formé de celles à support compact.

L'application exponentielle induit des homomorphismes

$$\exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$$

$$\exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}).$$

On dit qu'une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ *possède un logarithme* si elle est dans l'image de l'application exponentielle.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la forme différentielle $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{df}{f}$ s'appelle la *différentielle logarithmique de f.* Elle est réelle si f est à valeurs dans $\mathbf{U}$, à support compact si f est à support compact. Puisqu'elle est fermée, on a des applications canoniques

$$\delta : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \to \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*) \to \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})$$

$$\delta : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \to \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) \to \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}).$$

On vérifie aisément que ce sont des homomorphismes.

LEMME 2. *Considérons les deux diagrammes commutatifs de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \theta \\
\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \theta \\
\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C}).
\end{array}$$

Les lignes sont exactes et θ induit un isomorphisme sur les images de δ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{d(\exp 2i\pi f)}{\exp 2i\pi f} = df$$

ce qui montre que le composé des deux homomorphismes est nul. D'autre part, si g est une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{dg}{g} = df,$$

on voit que $g \exp(-2i\pi f)$ est constante, ce qui montre que les lignes sont exactes.

Montrons que l'application induite par θ est injective. Si g est à valeurs dans $\mathbf{U}$, et si l'on a

$$\exp 2i\pi f = g\,,$$

on a la relation

$$\exp(-2\pi Imf) = |g| = 1$$

autrement dit f est à valeurs réelles.

Montrons que l'application induite par θ est surjective. Pour toute fonction g de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, il existe une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ telle que

$$|g| = \exp f.$$

On a alors

$$\frac{d(|g|^{-1}g)}{|g|^{-1}g} = \frac{dg}{g} - df$$

ce qui démontre l'assertion.

Le second diagramme se traite de la même manière.

On désigne par $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ (resp. $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$) le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})$), image de l'homomorphisme δ.

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0.

Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et tout lacet c de X, on appelle *période de u sur c*, l'intégrale de u sur c. Cette période ne dépend que de la classe de cohomologie de u et de la classe d'homotopie de c (lemme 1). On a donc un homomorphisme canonique

$$\overline{\omega} : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{R})$$

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme $\overline{\omega}$ est un isomorphisme. Il envoie $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur* $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{Z})$.

Montrons tout d'abord que $\overline{\omega}$ est injectif. Soit u une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et soit c un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x dans X. Si toutes les périodes de u sont nulles, l'intégrale

$$f(x) = \int_c u$$

ne dépend pas de c. Montrons que f appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et que sa différentielle est u. Tout point x_1 de X possède un voisinage connexe U sur

lequel u est la différentielle d'une fonction g de $C^\infty(U, \mathbf{R})$ (lemme de Poincaré). On a alors pour tout point x de U

$$f(x) = \int_c u + g(x) - g(x_1)$$

où c est un chemin fixe joignant x_0 à x_1. Ceci démontre l'assertion.

Montrons maintenant que $\overline{\omega}$ est surjective. Désignons par α un homomorphisme de G dans $\mathbf{R}$, par $\tilde{X}$ le revêtement universel de X et par π la projection canonique de $\tilde{X}$ dans X. On rappelle que le groupe G s'identifie au groupe des transformations de ce revêtement; on le fait opérer sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ par la formule

$$c \cdot (x, t) = \big(c(x), \alpha(c) + t\big).$$

On désigne par Y l'espace des orbites, par ρ la projection canonique de $X \times \mathbf{R}$ dans Y et par p l'unique application rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{pr_1} & \tilde{X} \times \mathbf{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xleftarrow{p} & Y \end{array}$$

Soit U un ensemble ouvert simplement connexe de X et soit V une composante connexe de $\pi^{-1}(U)$. Le groupe G opérant trivialement sur $V \times \mathbf{R}$, on voit que ρ induit un homéomorphisme de $V \times \mathbf{R}$ sur $p^{-1}(U)$. On en déduit aisément que Y est séparé et que $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est son revêtement universel. On munit Y de l'unique structure différentielle faisant de ρ un isomorphisme local (§ 1, exemple 4).

L'étape suivante consiste à construire une section s de p, i.e. une application indéfiniment dérivable de X dans Y telle que

$$p \cdot s = 1_X \text{ [1]}.$$

On désigne par $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux recouvrements ouverts localement finis de X tels que U_n soit simplement connexe et V_n relativement compact dans U_n pour tout entier n. On construit alors par récurrence une section s_n de p indéfiniment dérivable au voisinage de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} \overline{V}_j$ et qui coïncide avec s_{n-1} sur $\overline{V}_n \cap \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \overline{V}_j$. Ceci est possible puisque l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_n) & \simeq & U_n \times \mathbf{R} \\ & p \searrow \quad \swarrow pr_1 & \\ & U_n & \end{array}$$

[1]) On prendra garde que p n'est pas un fibré vectoriel sur X: les transitions sont linéaires affines et non linéaires.

L'application s s'obtient par recollement des s_n.

Remarquons maintenant que la forme différentielle dt sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est invariante par G. Par passage au quotient, elle définit une forme différentielle fermée u sur Y et l'on pose

$$v = s^*(u).$$

Pour tout lacet c de X au point x_0 et tout point (x, t) de $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ se projetant sur $s(x_0)$, il existe un chemin $\tilde{c}$ et un seul relevant $s \cdot c$ et ayant (x, t) pour origine. Son extrémité est par définition le point $\big(c(x), \alpha(c) + t\big)$ et l'on a

$$\int_c v = \int_c s^*(u) = \int_{s \cdot c} u = \int_{\tilde{c}} dt = \alpha(c)$$

ce qui démontre finalement la surjectivité de $\overline{\omega}$.

Il reste à voir que les formes différentielles à périodes entières sont exactement les différentielles logarithmiques.

La première partie du théorème montre qu'une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ possède un logarithme sur tout ensemble ouvert simplement connexe. Puisque deux tels logarithmes diffèrent d'un entier, toutes les périodes de $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{df}{f}$ sont des entiers.

Réciproquement, désignons par u une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$. Toujours en vertu de la première partie du théorème, la forme différentielle $\pi^*(u)$ est exacte sur le revêtement universel $\tilde{X}$. Désignons par f une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbf{R})$ dont la différentielle est $\pi^*(u)$. Si les périodes de u sont entières, la fonction $\exp(2i\pi f)$ est G-invariante ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 1. *Si X est simplement connexe, toute forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ est exacte et toute fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ possède un logarithme.*

COROLLAIRE 2. *Si le groupe G est de génération finie, l'injection canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ induit un isomorphisme*

$$\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})\ ^{1)}.$$

Le corollaire 2 s'applique en particulier si X est compacte (appendice II, proposition 1).

---

[1]) On peut exprimer ce fait en disant que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un *réseau de* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$, i.e. un sous-groupe libre dont le rang est égal à la dimension de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$.

Soit ϕ une carte orientée de X et soit D un disque de centre x relativement compact dans ϕ. Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, le nombre complexe

$$\text{Rés}(u, x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} u$$

où ∂D désigne le bord orienté de D ne dépend que de u: c'est une conséquence immédiate de la formule de Stokes. On l'appelle le *résidu de u au point x.*

Supposons X simplement connexe. Il résulte du théorème 1 appliqué à la surface différentielle $X\backslash\{x\}$ que u est exacte si et seulement si son résidu au point x est nul.

On identifie désormais $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire λ défini par

$$\lambda(x_1, x_2) = x_1 + ix_2 \quad \text{et} \quad \lambda^{-1}(z) = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\right).$$

En particulier, toute carte de X apparaît comme une fonction à valeurs complexes.

LEMME 3. *Soient ϕ et ψ deux cartes orientées de X centrées en un point x, ayant pour domaine le même ensemble simplement connexe U.*

(1) La différentielle logarithmique de ϕ appartient à $L^1_{\text{loc}}(U, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Son résidu au point x est égal à 1.

(2) Tout logarithme de $\phi^{-1}\psi$ demeure borné au voisinage de x.

La première assertion résulte immédiatement des définitions: il suffit d'introduire des coordonnées polaires dans la carte ϕ. Démontrons la seconde. Dans un voisinage ouvert convexe V de l'origine, le changement de cartes γ de ϕ dans ψ s'écrit

$$\gamma_1 = u_1x_1 + u_2x_2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = v_1x_1 + v_2x_2$$

(§ 3, lemme 2). Le jacobien de γ à l'origine est positif. Il est donné par la formule

$$\text{jac}(\gamma)(0) = u_1(0)v_2(0) - u_2(0)v_1(0).$$

On définit des fonctions h_1 et h_2 de $\mathscr{C}^\infty(V, \mathbf{C})$ en posant

$$h_1 = \frac{1}{2}(u_1+v_2) + \frac{1}{2i}(u_2-v_1) \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{2}(u_1-v_2) - \frac{1}{2i}(u_2+v_1).$$

On a alors

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = h_1 z + h_2 \bar{z} \quad \text{et} \quad \operatorname{jac}(\gamma)(0) = |h_1(0)|^2 - |h_2(0)|^2 .$$

Il existe par conséquent deux nombres réels ε et η strictement positifs tels que

$$|h_1(z) - h_1(0)| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |h_2(z)| + 2\eta \leqslant |h_1(0)|$$

pour tout nombre complexe z de module inférieur ou égal à ε. On en déduit que

$$\left| h_1(z) + \frac{\bar{z}}{z} h_2(z) - h_1(0) \right| \leqslant \eta + |h_2(z)| \leqslant |h_1(0)| - \eta .$$

En particulier, la fonction $z^{-1}\gamma$ qui n'est autre que l'expression de $\phi^{-1}\psi$ dans la carte ϕ possède un logarithme borné dans la couronne

$$\{ z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leqslant \varepsilon \} ,$$

ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *Pour tout chemin c d'origine x et d'extrémité y dans X, il existe une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) La différentielle logarithmique de h appartient à $L^1_c(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

(2) La restriction de h (resp. h^{-1}) à un voisinage convenable de x (resp. y) est une carte orientée de X centrée en x (resp. y).

(3) Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u .$$

Si de plus c est un lacet, on peut supposer que h appartient à $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$.

Nous démontrerons tout d'abord une propriété d'additivité que nous utiliserons plusieurs fois par la suite. Supposons que l'on ait

$$c = c_1 c_2$$

et qu'il existe des fonctions h_1 et h_2 vérifiant les conditions de la proposition pour les chemins c_1 et c_2. Désignons par a l'extrémité de c_1 (qui est aussi l'origine de c_2). La fonction $h_1 h_2$ possède toutes les propriétés requises, sauf qu'elle est peut être singulière au point a. Sur un voisinage ouvert convenable U de a, la fonction $h_1 h_2$ possède un logarithme f et ce logarithme

demeure borné au voisinage de a (lemme 3). Désignons par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(U, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de a et posons

$$h = h_1 h_2 \exp(-2i\pi\alpha f).$$

La fonction h appartient à $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ et l'on a pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u - \int_X d(\alpha f) \wedge u.$$

De plus, si l'on désigne par D_ε le disque de centre a et de rayon ε dans une carte orientée de centre a, on a

$$\int_X d(\alpha f) \wedge u = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\backslash D_\varepsilon} d(\alpha f) \wedge u = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon} \alpha f u = 0.$$

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{C}$ et que c est donné par la formule

$$c(t) = (2t-1, 0)$$

pour t compris entre 0 et 1. Désignons par X' le complémentaire de l'image de c. Il résulte du théorème 1 que la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

possède un logarithme sur X' et l'on pose

$$\begin{cases} h(z) = \exp\left(2i\pi\alpha(z)\log g(z)\right) & \text{si } z \in X' \\ h(z) = g(z) & \text{si } z \in X\backslash X' \end{cases}$$

en désignant par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de l'image de c. Vérifions la condition (3). Toute forme différentielle fermée sur X est exacte (lemme de Poincaré) et l'on a pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$,

$$\begin{aligned}\int_X \frac{dh}{h} \wedge df &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{X\backslash(D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon)} d\left(f\frac{dh}{h}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D'_\varepsilon} f\frac{dh}{h} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D''_\varepsilon} f\frac{dh}{h},\end{aligned}$$

où D'_ε (resp. D''_ε) désigne le disque de centre x (resp. y) et de rayon ε. En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément que l'on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D''_\varepsilon} f\frac{dh}{h} = 2i\pi\, f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D'_\varepsilon} f\frac{dh}{h} = -2i\pi\, f(x)$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 1.

On appelle *chemin joignant un point x à l'infini dans X* toute application propre et continue c de $\mathbf{R}_+$ dans X qui envoie l'origine sur x. Un tel chemin existe toujours si X est ouverte (exercice pour le lecteur). On définit de manière évidente l'intégrale d'une forme fermée de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ le long de c et l'on vérifie aisément qu'il existe une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) La différentielle logarithmique de h appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

(2) La restriction de h à un voisinage convenable de x est une carte orientée de X centrée en x.

(3) Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X u \wedge \frac{dh}{h} = \int_c u\,.$$

On peut de plus supposer que le support de h est contenu dans un voisinage arbitraire de l'image de c.

La formule de Stokes montre que la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^1) \times \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \to \mathbf{R}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \textstyle\int_X u \wedge v$$

induit par restriction et passage aux quotients une forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,.$$

THÉORÈME 2. *Les formes bilinéaires*

$$\Delta : \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \quad \textit{et} \quad \Delta : \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$$

sont non dégénérées.

Soit v une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(\ , v)$ soit nulle. Pour tout lacet c, il existe une fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\int_c v = \frac{1}{2i\pi}\int_X \frac{dh}{h} \wedge v = 0\,.$$

En particulier, toutes les périodes de v sont nulles et par conséquent v est exacte (théorème 1). Ceci montre que la première forme est non dégénérée.

Soit u une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(u, \ )$ soit nulle. Il résulte de ce qui précède que u est la différentielle d'une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et tout revient à montrer que l'on peut choisir f à support compact. Soit K un voisinage compact du support de u dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte (appendice II, lemme 5). Il est clair que f est constante sur chaque composante connexe de $X \backslash K$. Montrons qu'elle est constante sur $X \backslash K$.

Soient U et V les composantes connexes de deux points x et y de $X \backslash K$. On désigne par α un chemin joignant x à l'infini dans U, par β un chemin joignant y à l'infini dans V et par c un chemin joignant x à y dans X. Il existe des fonctions h_α et h_β dans $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x\}, \mathbf{C}^*)$ et $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{y\}, \mathbf{C}^*)$ respectivement dont le support est contenu dans le complémentaire de K, vérifiant les conditions de la remarque 1 pour les chemins α et β, et une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le chemin c. Comme dans la proposition 1, on voit que l'on peut supposer la fonction $h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}$ indéfiniment dérivable. On a alors

$$f(y) - f(x) = \int_c u = \frac{1}{2i\pi} \int_X u \wedge \frac{d(h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1})}{h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}} = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1. *La forme bilinéaire canonique*

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

est non dégénérée.

COROLLAIRE 2. *Si le groupe G est de génération finie, la forme bilinéaire Δ induit des isomorphismes*

$$\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})^* \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R})^* .$$

Remarque 2.

Le corollaire 2 du théorème 2 s'applique en particulier si X est compacte (appendice II, proposition 1). On voit alors que l'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ est de dimension paire puisque la forme bilinéaire Δ est non dégénérée et alternée.

L'ensemble G' défini par

$$G' = \{ c \in G \mid \textstyle\int_c u = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \}$$

est un sous-groupe contenant le groupe des commutateurs. Le quotient $\tilde{G}$ est donc un groupe abélien dont on vérifie aisément qu'il est sans torsion. Il résulte par ailleurs du théorème 1 que $\bar{\omega}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathrm{Hom}(\tilde{G}, \mathbf{Z})$.

Tout lacet c de X possède une image naturelle dans $\tilde{G}$, à savoir la classe du lacet $\alpha c \alpha^{-1}$ où α est un chemin joignant x_0 à un point de l'image de c. En particulier, toute courbe compacte orientée de X possède une image naturelle dans $\tilde{G}$ (appendice IV, théorème 1). D'autre part, si h désigne une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le lacet c, la classe dans $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$ de la différentielle logarithmique de h ne dépend que de la classe de c dans $\tilde{G}$. C'est une conséquence immédiate des définitions et du théorème 2. On a donc un homomorphisme canonique

$$\theta : \tilde{G} \to \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}) .$$

THÉORÈME 3. *L'homomorphisme θ est un isomorphisme.*

L'injectivité de θ résulte immédiatement des définitions.

Soit h une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{U})$. Pour toute valeur régulière z de h différente de 1, l'ensemble $h^{-1}(z)$ est une courbe compacte de X. C'est donc une réunion finie de courbes isomorphes à $\mathbf{U}$. Nous allons munir cette courbe d'une orientation naturelle. Désignons par f l'unique isomorphisme de $\mathbf{U}\backslash\{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U}\backslash\{1\}}$$

et par t l'image de z par cet isomorphisme. L'ensemble $(f \cdot h)^{-1}(]0, t])$ est une pièce de la surface différentielle $(f \cdot h)^{-1}(]0, 1[)$ dont le bord est précisément $h^{-1}(z)$. On munit ce bord de l'orientation induite.

Soient t' et t'' deux valeurs régulières de $f \cdot h$ avec t' strictement inférieur à t''. L'ensemble

$$Y(t', t'') = (f \cdot h)^{-1}([t', t''])$$

est une pièce compacte de X et l'on a pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\int_{(f \cdot h)^{-1}(t'')} u - \int_{(f \cdot h)^{-1}(t')} u = \int_{Y(t', t'')} du = 0 .$$

En particulier, la classe c de $h^{-1}(z)$ dans $\tilde{G}$ est indépendante de la valeur régulière z. D'autre part, sur l'ensemble ouvert $h^{-1}(\mathbf{U}\backslash\{1\})$, on a la relation

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h} = d(f \cdot h) .$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{Y(t',t'')}\frac{dh}{h}\wedge u = t''\int_{(f\cdot h)^{-1}(t'')} u - t'\int_{(f\cdot h)^{-1}(t')} u\,.$$

Le théorème de Sard (§ 1, théorème 2) montre qu'il existe des valeurs régulières de $f\cdot h$ arbitrairement voisines de 0 et de 1. On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X \frac{dh}{h}\wedge u = \lim_{\substack{t'\to 0\\ t''\to 1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{Y(t',t'')}\frac{dh}{h}\wedge u = \int_c u\,.$$

Autrement dit, l'image de c par l'application θ n'est autre que la classe de h dans $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$, ce qui démontre le théorème.

Remarque 3.

Si u et v sont des éléments de $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$ et $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ respectivement, on a

$$\int_X u\wedge v = \int_c v$$

où c désigne l'unique élément de $\tilde{G}$ défini par u. Ceci montre en particulier que Δ induit une forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}^1_c(X,\mathbf{Z}) & \times & \mathbf{H}^1(X,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{Z} \\ \theta\uparrow & & \downarrow\bar{\omega} & & \| \\ \tilde{G} & \times & \mathrm{Hom}(\tilde{G},\mathbf{Z}) & \xrightarrow{<\,,\,>} & \mathbf{Z} \end{array}$$

commutatif. La forme bilinéaire $<\ ,\ >$ étant non dégénérée par définition de $\tilde{G}$, il en est de même de Δ et l'on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})^*$. Si de plus $\tilde{G}$ est de type fini, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})^*$.

La forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire Δ s'appelle la *forme d'intersection de* X. Nous allons essayer d'expliquer pourquoi.

Soient g et h deux fonctions de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ respectivement et soit u l'application produit (g, h) de X dans $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$.

L'application de $g^{-1}(\mathbf{U}\backslash\{1\})$ dans $(\mathbf{U}\backslash\{1\})\times\mathbf{U}$ induite par u est propre. On désigne par ν son degré (§ 4, théorème 4). Notons que l'on a

$$\frac{-1}{4\pi^2}\int_X \frac{dg}{g}\wedge\frac{dh}{h} = \frac{-\nu}{4\pi^2}\int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}}\frac{dz}{z}\wedge\frac{dw}{w} = \nu\,.$$

Désignons par (z, w) une valeur régulière de u, avec z et w distincts de 1, par f l'unique isomorphisme de $\mathbf{U}\backslash\{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U}\backslash\{1\}}$$

et par (s_0, t_0) l'image de (z, w) par $f \times f$.

Les ensembles $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$ sont deux courbes de X naturellement orientées (démonstration du théorème 3), dont la première est compacte. Soit x un point de l'intersection de ces deux courbes. La restriction de $(f \times f) \cdot u$ à un voisinage convenable de x est une carte de X et l'image de $g^{-1}(z)$ (resp. $h^{-1}(w)$) par cette carte est la courbe

$$\{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s = s_0\} \quad (\text{resp. } \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid t = t_0\}).$$

Si la carte est orientée, on dit que le *nombre d'intersection de* $g^{-1}(z)$ *et* $h^{-1}(w)$ *au point* x *est* 1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la droite). Si la carte n'est pas orientée, on dit que le *nombre d'intersection de* $g^{-1}(z)$ *et* $h^{-1}(w)$ *au point* x *est* -1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la gauche). Ainsi le degré v apparaît comme le nombre de points d'intersection (avec signes) des deux courbes orientées $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$.

Nous allons maintenant calculer la classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X. On peut se limiter au cas où X est compacte: si X est ouverte, les deux groupes $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ et $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sont nuls (§ 2, corollaire du théorème 1 et § 4, théorème 3). On sait alors que l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$ (§ 4, théorème 3). La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X apparaît donc comme un nombre complexe.

Soit π un fibré en droites complexes sur X et soit x un point de X.

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π ayant pour domaine le même voisinage de x et par g la transition de Φ dans Ψ. Pour toute section s de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g\, s_\Phi .$$

En particulier, si s ne s'annule pas, le résidu au point x de la différentielle logarithmique de s_Φ est indépendant de Φ. C'est un entier que l'on appelle *l'ordre de* s *au point* x et que l'on désigne par $0_x(s)$.

Soit A un ensemble fini de X et soit s une section partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash A, \pi)$. On appelle *ordre de* s l'entier défini par

$$0(s) = \sum_{x \in A} 0_x(s) .$$

PROPOSITION 2. *On suppose X compacte et l'on désigne par A un ensemble fini de X. Pour toute section s partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash A, \pi)$, on a*

$$0(s) = \mathrm{ch}(\pi).$$

Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de A. Il existe deux familles $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'ensembles ouverts de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'ensemble U_j est le domaine d'une carte Φ_j de π et le domaine d'une carte orientée ψ_j de X centrée au point x_j.

(2) L'ensemble V_j est un disque relativement compact de centre x_j dans ψ_j.

(3) Les ensembles $U_1, \ldots, U_n$ sont deux à deux disjoints.

Puisque la section s est partout non nulle sur $X\backslash A$, le fibré π est trivial sur l'ensemble

$$V_0 = X\backslash \bigcup_{1 \leq j \leq n} \overline{V}_j.$$

Choisissons une trivialisation Φ_0 et désignons par g_{kj} la transition de Φ_j dans Φ_k pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 0 et n. On a

$$s_k = g_{kj} s_j$$

où s_j désigne l'expression de s dans Φ_j. Choisissons pour tout entier j compris entre 1 et n une fonction α_j de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $X\backslash V_j$ et à 0 au voisinage de x_j. Les formes différentielles $\alpha_j \dfrac{ds_j}{s_j}$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(U_j, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \alpha_k \frac{ds_k}{s_k} - \frac{1}{2i\pi} \alpha_j \frac{ds_j}{s_j} = \frac{1}{2i\pi} \frac{dg_{kj}}{g_{kj}}$$

en tout point de $V_j \cap V_k$. Par définition de la classe de Chern, on a donc

$$\mathrm{ch}(\pi) = \int_X u$$

où u désigne la forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$ obtenue par recollement des $\dfrac{1}{2i\pi} d\alpha_j \wedge \dfrac{ds_j}{s_j}$. Par conséquent,

$$\mathrm{ch}(\pi) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{U_j} d\alpha_j \wedge \frac{ds_j}{s_j} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_j} \frac{ds_j}{s_j} = 0(s)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur* X *est un entier.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et de l'existence de sections transverses (§ 2, lemme 5).

LEMME 4. *Soient* π *et* ρ *deux fibrés en droites complexes sur* X *et soient* s *et* t *deux sections transverses de* π *et* ρ *respectivement.*

(1) L'ordre de s *en un de ses zéros est égal à* 1 *ou* -1.

(2) Si l'ordre de s *est égal à l'ordre de* t *en tout point, alors* π *et* ρ *sont isomorphes.*

La première assertion résulte immédiatement des définitions. La démonstration de la seconde est laissée en exercice au lecteur (on procèdera comme dans la proposition 1 pour construire une section partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho^*)$).

Soit ϕ une carte orientée de X centrée en un point x. On désigne par U_0 son domaine et par U_1 l'ensemble $X \backslash \{x\}$. On définit un cocycle complexe de rang 1 subordonné au recouvrement (U_0, U_1) en posant

$$g_{1,0} = \phi^{-1} \quad \text{et} \quad g_{0,1} = \phi .$$

Désignons par π un fibré en droites complexes associé à ce cocycle. La fonction ϕ sur U_0 et la fonction constante 1 sur U_1 se recollent en une section transverse s de π et l'on a

$$\mathrm{ch}(\pi) = 0(s) = 0_x(s) = 1 .$$

Le lemme 4 montre que la classe ξ_x de π dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de x.

LEMME 5. *Le groupe* $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ *est engendré par les fibrés de la forme* ξ_x.

Soit ξ un fibré principal de groupe structural $\mathbf{C}^*$ sur X et soit π un fibré en droites complexes associé à ξ. On désigne par s une section transverse de π, par $x_1, \ldots, x_n$ les zéros d'ordre 1 de s et par $y_1, \ldots, y_m$ les zéros d'ordre -1 de s. On voit aisément à l'aide du lemme 4 que l'on a

$$\xi = \xi_{x_1} \cdots \xi_{x_n} \bar{\xi}_{y_1} \cdots \bar{\xi}_{y_m}$$

ce qui démontre l'assertion (§ 2, lemme 4).

THÉORÈME 4. *Si* X *est compacte, la classe de Chern induit un isomorphisme canonique de* $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ *sur* Z.

En vertu de ce qui précède, il suffit de montrer que ch est injective, ou ce qui revient au même, que tout fibré principal de la forme

$$\xi = \xi_x \xi_y^{-1}$$

est trivial. Désignons par π (resp. ρ) un fibré en droites complexes associé à ξ_x (resp. ξ_y) et par s (resp. t) une section transverse de π (resp. ρ) possédant un seul zéro d'ordre 1 au point x (resp. y). Soit c un chemin joignant x à y dans X et soit h une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1. La section $h\dfrac{t}{s}$ de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x, y\}, \pi\otimes\rho^*)$ est partout non nulle. Elle est d'ordre 0 au point x et au point y. L'assertion résulte alors du lemme 4.