Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: Chapitre 0 VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

CHAPITRE 0

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. DÉFINITIONS

On dit qu'un espace topologique est une *variété topologique* s'il est séparé et si tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ensemble ouvert d'un espace numérique.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et de quelques résultats classiques de topologie générale (que l'on trouve dans [1], chap. I, par exemple).

LEMME 1. *Toute variété topologique est un espace localement connexe, localement compact et localement de type dénombrable. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Elle est paracompacte.

(2) Chacune de ses composantes connexes est de type dénombrable.

(3) Chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés considérées sont paracompactes.

Soit X une variété topologique.

On appelle *carte de* X tout homéomorphisme ϕ d'un ensemble ouvert U de X (appelé le *domaine de* ϕ) sur un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soient x un point de U et r un nombre réel strictement positif. On appelle *boule de centre* x *et de rayon* r *dans* ϕ l'image réciproque de la boule $B(\phi(x), r)$ de centre $\phi(x)$ et de rayon r dans $\mathbf{R}^n$. On dit que ϕ est *centrée au point* x si $\phi(x)$ est l'origine.

Soient ϕ et ψ deux cartes de X de domaines respectifs U et V. On appelle *changement de cartes de* ϕ *dans* ψ l'homéomorphisme γ de $\phi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$ défini par

$$\gamma(x) = \psi(\phi^{-1}(x)).$$

On dit que ϕ et ψ sont *compatibles* si γ est un difféomorphisme (i.e. si γ et γ^{-1} sont indéfiniment dérivables).

On appelle *atlas de* X tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures différentielles de* X.

On appelle *variété différentielle* toute variété topologique munie d'une structure différentielle.

Soit X une variété différentielle.

On appelle (abusivement) *atlas de* X tout atlas appartenant à la structure différentielle de X et *carte de* X toute carte appartenant à un atlas de X.

Soit x un point de X. Toutes les cartes de X dont le domaine contient x prennent leurs valeurs dans le même espace numérique. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* X *au point* x et se désigne par $\dim_x (X)$. La fonction $\dim (X)$ est localement constante. On dit que X est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe différentielle* (resp. *surface différentielle*) toute variété différentielle de dimension pure 1 (resp. 2).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et soit f une application de X dans E. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, l'application f_ϕ de $\phi(U)$ dans E définie par

$$f_\phi(x) = f(\phi^{-1}(x))$$

s'appelle l'*expression de* f *dans* ϕ. Si ψ est une deuxième carte de domaine V et si γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ, on a

$$f_\phi(x) = f_\psi(\gamma(x))$$

pour tout point x de $\phi(U \cap V)$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que f est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de X (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de X). On désigne par $\mathscr{C}^k(X, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarquons que $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ et $\mathscr{C}^k(X, E)$ un sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$-module de $\mathscr{F}(X, E)$, en désignant par $\mathscr{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications de X dans E.

Si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, on munit l'ensemble $\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes des dérivées jusqu'à l'ordre k. C'est un espace de Fréchet.

Dans le cas général, l'expression dans une carte ϕ de domaine U induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k(X, E)$ dans $\mathscr{C}^k(\phi(U), E)$ et l'on munit

$\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\mathscr{C}_K^k(X, E)$ des fonctions dont le support est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, E)$.

L'ensemble $\mathscr{C}_c^k(X, E)$ des fonctions de $\mathscr{C}^k(X, E)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}_K^k(X, E)$.

Soient X et Y deux variétés différentielles et soit u une application continue de X dans Y.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V dans Y. On appelle *expression de* u *dans* (ϕ, ψ) l'application

$$u_{\psi\phi} : \phi\left(U \cap u^{-1}(V)\right) \to \psi(V)$$

définie par

$$u_{\psi\phi}(x) = \psi\left(u\left(\phi^{-1}(x)\right)\right).$$

On dit que u est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathscr{C}^k(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application u est un *isomorphisme* (ou un *difféomorphisme*) si elle est bijective et si u et u^{-1} sont indéfiniment dérivables.

Les variétés différentielles, les applications indéfiniment dérivables et leur composition usuelle forment une catégorie.

LEMME 2. *Soient* X *et* Y *deux variétés différentielles. Pour qu'une application continue* u *de* X *dans* Y *soit indéfiniment dérivable, il faut et il suffit que l'application* u^* *de* $\mathscr{F}(Y, \mathbf{R})$ *dans* $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ *définie par*

$$u^*(f) = f \cdot u$$

envoie $\mathscr{C}^\infty(Y, \mathbf{R})$ *dans* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient ϕ une carte de domaine U dans X et ψ une carte de domaine V contenant $u(U)$ dans Y. On désigne par $\psi_1, ..., \psi_m$ les fonctions coordonnées de ψ et par $v_1, ..., v_m$ les fonctions coordonnées de $u_{\psi\phi}$. Pour tout point x de $\phi(U)$, il existe une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $u(\phi^{-1}(x))$ (appendice I, lemme 3). Les fonctions $u^*(\alpha\psi_1), ..., u^*(\alpha\psi_m)$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$. On conclut en remarquant que leur expression dans ϕ coïncide avec $v_1, ..., v_m$ au voisinage de x.

Exemple 1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Tout isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de E sur $\mathbf{R}^n$ est une carte et deux telles cartes sont évidemment compatibles. Nous munirons toujours E de la structure différentielle correspondante.

Exemple 2.

On dit qu'un sous-espace Y d'une variété différentielle est une *sous-variété* s'il vérifie la condition suivante:

(SV) Pour tout point x de Y, il existe une carte ϕ de X centrée en x, de domaine U et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et un entier naturel m au plus égal à n tels que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap (\mathbf{R}^m \oplus 0).$$

Les cartes de la forme $\phi\,|_{U \cap Y}$ définissent une structure différentielle sur Y que l'on dit *induite par* X. Nous munirons toujours une sous-variété de la structure différentielle induite.

Notons que l'injection canonique de Y dans X est indéfiniment dérivable et que Y est un sous-espace localement fermé de X. Enfin tout ensemble ouvert de X est une sous-variété.

Exemple 3.

Soient X et Y deux variétés différentielles. Pour toute carte ϕ de X et toute carte ψ de Y, l'application $\phi \times \psi$ est une carte du produit $X \times Y$. Deux telles cartes sont évidemment compatibles. On munit toujours $X \times Y$ de la structure différentielle correspondante.

Les projections canoniques de $X \times Y$ dans chacun de ses facteurs sont indéfiniment dérivables. L'application diagonale induit un difféomorphisme de X sur une sous-variété fermée de $X \times X$.

Exemple 4.

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit u un homéomorphisme local de X dans Y.

Si Y est une variété topologique, il en est de même de chacune des composantes connexes de X (appendice II, théorème 1). De plus, pour toute structure différentielle de Y, il existe une structure différentielle de X et une seule faisant de u un difféomorphisme local.

Si u est surjective et si X est une variété topologique, il en est de même de Y. De plus, pour toute structure différentielle de X, il existe une structure différentielle de Y et une seule faisant de u un difféomorphisme local.

Exemple 5.

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ l'ensemble des droites issues de l'origine dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et par π la projection de $\mathbf{R}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ associant à tout point $(x_0, ..., x_n)$ la droite $(x_0 : ... : x_n)$ qu'il définit. Muni de la topologie quotient, l'espace $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est compact et connexe.

Pour tout entier j compris entre 0 et n, on pose

$$U_j = \{ (x_0 : ... : x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \mid x_j \neq 0 \}.$$

L'application ϕ_j de U_j dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\phi_j(x_0 : ... : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, ..., \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, ..., \frac{x_n}{x_j} \right)$$

est une carte de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. On vérifie aisément que ces cartes sont deux à deux compatibles. Muni de la structure différentielle correspondante, l'ensemble $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ s'appelle l'*espace projectif réel de dimension* n.

Soient X et Y deux variétés différentielles de dimension pure n et m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de X dans Y.

Pour tout point x de X, le rang à l'origine de l'application $u_{\psi\phi}$ est indépendant de la carte ϕ centrée en x et de la carte ψ centrée en $u(x)$. On l'appelle le *rang de* u *au point* x et on le désigne par $rg_x(u)$.

On dit que x est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* u si $rg_x(u)$ est égal à m (resp. strictement inférieur à m). On dit qu'un point y de Y est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* u si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des versions locales correspondantes (appendice I, théorèmes 1 et 4).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Supposons* n *égal à* m. *Si l'application* u *est de rang* n *en un point* x *de* X, *elle induit un isomorphisme d'un voisinage de* x *sur un voisinage de* $u(x)$.

THÉORÈME 2 (Sard). *Si* X *est dénombrable à l'infini, l'ensemble des valeurs critiques de* u *n'a pas de point intérieur. Si* y *est une valeur régulière de* u, *alors* $u^{-1}(y)$ *est une sous-variété de dimension* $n-m$ *dans* X.

Remarque 1.

En fait, l'ensemble des valeurs critiques de u est de mesure nulle. C'est une conséquence immédiate de la définition donnée au paragraphe 4 et du théorème de Sard donné dans l'appendice I.

LEMME 3. *Soit* X *une variété différentielle et soient* x *et* y *des points de* X. *Pour tout voisinage connexe* V *de* $\{x, y\}$, *il existe un difféomorphisme* u *de* X *sur elle-même tel que*

$$u(x) = y \qquad et \qquad u|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}.$$

En particulier, si X *est connexe, le groupe des difféomorphismes opère transitivement sur* X.

Il existe une famille $(\phi_j)_{0 \leq j \leq k}$ de cartes de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 0 et k, la carte ϕ_j est centrée au point x_j, son domaine U_j est contenu dans V et l'ensemble $\phi_j(U_j)$ est un cube de $\mathbf{R}^n$.

(2) Le point x_0 coïncide avec x, le point x_k coïncide avec y et pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, le point x_{j+1} appartient à U_j.

Il existe alors un difféomorphisme u_j de X sur elle-même tel que

$$u_j(x_j) = x_{j+1} \qquad\qquad u_j|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}$$

(appendice I, lemme 4). Il suffit de poser

$$u = u_{k-1} \cdot \ldots \cdot u_0 .$$

Soit X une variété différentielle et soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *partition de l'unité subordonnée à* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ toute famille $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions indéfiniment dérivables à valeurs réelles positives sur X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout indice ι, le support de α_ι est contenu dans U_ι.

(2) La famille des supports des α_ι est localement finie.

(3) Pour tout point x de X, la somme des $\alpha_\iota(x)$ (qui existe d'après (2)) est égale à 1.

PROPOSITION 1. *Pour tout recouvrement ouvert* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *de* X, *il existe une partition de l'unité* $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ *subordonnée à* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ [1]).

Il existe deux recouvrements ouverts $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ et $(W_\kappa)_{\kappa \in K}$ localement finis et plus fins que $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tels que V_κ soit un domaine de carte relativement compact dans X et W_κ un ensemble relativement compact dans V_κ ([1], chap. IX, § 4, théorème 3).

[1]) C'est ici la première fois que nous utilisons l'hypothèse de paracompacité que nous avons faite sur les variétés.

Désignons par β_κ une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles positives sur X dont le support est contenu dans V_κ et égale à 1 sur W_κ (appendice I, lemme 3).

Il suffit alors de poser

$$\alpha_\iota = \Big(\sum_{\tau(\kappa)=\iota} \beta_\kappa\Big) \Big(\sum_{\kappa \in K} \beta_\kappa\Big)^{-1}$$

où τ désigne une application de raffinement de K dans I.

COROLLAIRE. *Pour tout ensemble compact* K *de* X *et tout voisinage* U *de* K, *il existe une fonction* α *de* $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ *dont le support est contenu dans* U *et égale à 1 sur* K.

On dit qu'un atlas d'une variété différentielle est *orienté* si le jacobien des changements de cartes est positif. Deux atlas orientés sont dits *compatibles* si leur réunion est un atlas orienté. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *orientations de* X.

On dit qu'une variété différentielle est *orientable* si elle possède un atlas orienté. On dit qu'une variété différentielle est *orientée* si elle est orientable et munie d'une orientation.

Soit X une variété différentielle orientée. On appelle (abusivement) *atlas orienté de* X tout atlas appartenant à l'orientation de X et *carte orientée de* X toute carte appartenant à un atlas orienté de X.

LEMME 4. *Toute variété différentielle* X *orientable, connexe de dimension strictement positive possède exactement deux orientations.*

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux atlas orientés de X. Désignons par ϕ une carte de $\mathscr{A}$ et par ψ une carte de $\mathscr{B}$. Le signe du jacobien du changement de cartes de ϕ dans ψ est indépendant de ces cartes. Comme c'est une fonction localement constante, on voit que X possède au plus deux orientations.

D'autre part, l'ensemble des cartes de la forme $(-\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ où ϕ parcourt $\mathscr{A}$ est un atlas orienté de X non compatible avec $\mathscr{A}$ ce qui démontre l'assertion.

Remarque 2.

Toute variété différentielle connexe de dimension 0 est réduite à un point. Elle est évidemment orientable. Par convention, on dit qu'elle possède deux orientations notées 1 et -1.

§ 2. Fibrés vectoriels

Dans tout ce paragraphe, on désigne par $\mathbf{k}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on désigne par $M(p, q; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes (à coefficients dans $\mathbf{k}$), par $M(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p et par $G(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre p.

Rappelons que l'ensemble $G(p; \mathbf{k})$ est ouvert dans l'espace vectoriel $M(p; \mathbf{k})$ et que le passage à l'inverse est un difféomorphisme.

Soit X une variété différentielle et soit π une application de but X.

On appelle *carte réelle* (resp. *complexe*) de π toute bijection Φ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbf{R}^p$ (resp. $U \times \mathbf{C}^p$), où U est un ensemble ouvert de X appelé (abusivement) le *domaine de* Φ, vérifiant la relation

$$pr_1 \cdot \Phi = \pi \,|_{\pi^{-1}(U)} \,.$$

Pour tout point x de U, on désigne par Φ_x la bijection de la fibre π_x de π au point x sur $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$) définie par

$$\Phi_x(y) = (pr_2 \cdot \Phi)(y) \,.$$

Soient Φ et Ψ deux cartes réelles (resp. complexes) de π de domaines respectifs U et V. On dit que Φ et Ψ sont *compatibles* si pour tout point x de $U \cap V$ la bijection $\Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$ est linéaire et si l'application g de $U \cap V$ dans $M(p; \mathbf{R})$ (resp. $M(p; \mathbf{C})$) définie par

$$g(x) = \Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$$

est indéfiniment dérivable. Cette application s'appelle la *transition de* Φ *dans* Ψ.

On appelle *atlas réel* (resp. *complexe*) *de* π tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles réelles* (resp. *complexes*) *de* π.

On appelle *fibré vectoriel réel* (resp. *complexe*) *sur* X toute application de but X munie d'une structure vectorielle réelle (resp. complexe).

Soit π un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur X.

On appelle (abusivement) *atlas de* π tout atlas appartenant à la structure vectorielle de π et *carte de* π toute carte appartenant à un atlas de π.

La fibre de π en un point x est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel qui fait de Φ_x un isomorphisme pour toute carte Φ dont le domaine contient x. La dimension de cet espace vectoriel s'appelle (malheureusement) le *rang de* π *au point* x et se désigne par $rg_x(\pi)$. La fonction $rg(\pi)$ est localement constante. On dit que π est de *rang pur* si elle est constante.

On appelle *fibré en droites* tout fibré vectoriel de rang pur 1.

Désignons par $\tau(\pi)$ la source de π. Pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine, l'application $(\phi \cdot \pi, pr_2 \cdot \Phi)$ est une carte de $\tau(\pi)$. On vérifie aisément que deux telles cartes sont compatibles et l'on munit $\tau(\pi)$ de la structure différentielle correspondante. L'application π est indéfiniment dérivable, son rang est égal à la dimension de X (on prendra garde de ne pas confondre le rang du fibré vectoriel π avec le rang de l'application π).

On appelle *section de* π toute application s de X dans $\tau(\pi)$ telle que

$$\pi \cdot s = 1_X .$$

Pour toute carte Φ de domaine U, l'application s_Φ définie sur U par

$$s_\Phi(x) = \Phi_x\big(s(x)\big)$$

s'appelle l'*expression de* s *dans* Φ. Si Ψ est une deuxième carte de domaine V et si g désigne la transition de Φ dans Ψ, on a

$$s_\Psi(x) = g(x)\big(s_\Phi(x)\big)$$

pour tout point x de $U \cap V$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que s est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de π (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de π ou encore si elle appartient à $\mathscr{C}^k\big(X, \tau(\pi)\big)$). On désigne par $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{F}(X, \pi)$ de toutes les sections de π est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{F}(X, \mathbf{k})$-module et que $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ en est un sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{k})$-module.

L'expression dans une carte Φ de domaine U induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ dans $\mathscr{C}^k(U, \mathbf{k}^p)$ et l'on munit $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\mathscr{C}_K^k(X, \pi)$ des sections dont le support [1]) est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$.

L'ensemble $\mathscr{C}_c^k(X, \pi)$ des sections de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}_K^k(X, \pi)$.

Lemme 1. *On désigne par* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *un recouvrement ouvert de* X *et, pour tout couple* (ι, κ) *d'indices, par* $s_{\kappa\iota}$ *une section de* $\mathscr{C}^k(U_\iota \cap U_\kappa, \pi)$. *On suppose que l'on a*

$$s_{\kappa\lambda} - s_{\iota\lambda} + s_{\iota\kappa} = 0$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$. *Il existe alors pour tout indice* ι *une section* s_ι *de* $\mathscr{C}^k(U_\iota, \pi)$ *telle que l'on ait*

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Désignons par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (§ 1, proposition 1). La section $t_{\kappa\iota}$ obtenue en prolongeant par 0 la section $\alpha_\kappa s_{\kappa\iota}$ appartient à $\mathscr{C}^k(U_\iota, \pi)$ et l'on pose

$$s_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} t_{\kappa\iota} .$$

On vérifie aisément que ces sections ont toutes les propriétés requises.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) sur X et soit u une application de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$. On suppose que l'on a

$$\rho \cdot u = \pi$$

et que l'application u_x de π_x dans ρ_x induite par u est linéaire pour tout point x de X.

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π et ρ à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ et $U \times \mathbf{k}^r$ respectivement. On appelle *expression de* u *dans* (Φ, Ψ) l'application $u_{\Psi\Phi}$ de U dans $M(r, p; \mathbf{k})$ définie par

$$u_{\Psi\Phi}(x) = \Psi_x \cdot u_x \cdot \Phi_x^{-1} .$$

On dit que l'application u est un *morphisme* si elle vérifie les conditions ci-dessus et si son expression dans tout couple de cartes est indéfiniment dérivable (ou ce qui revient au même si c'est une application indéfiniment dérivable de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$). On désigne par $\mathscr{C}^\infty(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes de π dans ρ. C'est de manière naturelle un $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{k})$-module.

[1]) On appelle *support* d'une section continue le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle.

Les fibrés vectoriels sur X et leurs morphismes s'organisent de manière évidente en une catégorie.

LEMME 2. *Pour qu'un morphisme de* π *dans* ρ *soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il soit bijectif.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si u est bijective, on a

$$(u^{-1})_{\Phi\Psi}(x) = \Phi_x \cdot (u^{-1})_x \cdot \Psi_x^{-1} = \big(u_{\Psi\Phi}(x)\big)^{-1}$$

et par conséquent $(u^{-1})_{\Phi\Psi}$ est indéfiniment dérivable.

Exemple 1.

On appelle *fibré vectoriel produit de rang* p *sur* X et l'on désigne par $\mathbf{k}_X^p$ l'application pr_1 de $X \times \mathbf{k}^p$ dans X munie de la structure vectorielle dont un atlas est réduit à l'application identique de $X \times \mathbf{k}^p$. On dit qu'un fibré vectoriel π sur X est *trivial* s'il est isomorphe à un fibré produit $\mathbf{k}_X^p$. Il revient au même de dire qu'il existe p sections de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui engendrent la fibre en tout point.

Exemple 2.

Soit π un fibré vectoriel sur X. Pour toute sous-variété Y de X, l'application $\pi\,|_{\pi^{-1}(Y)}$ est naturellement munie d'une structure vectorielle. Le fibré vectoriel correspondant se désigne par $\pi\,|_Y$.

Exemple 3.

Soit π un fibré vectoriel sur X. On dit que la restriction ρ de π à une partie de $\tau(\pi)$ est un *sous-fibré* si elle vérifie la condition suivante:

(SF) Pour tout point x de X, il existe une carte Φ de π à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ dont le domaine contient x et un entier naturel r au plus égal à p tel que

$$\Phi\big(\rho^{-1}(U)\big) = U \times (\mathbf{k}^r \oplus 0)\,.$$

Les cartes de la forme $(1_U \times pr_1) \cdot \Phi$ définissent une structure vectorielle sur ρ que l'on dit *induite par* π. Nous munirons toujours un sous-fibré de la structure vectorielle induite.

Notons que $\tau(\rho)$ est une sous-variété fermée de $\tau(\pi)$ et que l'injection canonique est un morphisme.

La relation

$$« \;\pi(y') = \pi(y'') \quad \text{et} \quad y' - y'' \in \tau(\rho)\; »$$

est une relation d'équivalence sur $\tau(\pi)$. On désigne par σ l'application déduite de π par passage au quotient. On vérifie aisément que les applications de la forme

$$(1_U \times pr_2) \cdot \Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{k}^{p-r}$$

où Φ vérifie (SF) induisent par passage au quotient des cartes de σ deux à deux compatibles. Munie de la structure vectorielle correspondante, l'application σ s'appelle le *fibré quotient de* π *par* ρ. Notons que la projection canonique de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\sigma)$ est un morphisme.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels sur X.

On désigne par Φ et Φ' (resp. Ψ et Ψ') des cartes de π (resp. ρ) de domaines respectifs U et U' et par g (resp. h) la transition de Φ dans Φ' (resp. de Ψ dans Ψ').

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \oplus \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = \big(x, (\Phi_x \oplus \Psi_x)(y)\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = \big(x, (\Phi'_x \oplus \Psi'_x)(y)\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \oplus h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle la *somme directe de* π *et* ρ et se désigne par $\pi \oplus \rho$.

En particulier, pour tout entier naturel q, on désigne par π^q le fibré vectoriel somme directe de q exemplaires de π.

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \otimes \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = \big(x, (\Phi_x \otimes \Psi_x)(y)\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = \big(x, (\Phi'_x \otimes \Psi'_x)(y)\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \otimes h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *produit tensoriel de* π *et* ρ et se désigne par $\pi \otimes \rho$.

Supposons π de rang p. Pour tout entier j compris entre 1 et p, on désigne par e_j le j^e vecteur de base dans $\mathbf{k}^p$ et par t_j (resp. t'_j) la section de π sur U (resp. U') définie par

$$t_j(x) = \Phi_x^{-1}(e_j) \qquad (\text{resp. } t'_j(x) = \Phi_x'^{-1}(e_j)).$$

Pour tout point x de $U \cap U'$, on a

$$t_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{kj}(x)\, t'_k(x)$$

où les g_{kj} désignent les coefficients de la matrice g. D'autre part, la restriction à U (resp. U') de toute section s de $\pi \otimes \rho$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s\,|_U = \sum_{1 \leq j \leq p} t_j \otimes u_j \qquad (\text{resp} \quad s\,|_{U'} = \sum_{1 \leq j \leq p} t'_j \otimes u'_j)$$

où les u_j (resp. u'_j) sont des sections de ρ sur U (resp. U'). Un calcul élémentaire montre que ces sections sont liées par les relations

$$u'_j = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{jk} u_k .$$

Désignons par σ un troisième fibré vectoriel sur X et par δ un morphisme de $\pi \otimes \rho$ dans σ. Pour toute section u de π et toute section v de ρ, on définit une section $\delta(u, v)$ de σ en posant

$$\delta(u, v)(x) = \delta\big(u(x) \otimes v(x)\big).$$

On définit ainsi une application bilinéaire de $\mathscr{F}(X, \pi) \times \mathscr{F}(X, \rho)$ dans $\mathscr{F}(X, \sigma)$. De plus, on vérifie aisément que si u est une section de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ et v une section de $\mathscr{C}^k(X, \rho)$, alors $\delta(u, v)$ est une section de $\mathscr{C}^k(X, \sigma)$.

On dit que δ est une *dualité* si pour tout point x de X, l'application bilinéaire de $\pi_x \times \rho_x$ dans σ_x déduite de δ_x induit des isomorphismes de π_x sur $\operatorname{Hom}(\rho_x, \sigma_x)$ et de ρ_x sur $\operatorname{Hom}(\pi_x, \sigma_x)$.

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x^*$ [1]) dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = (x, y \cdot \Phi_x^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \Lambda'(x, y) = (x, y \cdot \Phi_x'^{-1}).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = {}^t g(x)^{-1}.$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *dual de* π et se désigne par π^*.

On construit de la même manière des fibrés vectoriels $\Lambda^q \pi$ et $\Lambda \pi$.

---

[1]) Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbf{k}$, on désigne par E^* l'espace dual de E, i.e. l'espace des applications linéaires de E dans $\mathbf{k}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbf{k}$. On appelle *forme hermitienne sur* E toute application α de $E \times E$ dans $\mathbf{k}$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout vecteur t de E, l'application partielle $\alpha(\ ,t)$ est $\mathbf{k}$-linéaire.

(2) Pour tout couple (t', t'') de vecteurs de E, on a

$$\alpha(t', t'') = \overline{\alpha(t'', t')}.$$

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{R}$, une forme hermitienne est donc une forme bilinéaire symétrique. On désigne par Herm (E) l'espace vectoriel (réel) des formes hermitiennes sur E. Sa dimension est égale à $\frac{p(p+1)}{2}$ si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{R}$, à p^2 si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$. Les formes hermitiennes sur $\mathbf{k}^p$ s'identifient de manière naturelle à des matrices de $M(p; \mathbf{k})$.

On dit qu'une forme hermitienne est *positive* (resp. *positive non dégénérée*) si le nombre réel $\alpha(t, t)$ est positif (resp. strictement positif) pour tout vecteur t non nul.

Reprenons le cours de notre histoire. Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X}$ Herm (π_x) dans X d'une structure vectorielle. On définit deux cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, \alpha) = \left(x, \alpha \cdot (\Phi_x^{-1} \times \Phi_x^{-1})\right) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, \alpha) = \left(x, \alpha \cdot (\Phi_x'^{-1} \times \Phi_x'^{-1})\right).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par le produit de matrices

$$f(x) = {}^t\overline{g(x)}^{-1} \, \alpha \, g(x)^{-1}$$

pour tout point x de $U \cap U'$ et toute forme hermitienne α sur $\mathbf{k}^p$. En particulier, ces cartes sont compatibles. Le fibré vectoriel réel correspondant se désigne par Herm (π).

On appelle *métrique hermitienne sur* π toute section de $\mathscr{C}^\infty\left(X, \text{Herm}(\pi)\right)$ qui induit une forme hermitienne positive non dégénérée sur toutes les fibres.

Désignons par α une métrique hermitienne sur π.

Pour toute section s de π, on définit une fonction $|s|$ à valeurs réelles positives sur X en posant

$$|s|(x) = \left(\alpha(x)\left(s(x), s(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit aussi une application u de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\pi^*)$ en posant

$$u(x, y) = \left(x, \alpha(\ , y)\right).$$

On vérifie aisément que u est un isomorphisme de fibrés vectoriels réels qui permet d'identifier π à son dual π^*.

LEMME 3. *Tout fibré vectoriel π sur X possède une métrique hermitienne.*

L'assertion est évidente si π est trivial. Sinon, on désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X formé de domaines de cartes de π et par $(\lambda_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour tout indice ι, il existe une métrique hermitienne α_ι sur $\pi\,|_{U_\iota}$ et l'on pose

$$\alpha = \sum_{\iota\in I} \lambda_\iota \alpha_\iota$$

On vérifie aisément que α est une métrique hermitienne sur π.

Désignons par X une variété différentielle, par p un entier naturel et par $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *cocycle réel* (resp. *complexe*) *de rang* p *subordonné à* $\mathscr{U}$ toute famille $(g_{\kappa\iota})_{(\iota,\kappa)\in I\times I}$, où $g_{\kappa\iota}$ est une application indéfiniment dérivable de $U_\iota \cap U_\kappa$ dans $G(p;\mathbf{R})$ (resp. $G(p;\mathbf{C})$) vérifiant la relation

$$g_{\lambda\iota} = g_{\lambda\kappa}\, g_{\kappa\iota}$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$.

On dit que deux tels cocycles $(g_{\kappa\iota})$ et $(h_{\kappa\iota})$ sont *cobordants* s'il existe une famille (f_ι), où f_ι est une application indéfiniment dérivable de U_ι dans $G(p;\mathbf{k})$ vérifiant la relation

$$f_\kappa = h_{\kappa\iota} f_\iota\, g_{\iota\kappa}$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des cocycles de rang p subordonnés à $\mathscr{U}$. L'ensemble quotient se désigne par $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, G(p;\mathbf{k}))$.

Soit $\mathscr{V} = (V_\kappa)_{\kappa\in K}$ un second recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathscr{U}$ et soit τ une application de raffinement de K dans I. Pour tout cocycle $g = (g_{\kappa\iota})$ de rang p subordonné à $\mathscr{U}$, on définit un cocycle $\tau^*(g)$ de rang p subordonné à $\mathscr{V}$ en posant

$$\tau^*(g)_{\kappa\iota} = g_{\tau(\kappa)\tau(\iota)}\,|\,_{V_\iota\cap V_\kappa}\,.$$

L'application τ^* est compatible avec la relation de cobordance. De plus, si τ' est une autre application de raffinement, on a

$$g_{\tau'(\kappa)\tau(\kappa)} = g_{\tau'(\kappa)\tau'(\iota)}\, g_{\tau'(\iota)\tau(\iota)}\, g_{\tau(\iota)\tau(\kappa)}\,.$$

Ceci montre que l'application de $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, G(p;\mathbf{k}))$ dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}, G(p;\mathbf{k}))$ déduite de τ^* par passage aux quotients est indépendante de τ. On la désigne par $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$.

Si $\mathscr{W}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathscr{V}$, on a

$$\sigma(\mathscr{W}, \mathscr{V}) \cdot \sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U}) = \sigma(\mathscr{W}, \mathscr{U}) .$$

En particulier, si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont équivalents (i.e. si chacun d'eux est plus fin que l'autre), les applications $\sigma(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ et $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

On fixe une fois pour toutes un système cofinal de recouvrements ouverts de X et l'on désigne par $\mathrm{Pic}(X, G(p; \mathbf{k}))$ la limite inductive des ensembles $\mathrm{Pic}\big(\mathscr{U}, G(p; \mathbf{k})\big)$ et des applications $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ lorsque $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ parcourent ce système. Les éléments de $\mathrm{Pic}\big(X, G(p; \mathbf{k})\big)$ s'appellent les *fibrés principaux de groupe structural* $G(p; \mathbf{k})$ *sur* X.

Soit π (resp. ρ) un fibré vectoriel de rang pur p (resp. r) sur X et soit $(\Phi_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(\Psi_\iota)_{\iota \in I}$) un atlas de π (resp. ρ). On suppose que Φ_ι et Ψ_ι ont même domaine U_ι et l'on désigne par $g_{\kappa\iota}$ (resp. $h_{\kappa\iota}$) la transition de Φ_ι dans Φ_κ (resp. de Ψ_ι dans Ψ_κ). L'expression dans (Φ_ι, Ψ_ι) d'un morphisme u de π dans ρ est une application indéfiniment dérivable u_ι de U_ι dans $M(r, p; \mathbf{k})$ et l'on a

$$u_\kappa = h_{\kappa\iota} u_\iota \, g_{\iota\kappa} .$$

En particulier, on voit que π et ρ sont isomorphes si et seulement si les cocycles $(g_{\kappa\iota})$ et $(h_{\kappa\iota})$ sont cobordants. On en déduit que l'image $\delta(\pi)$ de $(g_{\kappa\iota})$ dans $\mathrm{Pic}\big(X, G(p; \mathbf{k})\big)$ ne dépend que de π (et non de l'atlas (Φ_ι)). On l'appelle le *fibré principal associé à* π.

Nous allons montrer que tout fibré principal de groupe structural $G(p; \mathbf{k})$ sur X est associé à un fibré vectoriel de rang pur p.

Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang p subordonné à ce recouvrement. Pour tout couple d'indices (ι, κ), on définit une bijection $\Phi_{\kappa\iota}$ de $(U_\iota \cap U_\kappa) \times \mathbf{k}^p$ sur lui-même en posant

$$\Phi_{\kappa\iota}(x, t) = \big(x, g_{\kappa\iota}(x)(t)\big) .$$

En tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$, on a

$$\Phi_{\lambda\iota} = \Phi_{\lambda\kappa} \cdot \Phi_{\kappa\iota} .$$

Désignons par Y l'ensemble obtenu par recollement des $U_\iota \times \mathbf{k}^p$ au moyen des applications $\Phi_{\kappa\iota}$ et par π l'application de Y dans X obtenue par recollement des premières projections. Pour tout indice ι, l'application canonique de $U_\iota \times \mathbf{k}^p$ dans $\pi^{-1}(U_\iota)$ est une bijection et la bijection réciproque Φ_ι est une carte de π. La transition de Φ_ι dans Φ_κ n'est autre que $g_{\kappa\iota}$ ce qui démontre l'assertion.

Scholie. *Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de rang pur* p *sur* X *sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux de groupe structural* $G(p;\mathbf{R})$ (*resp.* $G(p;\mathbf{C})$) *sur* X.

Le groupe $G(1;\mathbf{k})$ étant commutatif, on vérifie aisément que la multiplication point par point des applications induit une structure de groupe commutatif sur $\mathrm{Pic}\big(X, G(1;\mathbf{k})\big)$. Si π et ρ sont des fibrés en droites sur X, on a

$$\delta(\pi\otimes\rho) = \delta(\pi)\,\delta(\rho) \qquad \text{et} \qquad \delta(\pi^*) = \delta(\pi)^{-1}\,.$$

Soit ξ un fibré principal de groupe structural $\mathbf{C}^*$ sur X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang 1 représentant ξ et subordonné à un recouvrement $(U_\iota)_{\iota\in I}$. Il est clair que la classe de $(\overline{g_{\kappa\iota}})$ dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de ξ. On la désigne par $\overline{\xi}$.

Lemme 4. *Le fibré principal* $\overline{\xi}$ *est l'inverse du fibré principal* ξ.

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $f_{\kappa\iota}$ le logarithme de la fonction $|g_{\kappa\iota}|^2$. Il existe pour tout indice ι une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{R})$ telle que

$$f_{\kappa\iota} = f_\iota - f_\kappa$$

sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (lemme 1) et l'on pose

$$g_\iota = \exp(f_\iota)\,.$$

On a alors la relation

$$g_\iota = |g_{\kappa\iota}|^2\, g_\kappa = g_{\iota\kappa}^{-1}\, g_\kappa\, \overline{g_{\kappa\iota}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur p sur X.

Désignons par Φ et Ψ deux cartes de π ayant pour domaine le même voisinage U d'un point x de X et par g la transition de Φ dans Ψ. Pour toute section s de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g \cdot s_\Phi\,.$$

On dit que s est *transverse (à la section nulle) au point* x si $s(x)$ est non nul ou si s_Φ est de rang p au point x. En vertu de ce qui précède, cette condition est indépendante de Φ. On dit que s est *transverse (à la section nulle)* si elle est transverse en tout point de X.

LEMME 5. *Les sections transverses de π forment une partie dense de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$.*

Supposons X connexe; l'espace $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ est alors un espace de Fréchet. Pour toute partie compacte K de X, on désigne par W_K l'ensemble des sections de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui sont transverses en tout point de K. En vertu du théorème de Baire ([1], chap. IX, § 5, n^o 3, théorème 1), il suffit de montrer que W_K est ouvert et dense dans $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$. Pour ce faire, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et que π est le fibré produit $\mathbf{R}^p_X$. Les sections de π s'identifient alors aux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et les sections transverses aux fonctions ayant l'origine pour valeur régulière.

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}^p)$. Posons

$$g(x) = |f(x)| + \sum_j |A_j(f)(x)|$$

où les $A_j(f)$ désignent le déterminant des mineurs d'ordre p extraits de la matrice jacobienne de f. Pour que l'origine soit une valeur régulière de f, il faut et il suffit que g ne s'annule pas sur X. On en déduit aisément que W_K est ouvert. D'autre part, le théorème de Sard (appendice I, théorème 4) montre qu'en ajoutant à f un vecteur convenable, l'origine devient une valeur régulière, d'où l'assertion.

Remarque 1.

Si p est strictement supérieur à n, la même démonstration montre que le fibré π possède une section indéfiniment dérivable partout non nulle.

LEMME 6. *Soient x_0 et x_1 deux points de X et soit s une section de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$. On suppose que x_0 est l'unique zéro de s dans un voisinage connexe V de $\{x_0, x_1\}$. Il existe alors une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui coïncide avec s sur $X \backslash V$ et dont x_1 est l'unique zéro dans V. Si de plus s est transverse, on peut choisir t transverse.*

On se ramène aisément au cas où x_0 et x_1 sont contenus dans un ensemble ouvert connexe U lui-même relativement compact dans le domaine d'une carte Φ de π contenu dans V. Il existe un difféomorphisme u de X tel que

$$u(x_1) = x_0 \qquad u|_{X \backslash U} = 1_{X \backslash U}$$

(§ 1, lemme 3). On vérifie aisément que la section t définie par

$$\begin{aligned} t(x) &= s(x) && \text{si } x \in X \backslash U \\ t(x) &= (\Phi_x^{-1} \cdot \Phi_{u(x)})(s(u(x))) && \text{si } x \in U \end{aligned}$$

a toutes les propriétés requises.

THÉORÈME 1. *Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur n sur X. On suppose que X est ouverte* [1]. *Il existe alors une section s de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ partout non nulle.*

On suppose X connexe et l'on désigne par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X telles que $X \backslash K_j$ n'ait aucune composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6). On va construire par récurrence sur j une section transverse s_j de π qui coïncide avec s_{j-1} sur K_{j-1} et qui ne s'annule pas sur K_j. Ceci établira l'assertion. On suppose que K_0 est vide et l'on prend pour s_0 une section transverse quelconque de π (il en existe en vertu du lemme 5). Supposons s_j construite; on désigne par A l'ensemble de ses zéros (c'est un ensemble fermé et discret puisqu'elle est transverse et puisque le rang de π est égal à la dimension de X) et par $\{x_1, ..., x_p\}$ l'intersection de A et de K_{j+1}. Il existe un ensemble de points $\{y_1, ..., y_p\}$ deux à deux distincts dans $X \backslash (K_{j+1} \cup A)$ tel que x_k et y_k se trouvent dans la même composante connexe de $X \backslash K_j$.

Désignons par V_1 un voisinage connexe de $\{x_1, y_1\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_1 soit le seul zéro de s_j dans V_1. Il existe une section transverse t_1 de π qui coïncide avec s_j sur $X \backslash V_1$ et dont le seul zéro dans V_1 soit y_1 (lemme 6). On construit de la même manière et par récurrence sur k un voisinage connexe V_k de $\{x_k, y_k\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_k soit le seul zéro de t_{k-1} dans V_k et une section transverse t_k de π qui coïncide avec t_{k-1} sur $X \backslash V_k$ et dont le seul zéro dans V_k soit y_k. Il suffit alors de prendre pour s_{j+1} la section t_p.

COROLLAIRE. *Tout fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface différentielle ouverte est trivial.*

Remarque 2.

Tout fibré vectoriel complexe π sur une surface différentielle ouverte est trivial: la démonstration se fait par récurrence sur le rang de π. Elle est laissée en exercice au lecteur (voir chap. V, § 4, théorème 6).

§ 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété différentielle de dimension pure n.

---

[1] On dit qu'une variété est *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est compacte.

Pour tout point x de X, l'algèbre A_x^k des germes en x de fonctions k-fois continûment dérivables à valeurs réelles possède un unique idéal maximal $\underline{m}(A_x^k)$, à savoir l'idéal des germes de fonctions qui s'annulent au point x.

Soient ϕ et ψ deux cartes de X dont les domaines contiennent x. On désigne par γ le changement de cartes de ϕ dans ψ. Pour toute fonction f continûment dérivable au voisinage de x, on a

$$Df_\phi(\phi(x)) = Df_\psi(\psi(x)) \cdot D\gamma(\phi(x)).$$

En particulier, la condition

$$Df_\phi(\phi(x)) = 0$$

ne dépend que du germe de f au point x (et non de la carte ϕ).

Supposons k strictement positif. On dit qu'un germe de $\underline{m}(A_x^k)$ est *stationnaire* s'il vérifie cette condition. L'ensemble des germes stationnaires est un idéal $\underline{a}(A_x^k)$ de A_x^k et on a les inclusions

$$\underline{m}^2(A_x^k) \subset \underline{a}(A_x^k) \subset \underline{m}(A_x^k).$$

Pour toute carte ϕ de X dont le domaine contient x, on désigne par $\varepsilon_{x,\phi}$ l'application linéaire de A_x^k dans $(\mathbf{R}^n)^*$ définie par

$$\varepsilon_{x,\phi}(f) = Df_\phi(\phi(x)).$$

LEMME 1. *Par restriction et passage au quotient, l'application* $\varepsilon_{x,\phi}$ *induit un isomorphisme de* $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ *sur* $(\mathbf{R}^n)^*$.

L'application induite est injective par définition même de $\underline{a}(A_x^k)$. D'autre part, pour toute forme linéaire α sur $\mathbf{R}^n$, le germe en x de la fonction

$$\alpha \cdot \phi - (\alpha \cdot \phi)(x)$$

a pour image α ce qui démontre l'assertion.

On appelle *espace cotangent à* X *au point* x et l'on désigne par Ω_x^1 l'espace vectoriel $\underline{m}(A_x^1)/\underline{a}(A_x^1)$. Il résulte du lemme 1 que Ω_x^1 est de dimension n et que l'injection canonique de A_x^k dans A_x^1 induit un isomorphisme de $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ sur Ω_x^1 pour tout entier k strictement positif.

LEMME 2. *Il existe des germes* $u_1, \ldots, u_n$ *de* $\underline{m}(A_x^\infty)$ *tels que tout germe* f *de* $\underline{a}(A_x^k)$ *s'écrive*

$$f = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j u_j$$

avec $f_1, \ldots, f_n$ *dans* $\underline{m}(A_x^{k-1})$.

En particulier, on a

$$\underline{a}(A_x^\infty) = \underline{m}^2(A_x^\infty).$$

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ et tout point y de X, on a

$$f(y) - f(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j(y)(y_j - x_j)$$

où l'on a posé

$$f_j(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(ty + (1-t)x)\,dt.$$

On en déduit aisément l'assertion.

On appelle *différentielle d'un germe f de A_x^1* et l'on désigne par df la classe dans Ω_x^1 du germe $f - f(x)$.

LEMME 3. *L'application d de A_x^1 dans Ω_x^1 est linéaire et l'on a*

$$d(fg) = g(x)\,df + f(x)\,dg$$

pour tout couple (f, g) d'éléments de A_x^1.

La première assertion est évidente. La seconde résulte de la formule

$$\begin{aligned} fg - f(x)g(x) &= g(x)(f - f(x)) + f(x)(g - g(x)) \\ &\quad + (f - f(x))(g - g(x)). \end{aligned}$$

Soit ϕ une carte de domaine U dans X. On désigne par $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et par $\phi_1, \ldots, \phi_n$ les fonctions coordonnées de ϕ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$, on définit des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \phi_n}$ de $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbf{R})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x) = \varepsilon_{x,\phi}(f_x)(e_j) = \frac{\partial f_\phi}{\partial x_j}(\phi(x)).$$

Remarquons que si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si ϕ est l'injection canonique de X dans $\mathbf{R}^n$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_j}$ coïncide avec la dérivée partielle usuelle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la règle de dérivation des fonctions composées.

Lemme 4. *Soient* ϕ *et* ψ *deux cartes de* X *et soit* f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$. *On a*

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \phi_j}.$$

Lemme 5. *Pour toute carte* ϕ *de* X *et pour tout point* x *du domaine de* ϕ, *les différentielles des germes* $\phi_{1,x}, \ldots, \phi_{n,x}$ *forment une base de* Ω_x^1. *Pour tout germe* f *de* A_x^1, *on a*

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x)\, d\phi_{j,x}.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et du lemme 1.

Soit π la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega_x^1$ dans X et soient ϕ et ψ des cartes de domaines respectifs U et V dans X. Le lemme 1 montre que les applications

$$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to U \times (\mathbf{R}^n)^* \quad \text{et} \quad \tilde{\psi} : \pi^{-1}(V) \to V \times (\mathbf{R}^n)^*$$

définies par

$$\tilde{\phi}(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y))$$

sont des cartes de π. Ces cartes sont compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^tD\gamma(\phi(x))^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Le fibré vectoriel réel de rang n ainsi défini s'appelle le *fibré cotangent à* X et se désigne par Ω^1 (ou $\Omega^1(X)$ s'il y a risque de confusion).

Pour tout entier r, on désigne par Ω^r le fibré vectoriel $\Lambda^r \Omega^1$ et par Ω le fibré vectoriel $\Lambda \Omega^1$.

On appelle *forme différentielle* toute section de Ω. La structure des fibres munit l'ensemble $\mathscr{F}(X, \Omega)$ de toutes les formes différentielles d'une structure de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$-algèbre graduée. Notons que $\mathscr{C}^k(X, \Omega)$ en est une sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$-algèbre.

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de degré* r si elle prend ses valeurs dans Ω^r.

On appelle *différentielle d'une fonction* f *de* $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ et l'on désigne par df la forme différentielle homogène de degré 1 définie par

$$df(x) = d(f_x).$$

Avec les notations précédentes, on a

$$(df)_{\phi}^{\sim} = Df_{\phi} \cdot \phi = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j} d\phi_j .$$

En particulier, si f appartient à $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$, alors df appartient à $\mathscr{C}^{k-1}(X, \Omega^1)$.

Il résulte du lemme 5 que la restriction à U de toute forme différentielle s homogène de degré r s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s \mid_U = \sum_{J \in S_r(n)} u_J \, d\phi_J$$

où $S_r(n)$ désigne l'ensemble des suites strictement croissantes de r entiers compris entre 1 et n et où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_r} \qquad J = (j_1, \ldots, j_r) .$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions et de ce qui précède (§ 1, proposition 1, corollaire).

LEMME 6. *Pour tout point x de X, il existe un voisinage V de x et des fonctions $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ vérifiant la condition suivante: pour toute forme différentielle s de $\mathscr{C}^k(X, \Omega^r)$, il existe des fonctions s_J de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ telles que*

$$s \mid_V = \sum_{J \in S_r(n)} s_J \, dv_J \mid_V .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une application $\mathbf{R}$-linéaire et une seule d de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Omega)$ vérifiant les conditions suivantes:*

(1) La restriction de d à $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ coïncide avec la différentielle des fonctions.

(2) Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$d(df) = 0 .$$

(3) Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$, avec u homogène de degré r, on a

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

De plus, l'opérateur d vérifie les conditions suivantes:

(4) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$, le support de du est contenu dans le support de u.

(5) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^2(X, \Omega)$, on a

$$d(du) = 0 .$$

(6) Pour toute forme différentielle u *de* $\mathscr{C}^k(X, \Omega^r)$, *la forme* du *appartient à* $\mathscr{C}^{k-1}(X, \Omega^{r+1})$.

Montrons tout d'abord que si d vérifie (1), (2) et (3), il vérifie aussi (4), (5) et (6).

Soit u une forme différentielle de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ nulle sur un ensemble ouvert V de X. Pour tout point x de V, il existe une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de x. On a d'après (1) et (3),

$$0 = d(\alpha u) = d\alpha \wedge u + \alpha du$$

et puisque le germe de $\alpha - 1$ au point x est stationnaire, on en déduit que $du(x)$ est nul.

Pour démontrer (5), on peut supposer u de la forme

$$u = f dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_r$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ et $v_1, \ldots, v_r$ des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ (lemme 6). Par récurrence sur r, on déduit alors de (1), (2) et (3) que l'on a

$$du = df \wedge dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_r$$

(ce qui en passant démontre (6) et l'unicité de d). De même,

$$d(du) = 0 .$$

Il reste à montrer l'existence de d. Par localisation et unicité, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J \, dx_J ,$$

où les fonctions u_J appartiennent à $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ et pour tout entier j compris entre 1 et n, on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{J \in S_r(n)} \frac{\partial u_J}{\partial x_j} dx_J \quad \text{et} \quad du = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j} .$$

Si u est de degré 0, cette définition coïncide avec celle de la différentielle d'une fonction. Si de plus u appartient à $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} d(du) &= \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k = 0 . \end{aligned}$$

Montrons enfin la condition (3). On peut supposer u et v de la forme

$$u = f\,dx_J \quad \text{et} \quad v = g\,dx_K$$

où J appartient à $S_r(n)$ et K à $S_s(n)$. On a alors

$$d(u \wedge v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial (fg)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\,dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K + (-1)^r \sum_{1 \leq j \leq n} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_J \wedge dx_j \wedge dx_K$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

On appelle *différentielle d'une forme* u *de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ la forme différentielle du définie dans le théorème 1. On dit qu'une forme différentielle est *fermée* (resp. *exacte*) si elle appartient au noyau (resp. à l'image) de d.

Soit h une application indéfiniment dérivable de X dans une variété différentielle Y de dimension pure m.

Pour tout point x de X, la composition des applications induit un homomorphisme

$$h_x^* : A^1_{h(x)} \to A^1_x$$

qui envoie l'idéal maximal (resp. l'idéal des germes stationnaires) de $A^1_{h(x)}$ dans l'idéal correspondant de A^1_x. Par restriction et passage aux quotients, on en déduit une application linéaire de $\Omega^1_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega^1_x(X)$ que l'on appelle l'*application cotangente à* h *au point* x. Par passage à l'algèbre extérieure, cette application définit un homomorphisme de $\Omega_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega_x(X)$ que l'on désigne encore par h_x^*.

Pour toute forme différentielle u sur Y, on définit une forme différentielle $h^*(u)$ sur X appelée l'*image réciproque de* u *par* h en posant

$$h^*(u)(x) = h_x^*(u(h(x)))\,.$$

Cette application induit un homomorphisme de $\mathscr{F}(Y, \Omega)$ dans $\mathscr{F}(X, \Omega)$.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V contenant $h(U)$ dans Y. On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial (\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k} d\phi_k$$

pour tout entier j compris entre 1 et m. Si u est homogène de degré r, on a

$$u\,|_V = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} u_{j_1, \ldots, j_r} d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_r}$$

et par conséquent

$$h^*(u)\,|\,_U = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} (u_{j_1, \ldots, j_r} \cdot h)\, d(\psi_{j_1} \cdot h) \wedge \ldots \wedge d(\psi_{j_r} \cdot h)\,.$$

En particulier, si u appartient à $\mathscr{C}^k(Y, \Omega)$, alors $h^*(u)$ appartient à $\mathscr{C}^k(X, \Omega)$ et si k est strictement positif, on a

$$h^*(du) = dh^*(u)\,.$$

Proposition 1 (Lemme de Poincaré). *Désignons par* X *un voisinage convexe de l'origine dans* $\mathbf{R}^n$. *Il existe une application linéaire* k *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ *dans lui-même telle que*

$$d \cdot k + k \cdot d = 1 - \varepsilon$$

où ε *désigne la forme linéaire sur* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ *qui associe à toute forme différentielle la valeur à l'origine de sa partie homogène de degré* 0.

On désigne par I l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et par h l'application de $I \times X$ dans X définie par

$$h(t, x) = tx\,.$$

Pour toute forme différentielle

$$v = \sum_{J \in S_r(n)} v_J\, dx_J$$

sur $I \times X$ indépendante de dt, on pose

$$d_X v = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial v}{\partial x_j} = dv - dt \wedge \frac{\partial v}{\partial t}$$

et

$$\int_0^1 v\, dt = \sum_{J \in S_r(n)} \left(\int_0^1 v_J\, dt\right) dx_J\,.$$

Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J\, dx_J$$

sur X, l'image réciproque $h^*(u)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$h^*(u) = u_1 + dt \wedge u_2$$

où les formes différentielles u_1 et u_2 sont indépendantes de dt. Notons que les coefficients a_J de u_1 sont donnés par la formule

$$a_J(t, x) = t^r\, u_J(tx)\,.$$

On pose alors

$$k(u) = \int_0^1 u_2\, dt\,.$$

L'image réciproque de la différentielle de u est donnée par la formule

$$h^*(du) = dh^*(u) = d_X u_1 + dt \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_X u_2\right)$$

et par conséquent

$$(k \cdot d)(u) = \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt - \int_0^1 (d_X u_2)\, dt$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\textstyle\int_0^1 (d_X u_2)\, dt = d(\int_0^1 u_2\, dt) = (d \cdot k)(u)$$

et

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt = u & \text{si} \quad r \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt = u - u(0) & \text{si} \quad r = 0\,. \end{cases}$$

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{\iota} \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n) \to 0$$

où ι désigne l'injection canonique de $\mathbf{R}$ dans les fonctions constantes, est exacte pour tout ensemble ouvert convexe (non vide) de $\mathbf{R}^n$.

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = \sum_J u_J\, dx_J$$

où J parcourt l'ensemble de toutes les suites strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n. On pose

$$i(u) = \textstyle\int_X u_{1,\dots,n}\, dt_1 \dots dt_n\,.$$

Proposition 2 (Lemme de Poincaré). *Désignons par X un cube ouvert de $\mathbf{R}^n$. Il existe une forme différentielle ω de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n)$ et une application linéaire k de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega)$ dans lui-même telles que*

$$i(\omega) = 1 \quad \textit{et} \quad d \cdot k + k \cdot d = 1 - \omega i\,.$$

Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par A_j l'ensemble des formes différentielles de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ indépendantes de $dx_1, \dots, dx_j$. Notons que l'on a

$$A_0 = \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega) \quad \text{et} \quad A_n = \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})\,.$$

On désigne par d_j l'application de A_j dans lui-même définie par

$$d_j u = \sum_{j+1 \leq k \leq n} dx_k \wedge \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Notons que d_n est identiquement nulle et que l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec d_j pour k compris entre 1 et n.

Désignons par I le côté de X. On définit une application i_j de A_j dans $C^\infty(I^j, \mathbf{R})$ en posant

$$i_j(u)(x_1, \ldots, x_j) = \int_{I^{n-j}} u_{j+1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n)\, dt_{j+1} \ldots dt_n$$

où $u_{j+1,\ldots,n}$ désigne le coefficient de la partie homogène de degré $n-j$ dans u. Notons que i_n est l'application identique et que l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec i_j pour k compris entre 1 et j.

La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral montre que l'on a

$$i_j(d_j u) = \sum_{j+1 \leq k \leq n} (-1)^{k-j-1} \int_{I^{n-j}} \frac{\partial u_{j+1,\ldots,\hat{k},\ldots,n}}{\partial x_k}\, dt_{j+1} \ldots dt_n = 0.$$

Choisissons une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(I, \mathbf{R})$ telle que

$$\int_I \alpha(t)\, dt = 1$$

et posons

$$\omega_j(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{j+1 \leq k \leq n} \alpha(x_k)\, dx_k.$$

Notons que ω_n est la fonction constante 1 et que $i_0(\omega_0)$ est égal à 1.

Par récurrence descendante sur j, nous allons construire une application linéaire k_j de A_j dans lui-même qui commute avec l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et j et telle que

$$d_j \cdot k_j + k_j \cdot d_j = 1 - \omega_j i_j.$$

On prend pour k_n l'application identique de A_n. Supposons j inférieur ou égal à n et k_j construit. Toute forme différentielle u de A_{j-1} s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = u_1 + dx_j \wedge u_2$$

avec u_1 et u_2 dans A_j. Notons que l'on a

$$d_{j-1}(u) = d_j u_1 + dx_j \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} - d_j u_2\right).$$

On pose alors

$$l(u)(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_j} \big(i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_{j-1}, t) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(t)\big)\,dt\,.$$

Il est clair que l est une application linéaire de A_{j-1} dans $\mathscr{C}^{\infty}(X, \mathbf{R})$ qui commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et $j-1$. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(l(u))(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_j) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(x_j)$$
$$l(d_{j-1}\,u)(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_1)(x_1, \ldots, x_j)\,.$$

On pose finalement

$$k_{j-1}(u) = k_j(u_1) - dx_j \wedge k_j(u_2) + l(u)\,\omega_j$$

et l'on vérifie aisément l'assertion.

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}_c^{\infty}(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^{\infty}(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^{\infty}(X, \Omega^n) \xrightarrow{i} \mathbf{R} \to 0$$

est exacte pour tout cube ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.

Toutes les constructions et les résultats de ce paragraphe demeurent valables si l'on utilise les germes de fonctions à valeurs complexes. On obtient alors le *fibré cotangent complexe à* X désigné par $\Omega^1_{\mathbf{C}}$. Pour tout point x de X et toute carte ϕ dont le domaine contient x, l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ identifie $\Omega^1_{\mathbf{C},x}$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (lemme 1). On désigne de même par $\Omega^r_{\mathbf{C}}$ et $\Omega_{\mathbf{C}}$ les fibrés vectoriels $\Lambda^r \Omega^1_{\mathbf{C}}$ et $\Lambda \Omega^1_{\mathbf{C}}$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega^r_{\mathbf{C}} = \Omega^r \otimes \mathbf{C}_X \qquad \text{et} \qquad \Omega_{\mathbf{C}} = \Omega \otimes \mathbf{C}_X\,.$$

§ 4. Calcul intégral

Lemme 1. *Pour qu'une variété différentielle X de dimension pure n soit orientable, il faut et il suffit que le fibré Ω^n soit trivial.*

Désignons par $(\phi_\iota)_{\iota \in I}$ un atlas orienté de X et par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$ formé des domaines de cartes de cet atlas. On définit une forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ en posant

$$u = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \, d\phi_{\iota,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\iota,n} \, .$$

Pour tout indice κ, on a

$$u \mid_{U_\kappa} = \Big(\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota g_{\iota\kappa}\Big) d\phi_{\kappa,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\kappa,n}$$

où $g_{\iota\kappa}$ désigne le jacobien du changement de cartes de ϕ_κ dans ϕ_ι. Ceci montre que u ne s'annule jamais et par conséquent la condition est nécessaire.

Réciproquement, soit u une forme différentielle partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, il existe une fonction g partout non nulle dans $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ telle que

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \, .$$

Quitte à remplacer ϕ_1 par $-\phi_1$, on peut supposer que g est strictement positive. Un atlas formé de telles cartes est évidemment orienté.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés différentielles considérées dans ce paragraphe sont orientées.

Soit X une variété différentielle (orientée) de dimension pure n.

On dit qu'une forme différentielle u homogène de degré n est *positive* si pour toute carte orientée ϕ de domaine U dans X, l'unique fonction g définie sur U par

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$$

est à valeurs réelles positives.

Désignons par u une forme différentielle de $\mathscr{C}_c^0(X, \Omega_{\mathbf{C}}^n)$, par ϕ et ψ des cartes orientées de domaines respectifs U et V dans X. On suppose que le support de u est contenu dans $U \cap V$. On peut écrire

$$u \mid_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \qquad \text{et} \qquad u \mid_V = g \, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$$

où f et g sont des fonctions continues à valeurs complexes. On a les formules

$$f_\phi = \mathrm{jac}(\gamma) \, g_\phi \qquad \text{et} \qquad g_\psi = g_\phi \cdot \gamma^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Puisque le jacobien de γ est positif, la formule du changement de variables dans les intégrales multiples montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} g_\psi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} (g_\phi \cdot \gamma^{-1}) \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} |\, \mathrm{jac}(\gamma) \,| \, g_\phi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu$$

en désignant par μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. On pose alors

$$\int_X u = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu .$$

Ce nombre est indépendant de la carte orientée ϕ dont le domaine contient le support de u.

Dans le cas général où le support de u n'est contenu dans aucun domaine de carte, on désigne par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ (resp. $(V_\kappa)_{\kappa\in K}$) un recouvrement de X par de tels domaines et par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ (resp. $(\beta_\kappa)_{\kappa\in K}$) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. La famille $(\alpha_\iota\beta_\kappa)$ est une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota \cap V_\kappa)$ et l'on a

$$\sum_{\iota\in I} \int_X \alpha_\iota u = \sum_{(\iota,\kappa)\in I\times K} \int_X \alpha_\iota \beta_\kappa u = \sum_{\kappa\in K} \int_X \beta_\kappa u .$$

On appelle *intégrale de u sur X* le nombre complexe défini par

$$\int_X u = \sum_{\iota\in I} \int_X \alpha_\iota u .$$

On notera que la forme linéaire canonique i ainsi obtenue sur $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_{\mathrm{C}})$ est réelle sur les formes différentielles réelles, positive sur les formes différentielles positives.

Munissons le fibré cotangent Ω^1 d'une métrique hermitienne (§ 2, lemme 3). Les fibrés vectoriels Ω et Ω_{C} sont alors naturellement munis d'une métrique hermitienne (si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormale de Ω^1_x les vecteurs

$$e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}$$

où J parcourt $S_r(n)$ forment une base orthonormale de Ω^r_x et $\Omega^r{}_{\mathrm{C},x}$). On vérifie aisément que l'on a

$$|u \wedge v| \leqslant |u| \; |v|$$

quelles que soient les formes différentielles u et v.

Soient ϕ et ψ deux cartes orientées de X. Sur l'intersection de leurs domaines, on a la relation

$$\begin{aligned} &|d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n|^{-1} d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \\ &= |d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n|^{-1} d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n . \end{aligned}$$

La forme différentielle ω obtenue par recollement est positive, partout non nulle; on l'appelle la *forme volume associée à la métrique hermitienne de* Ω^1. En particulier, la forme volume fournit une trivialisation de Ω^n.

La forme linéaire définie sur $\mathscr{C}_c^0(X, \mathbf{C})$ par

$$\mu(f) = \int_X f \omega$$

est réelle positive. Le théorème de Riesz ([5], théorèmes (2.14) et (2.17)) montre qu'elle correspond à une unique mesure borélienne régulière que l'on désigne encore par μ.

La tribu des ensembles μ-mesurables de X ne dépend pas de la structure hermitienne de Ω^1: une partie de X est μ-mesurable si et seulement si son image par toute carte de X est Lebesgue-mesurable.

Pour toute partie mesurable A de X, toute fonction mesurable f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ ou toute fonction intégrable à valeurs dans $\mathbf{C}$, on pose

$$\int_A f \omega = \mu(\chi_A f)$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de A.

Soit π un fibré vectoriel complexe de rang pur m sur X, muni d'une métrique hermitienne. Pour tout ensemble mesurable A de X toute section mesurable s de π et tout nombre réel p au moins égal à 1, on pose

$$\| s \|_{L^p, A} = \left(\int_A | s |^p \omega \right)^{1/p}$$

$$\| s \|_{L^\infty, A} = \inf \{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \mu(| s |^{-1}(]t, \infty[) \cap A) = 0 \}.$$

Ce nombre dépend des structures hermitiennes de Ω^1 et de π.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, on désigne par $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de sections mesurables s de π telles que $\| s \|_{L^p, K}$ soit fini pour tout ensemble compact K de X. C'est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet pour la famille de semi-normes $\| \ \|_{L^p, K}$; c'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour qu'une section s appartienne à $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$, il faut et il suffit que l'application $(s_\Phi)_\phi$ appartienne à $L_{\text{loc}}^p(\phi(U), \mathbf{C}^m)$ pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine U. Ceci montre en particulier que l'espace vectoriel topologique $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$ est indépendant des structures hermitiennes de Ω^1 et π.

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $L_K^p(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$ dont le support [1]) est contenu dans K. C'est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert si p est égal à 2) pour la norme $\| \ \|_{L^p, K}$.

---

[1]) On appelle *support d'une section mesurable* le plus petit ensemble en dehors duquel elle est presque partout nulle.

On désigne enfin par $L_c^p(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L_{\mathrm{loc}}^p(X, \pi)$ à support compact. C'est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $L_K^p(X, \pi)$.

Notons que les inclusions canoniques

$$L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(X, \pi) \subset L_{\mathrm{loc}}^{q}(X, \pi) \subset L_{\mathrm{loc}}^{p}(X, \pi) \subset L_{\mathrm{loc}}^{1}(X, \pi)$$
$$L_c^{\infty}(X, \pi) \subset L_c^{q}(X, \pi) \subset L_c^{p}(X, \pi) \subset L_c^{1}(X, \pi)$$

sont continues pour tout nombre réel q au moins égal à p.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X est dense dans $L_c^p(X, \mathbf{C})$ et $L_{\mathrm{loc}}^p(X, \mathbf{C})$ (*loc. cit.* théorème (3.13)).

Pour tout élément p de $[1, \infty[$, l'ensemble $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ est dense dans $L_c^p(X, \pi)$ et $L_{\mathrm{loc}}^p(X, \pi)$ (*loc. cit.* théorème (3.14)). Notons que $\mathscr{C}_c^0(X, \pi)$ est fermé dans $I_c^{\infty}(X, \pi)$ et que son adhérence dans $L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(X, \pi)$ est égale à $\mathscr{C}^0(X, \pi)$.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels complexes sur X et soit δ une dualité de $\pi \otimes \rho$ dans $\mathbf{C}_X$. On suppose π et ρ munis de métriques hermitiennes vérifiant la condition

$$|\delta_x(y' \otimes y'')| \leqslant |y'| \; |y''|$$

pour tout point x de X et tout point y' (resp. y'') de π_x (resp. ρ_x).

Soient p et q deux éléments conjugués de $[1, \infty]$ (i.e. tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et soit K une partie compacte de X. Pour toute section u de $L_K^p(X, \pi)$ et toute section v de $L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho)$, l'inégalité de Hölder (*loc. cit.* théorème (3.8)) montre que l'on a

$$\left| \int_X \delta(u, v)\, \omega \right| \leqslant \| u \|_{L^p, K} \| v \|_{L^q, K}.$$

En particulier, la forme bilinéaire

$$\Delta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X \delta(u, v)\, \omega$$

est séparément continue (et même hypocontinue).

LEMME 2. *La forme bilinéaire*

$$\Delta : \mathscr{C}_c^0(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^1(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est non dégénérée.

Il suffit de montrer que toute section v de $L_{\mathrm{loc}}^1(X, \rho)$ rendant la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ nulle est elle-même identiquement nulle. La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, que π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et que la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y'_j y''_j .$$

On se ramène immédiatement au cas où m est égal à 1. Pour tout ensemble compact K de X et pour tout voisinage compact L de K dans X, il existe une fonction u continue sur X dont le support est contenu dans L et égale à 1 sur K. On en déduit que

$$|\varDelta(\chi_K, v)| = |\varDelta(\chi_K - u, v)| \leqslant \mu(L \backslash K) \| v \|_{L^1, L}$$

et par conséquent la forme linéaire $\varDelta(\ , v)$ est nulle sur l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X. Par densité et continuité, elle est donc nulle sur $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$.

Pour toute partie compacte K de X, on définit alors une fonction u de $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$ en posant

$$\begin{cases} u(x) = \overline{v(x)}\ |v(x)|^{-1} & \text{si } x \in K \text{ et si } v(x) \neq 0 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou si } v(x) = 0 . \end{cases}$$

Il résulte de cette définition et de ce qui précède que l'on a

$$\| v \|_{L^1, K} = \varDelta(u, v) = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

THÉORÈME 1. *Pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $]1, \infty[$, la forme bilinéaire*

$$\varDelta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques [1]).

Il résulte du lemme 2 que les applications $\varDelta_1$ et $\varDelta_2$ induites par $\varDelta$ sont injectives. Pour montrer qu'elles sont surjectives, nous allons tout d'abord examiner le cas où π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et où la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y'_j y''_j .$$

[1]) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques. On dit qu'une forme bilinéaire Δ sur $E \times F$ est une *dualité d'espaces vectoriels topologiques* si elle est séparément continue et si elle induit une bijection Δ_1 (resp. Δ_2) de E (resp. F) sur le dual topologique de F (resp. E).

Toute forme linéaire continue α sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ s'écrit

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Par définition de la topologie de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$, il existe une partie compacte K de X et une constante c telles que

$$|\alpha_j(w)| \leqslant c \| w \|_{L^q, K}$$

pour tout w dans $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il existe donc une fonction u_j de $L^p_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\alpha_j(w) = \alpha_j(\chi_K w) = \mu(u_j w)$$

(*loc. cit.* théorème (6.16)) et si l'on pose

$$u = (u_1, \ldots, u_m)$$

on voit que l'on a

$$\Delta(u, v) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \alpha_j(v_j) = \alpha(v)$$

ce qui montre la surjectivité de Δ_1.

De même, toute forme linéaire continue β sur $L^p_c(X, \pi)$ s'écrit

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^p_c(X, \mathbf{C})$. Pour tout ensemble compact K de X, la restriction de β_j à $L^p_K(X, \mathbf{C})$ est continue et l'on voit qu'il existe une fonction $v_{K,j}$ et une seule dans $L^q_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\beta_j(w) = \mu(w\, v_{K,j})$$

pour tout w dans $L^p_K(X, \mathbf{C})$. Ces fonctions se recollent en une fonction v_j de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et si l'on pose

$$v = (v_1, \ldots, v_m),$$

on voit que l'on a

$$\Delta(u, v) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \beta_j(u_j) = \beta(u)$$

ce qui montre la surjectivité de Δ_2.

Démontrons maintenant le cas général. Si α est une forme linéaire continue sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$, on voit comme précédemment qu'il existe un ensemble compact K de X tel que

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v)$$

pour tout v dans $L^q_{\text{loc}}(X, \rho)$. Il existe aussi un recouvrement fini $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de K par des domaines de cartes de ρ (ou de π) et pour chaque indice ι une fonction λ_ι de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ dont le support est contenu dans U_ι telle que

$$\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota(x) = 1$$

pour tout point x de K. D'après la première partie de la démonstration, il existe une section u_ι de $L^p_c(U_\iota, \pi)$ telle que

$$\alpha(\lambda_\iota v) = \Delta(u_\iota, v).$$

La somme des u_ι est une section u de $L^p_c(X, \pi)$ et l'on a

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v) = \sum_{\iota \in I} \alpha(\lambda_\iota v) = \sum_{\iota \in I} \Delta(u_\iota, v) = \Delta(u, v).$$

L'assertion relative à Δ_2 est laissée en exercice au lecteur.

Exemple 1.

Soit π un fibré vectoriel complexe sur X et soit r un entier naturel. On définit une dualité canonique

$$\theta : (\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \otimes (\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \Omega^n_{\mathbf{C}}$$

en posant

$$\theta((y' \otimes t') \otimes (y'' \otimes t'')) = \langle y', y'' \rangle \; t' \wedge t''$$

pour tout point x de X et tout élément $y' \otimes t'$ (resp. $y'' \otimes t''$) de $\pi_x \otimes \Omega^r_{\mathbf{C},x}$ (resp. $\pi^*_x \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C},x}$). Pour toute section u de $\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}$ et toute section v de $\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}$, on pose

$$(u, v) = \theta(u, v).$$

On désigne par δ la dualité obtenue en composant θ avec la trivialisation de la forme volume. Il résulte immédiatement de ces définitions que l'on a

$$(u, v) = \delta(u, v)\, \omega.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : L^p_c(X, \pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \times L^q_{\text{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v)$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $]1, \infty[$.

Remarque 1.

Nous n'utiliserons le théorème 1 que dans le cas particulier où p et q sont tous deux égaux à 2. Le résultat d'intégration nécessaire à la démonstration est alors beaucoup plus simple (*loc. cit.* théorème (4.12)).

Remarque 2.

On montre de la même manière que la forme bilinéaire Δ induit des bijections de $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ sur le dual topologique de $L^1_c(X, \pi)$ et de $L^{\infty}_c(X, \pi)$ sur le dual topologique de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ (*loc. cit.* théorème (6.16)).

Remarque 3.

Il résulte de l'hypocontinuité de la forme bilinéaire Δ que les bijections Δ_1 et Δ_2 sont continues (pour la topologie forte) et du théorème du graphe fermé que ce sont des isomorphismes.

On dit qu'une partie Y de X est une *pièce* si elle vérifie la condition suivante:

(P) Pour tout point x de X, il existe une carte ϕ de X dont le domaine U contient x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_1 \leqslant 0\}.$$

Ceci implique en particulier que Y est fermée et que ∂Y est une sous-variété de X. Nous allons munir ∂Y d'une orientation naturelle que l'on dit *induite par* X. Tout d'abord, si n est égal à 1, le bord de Y est de dimension 0. On munit tout point x de ∂Y de l'orientation 1 (resp. -1) (§ 1, remarque 2) s'il existe une carte orientée ϕ de domaine U centrée en x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \leqslant 0\}$$
$$(\text{resp. } \phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \geqslant 0\}).$$

Supposons n au moins égal à 2. Quitte à remplacer ϕ_n par $-\phi_n$, on peut supposer que les cartes qui vérifient la condition (P) sont orientées. Leurs restrictions à ∂Y forment alors un atlas orienté dont la classe est par définition l'orientation induite.

THÉORÈME 2 (Stokes). *Pour toute pièce Y de X et toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-1}_{\mathbf{C}})$, on a*

$$\int_{\partial Y} \imath^*(u) = \int_Y du$$

où $\imath$ désigne l'injection canonique de ∂Y dans X.

On se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et où Y est de la forme

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_1 \leqslant 0\}.$$

Par linéarité, on peut supposer que u est donnée par

$$u = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \ldots \wedge dx_n$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^1_c(X, \mathbf{R})$. On a

$$du = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Supposons tout d'abord j égal à 1. On a par définition

$$\iota^*(u) = (f \cdot \iota)\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et par conséquent

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

Supposons j strictement supérieur à 1. On a alors

$$\iota^*(u) = 0$$

et d'autre part

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{x_1 \leqslant 0} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Soient u et v deux formes différentielles de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-r-1}_{\mathbf{C}})$ respectivement. Pour toute pièce Y de X, on a*

$$\textstyle\int_Y du \wedge v = \int_{\partial Y} \iota^*(u \wedge v) + (-1)^{r+1} \int_Y u \wedge dv$$

En particulier, on a

$$\textstyle\int_X du \wedge v = (-1)^{r+1} \int_X u \wedge dv .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et de la formule

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

On appelle *complexe de de Rham de* X la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^{\infty}(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^{\infty}(X, \Omega^1) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{C}^{\infty}(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

où d^r désigne la restriction de la différentielle d aux formes homogènes de degré r. On appelle *groupes de cohomologie de* X les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{Im} d^{r-1} .$$

La différentielle diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^{\infty}_c(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d^0_c} \mathscr{C}^{\infty}_c(X, \Omega^1) \xrightarrow{d^1_c} \dots \xrightarrow{d^{n-1}_c} \mathscr{C}^{\infty}_c(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

et des groupes de cohomologie correspondants

$$\mathbf{H}^r_c(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d^r_c / \operatorname{Im} d^{r-1}_c .$$

Le noyau de d^0 s'identifie aux fonctions localement constantes sur X. Si X est connexe, on a donc

$$\mathbf{H}^0(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0_c(X, \mathbf{R})$ est nul.

La formule de Stokes montre que l'intégration des formes différentielles de degré n induit par passage au quotient une forme linéaire canonique i sur $\mathbf{H}^n_c(X, \mathbf{R})$.

THÉORÈME 3. *Si X est connexe, la forme linéaire i est un isomorphisme. Si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^n(X, \mathbf{R})$ est nul.*

Si X est un cube de $\mathbf{R}^n$, l'assertion résulte du lemme de Poincaré (§ 3, propositions 1 et 2).

Passons au cas général. Désignons par U_0 un domaine de carte isomorphe à un cube. Nous allons montrer qu'il existe pour toute forme u de $\mathscr{C}^{\infty}_c(X, \Omega^n)$ des formes u_0 et v de $\mathscr{C}^{\infty}_c(U_0, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}^{\infty}_c(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u = u_0 + dv$$

ce qui établira la première assertion.

Par partition de l'unité, on voit aisément que l'on peut supposer le support de u contenu dans un domaine de carte isomorphe à un cube. On construit alors une suite $U_1, \dots, U_k$ de tels domaines vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et k, l'ensemble $U_j \cap U_{j-1}$ est non vide.

(2) Le support de u est contenu dans U_k.

Par récurrence descendante sur l'entier j, le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 2) montre qu'il existe des formes u_{j-1} et v_{j-1} de $\mathscr{C}_c^\infty(U_{j-1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u_k = u \quad \text{et} \quad u_j = u_{j-1} + dv_{j-1} .$$

Il suffit alors de prendre pour v la somme des v_j.

Supposons X ouverte et montrons que toute forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ est exacte. Désignons par $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X (avec K_0 vide pour fixer les idées) telles que $X \backslash K_j$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6) et par $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement

$$(\overset{\circ}{K}_{j+2} \backslash K_j)_{j\in\mathbf{N}} .$$

La première partie du théorème montre qu'il existe des formes u_0 et v_0 de $\mathscr{C}_c^\infty(X \backslash K_1, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_0 u = u_0 + dv_0 .$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit alors par récurrence des formes u_j et v_j de $\mathscr{C}_c^\infty(X \backslash K_{j+1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X \backslash K_j, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_j u + u_{j-1} = u_j + dv_j .$$

En effet, la restriction de $\alpha_j u + u_{j-1}$ à une composante connexe V de $X \backslash K_j$ est une forme différentielle de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$ et puisque $V \backslash K_{j+1}$ est non vide, l'assertion résulte de la première partie du théorème.

La famille des supports des v_j étant localement finie, la somme

$$v = \sum_{j\in\mathbf{N}} v_j$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{n-1})$. On a alors

$$dv = \sum_{j\in\mathbf{N}} dv_j = \alpha_0 u - u_0 + \sum_{j\geqq 1} (\alpha_j u + u_{j-1} - u_j) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \alpha_j u = u ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 4. *Soient X et Y deux variétés différentielles (orientées) de dimension pure n et soit h une application indéfiniment dérivable de X*

dans Y. *On suppose que* Y *est connexe et* h *propre* [1]. *Il existe alors un entier relatif* ν *tel que*

$$\int_X h^*(u) = \nu \int_Y u$$

pour toute forme différentielle u *de* $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$.

La forme linéaire λ définie sur $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$ par

$$\lambda(u) = \int_X h^*(u)$$

induit par passage au quotient une forme linéaire sur $\mathbf{H}_c^n(Y, \mathbf{R})$. Il résulte du théorème 3 que cette forme linéaire est proportionnelle à i. Tout revient à montrer que le facteur de proportionnalité est un entier.

Désignons par y une valeur régulière de h (§ 1, théorème 2), par ψ une carte orientée de centre y et de domaine V dans Y et par $x_1, \ldots, x_p$ les points de $h^{-1}(y)$. Si V est suffisamment petit, l'application h induit pour tout entier j compris entre 1 et p un isomorphisme h_j de U_j sur V, où U_j désigne la composante connexe de x_j dans $h^{-1}(V)$ (§ 1, théorème 1). Posons

$$\begin{cases} \varepsilon(j) = 1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ est une carte orientée de } X \\ \varepsilon(j) = -1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ n'est pas une carte orientée de } X. \end{cases}$$

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$, on a

$$\int_X h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \int_{U_j} h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \varepsilon(j) \int_Y u$$

ce qui démontre l'assertion.

L'entier ν du théorème 4 s'appelle le *degré de* u et se désigne par deg (u).

Remarque 4.

La considération des formes différentielles complexes sur X permet d'introduire des groupes de cohomologie $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ et $\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C})$. On notera que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}.$$

Soit X une variété différentielle et soit $g = (g_\kappa)$ un cocycle complexe de rang 1 subordonné à un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ de X. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $u_{\kappa\iota}$ la forme différentielle

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dg_{\kappa\iota}}{g_{\kappa\iota}}.$$

[1] Ceci signifie que l'image réciproque par h de toute partie compacte de Y est une partie compacte de X.

Il existe pour tout indice ι une forme u_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ telle que

$$u_{\kappa\iota} = u_\iota - u_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$ (§ 2, lemme 1). En particulier, puisque $u_{\kappa\iota}$ est fermée, les différentielles du_ι se recollent en une forme fermée v homogène de degré 2.

Montrons que la classe de v dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ ne dépend que de g. En effet, si l'on a

$$u_{\kappa\iota} = u'_\iota - u'_\kappa$$

pour certaines formes u'_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, les formes du'_ι se recollent en une forme v' de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$, les $u'_\iota - u_\iota$ en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$v' = v + du$$

ce qui démontre l'assertion.

La classe de $-v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ s'appelle la *classe de Chern de* g et se désigne par $\mathrm{ch}(g)$.

LEMME 3. *Pour tout recouvrement ouvert* $\mathscr{U}$ *de* X, *la classe de Chern induit un homomorphisme de* $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*)$ *dans* $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. *Si* $\mathscr{V}$ *est un recouvrement ouvert de* X *plus fin que* $\mathscr{U}$, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*) \arrow[rr, "\sigma(\mathscr{V},\mathscr{U})"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}"'] & & \mathrm{Pic}(\mathscr{V}, \mathbf{C}^*) \arrow[dl, "\mathrm{ch}"] \\ & \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) & \end{tikzcd}$$

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Par passage à la limite inductive, on obtient donc un homomorphisme canonique ch de $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. On appelle *classe de Chern d'un fibré en droites complexes* π *sur* X et l'on désigne par $\mathrm{ch}(\pi)$ la classe de Chern du fibré principal associé à π (§ 2, scholie).

§ 5. Cohomologie des surfaces

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une surface différentielle connexe et orientée.

Désignons par γ une application indéfiniment dérivable définie sur un ensemble ouvert W de $\mathbf{R}$ à valeurs dans X, et par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Il est clair que la restriction de $\gamma^*(u)$ à tout intervalle fermé de W ne dépend que de la restriction de γ à cet intervalle.

On dit qu'un chemin c de X défini sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ est *dérivable* s'il existe un intervalle ouvert W contenant $[a, b]$ et une application γ indéfiniment dérivable de W dans X prolongeant c. Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on désigne par $c^*(u)$ la restriction de $\gamma^*(u)$ à $[a, b]$.

On appelle *intégrale de* u *sur* c le nombre complexe défini par

$$\int_c u = \int_a^b c^*(u).$$

On définit ainsi une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, réelle sur les formes différentielles réelles. De plus, si h est une application dérivable à dérivée positive d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u.$$

Autrement dit l'intégrale de u sur c ne dépend pas de la paramétrisation de c. Enfin, pour toute fonction f de $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Désignons maintenant par u une forme fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 1) montre qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{U_\iota} = df_\iota$$

D'autre part, la compacité de l'intervalle $[a, b]$ montre qu'il existe une suite de nombres réels

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} = b$$

et pour tout entier j compris entre 0 et n un indice $\tau(j)$ tel que $U_{\tau(j)}$ contienne l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Une telle suite est dite *subordonnée au recouvrement* $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Une telle application est dite de *subordination*.
On a alors

$$\int_c u = \sum_{0 \leqq j \leqq n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} c^*(u) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j)).$$

Si c est un chemin quelconque de X (continu mais non nécessairement dérivable), et si u est fermée, le membre de droite est toujours défini. Nous allons voir qu'il est indépendant des différents choix que nous avons faits.

Tout d'abord, il est indépendant de τ: désignons par σ une autre application de subordination de $\{0, \dots, n\}$ dans I. Pour tout entier j compris entre 0 et n, l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j)} \cap U_{\sigma(j)}$, d'où l'assertion puisque la fonction $f_{\tau(j)} - f_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout nombre réel t compris entre t_j et t_{j+1}, la suite

$$a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = b$$

est encore subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et la somme correspondante ne change pas. On en déduit que cette somme est indépendante de la suite subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Finalement, désignons par $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ un deuxième recouvrement ouvert de X et, pour chaque indice κ, par g_κ une fonction de $\mathscr{C}^\infty(V_\kappa, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{V_\kappa} = dg_\kappa\,.$$

Il existe une suite

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = b$$

subordonnée aux deux recouvrements. On désigne par τ (resp. σ) une application de subordination de $\{0, \ldots, n\}$ dans I (resp. K). Pour tout entier j compris entre 0 et n, l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j)} \cap V_{\sigma(j)}$ et l'on conclut en remarquant que $f_{\tau(j)} - g_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout chemin c de X et toute forme fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on pose

$$\int_c u = \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j))\,.$$

Cette définition coïncide avec la précédente si c est dérivable. Pour toute application continue et croissante h d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u\,.$$

De plus, pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a))\,;$$

enfin, si c' est un deuxième chemin de X ayant pour origine l'extrémité de c, on a

$$\int_{cc'} u = \int_c u + \int_{c'} u\,.$$

LEMME 1. *Soient c_0 et c_1 deux chemins homotopes de X. On a alors*

$$\int_{c_0} u = \int_{c_1} u$$

pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

On peut toujours supposer que c_0 et c_1 sont définis sur l'intervalle [0, 1] et l'on désigne par Γ une homotopie de c_0 vers c_1, i.e. une application continue du carré

$$C = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

dans X vérifiant les conditions suivantes:

$$\Gamma(s, 0) = c_0(s) \quad \text{et} \quad \Gamma(s, 1) = c_1(s)$$
$$\Gamma(0, t) = c_0(0) = c_1(0) \quad \text{et} \quad \Gamma(1, t) = c_0(1) = c_1(1).$$

Il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u \mid_{U_\iota} = df_\iota .$$

Par compacité, il existe deux suites de nombres réels

$$0 = s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_{n+1} = 1$$
$$0 = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_{m+1} = 1$$

et pour tout couple d'entiers (j, k) un indice $\tau(j, k)$ tel que l'image par Γ du rectangle

$$\{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s_j \leqslant s \leqslant s_{j+1} \quad \text{et} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}\}$$

soit contenue dans $U_{\tau(j,k)}$. Pour tout entier k compris entre 0 et m, la restriction de Γ à $[0, 1] \times \{t_k\}$ est un chemin γ_k de X et il suffit de montrer que l'on a

$$\int_{\gamma_k} u = \int_{\gamma_{k+1}} u .$$

Or, pour tout entier j compris entre 1 et $n+1$, l'image par Γ de l'ensemble

$$\{s_j\} \times [t_k, t_{k+1}]$$

est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j-1,k)} \cap U_{\tau(j,k)}$. On en déduit que

$$f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_k(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j)) = f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) .$$

Par sommation, et en utilisant le fait que γ_k et γ_{k+1} ont mêmes extrémités, on voit que l'on a

$$\sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j))$$
$$= \sum_{0 \leqq j \leqq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j))$$

ce qui établit l'assertion.

Désignons par $\mathbf{C}^*$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et par $\mathbf{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On appelle *support d'une fonction continue à valeurs dans* $\mathbf{C}^*$ (ou $\mathbf{U}$) le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est égale à 1.

On désigne par $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$) le groupe multiplicatif des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ (resp. $\mathbf{U}$) et par $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})$) le sous-groupe formé de celles à support compact.

L'application exponentielle induit des homomorphismes

$$\exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$$
$$\exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})\,.$$

On dit qu'une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ *possède un logarithme* si elle est dans l'image de l'application exponentielle.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la forme différentielle $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{df}{f}$ s'appelle la *différentielle logarithmique de f.* Elle est réelle si f est à valeurs dans $\mathbf{U}$, à support compact si f est à support compact. Puisqu'elle est fermée, on a des applications canoniques

$$\delta : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \to \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*) \to \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})$$
$$\delta : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \to \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) \to \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}).$$

On vérifie aisément que ce sont des homomorphismes.

Lemme 2. *Considérons les deux diagrammes commutatifs de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \theta \\
\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \\
\cap & & \cap & & \downarrow \theta \\
\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})\,.
\end{array}$$

Les lignes sont exactes et θ induit un isomorphisme sur les images de δ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{d(\exp 2i\pi f)}{\exp 2i\pi f} = df$$

ce qui montre que le composé des deux homomorphismes est nul. D'autre part, si g est une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{dg}{g} = df,$$

on voit que $g \exp(-2i\pi f)$ est constante, ce qui montre que les lignes sont exactes.

Montrons que l'application induite par θ est injective. Si g est à valeurs dans $\mathbf{U}$, et si l'on a

$$\exp 2i\pi f = g\,,$$

on a la relation

$$\exp(-2\pi Im f) = |g| = 1$$

autrement dit f est à valeurs réelles.

Montrons que l'application induite par θ est surjective. Pour toute fonction g de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, il existe une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ telle que

$$|g| = \exp f.$$

On a alors

$$\frac{d(|g|^{-1}g)}{|g|^{-1}g} = \frac{dg}{g} - df$$

ce qui démontre l'assertion.

Le second diagramme se traite de la même manière.

On désigne par $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ (resp. $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$) le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{C})$), image de l'homomorphisme δ.

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0.

Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et tout lacet c de X, on appelle *période de u sur c*, l'intégrale de u sur c. Cette période ne dépend que de la classe de cohomologie de u et de la classe d'homotopie de c (lemme 1). On a donc un homomorphisme canonique

$$\varpi : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$$

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme ϖ est un isomorphisme. Il envoie* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ *sur* $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z})$.

Montrons tout d'abord que ϖ est injectif. Soit u une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et soit c un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x dans X. Si toutes les périodes de u sont nulles, l'intégrale

$$f(x) = \int_c u$$

ne dépend pas de c. Montrons que f appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et que sa différentielle est u. Tout point x_1 de X possède un voisinage connexe U sur lequel u est la différentielle d'une fonction g de $C^\infty(U, \mathbf{R})$ (lemme de Poincaré). On a alors pour tout point x de U

$$f(x) = \int_c u + g(x) - g(x_1)$$

où c est un chemin fixe joignant x_0 à x_1. Ceci démontre l'assertion.

Montrons maintenant que $\bar{\varpi}$ est surjective. Désignons par α un homomorphisme de G dans $\mathbf{R}$, par $\tilde{X}$ le revêtement universel de X et par π la projection canonique de $\tilde{X}$ dans X. On rappelle que le groupe G s'identifie au groupe des transformations de ce revêtement; on le fait opérer sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ par la formule

$$c \cdot (x, t) = \big(c(x), \alpha(c) + t\big).$$

On désigne par Y l'espace des orbites, par ρ la projection canonique de $X \times \mathbf{R}$ dans Y et par p l'unique application rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{X} \times \mathbf{R} \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[d, "\rho"] \\ X & Y \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Soit U un ensemble ouvert simplement connexe de X et soit V une composante connexe de $\pi^{-1}(U)$. Le groupe G opérant trivialement sur $V \times \mathbf{R}$, on voit que ρ induit un homéomorphisme de $V \times \mathbf{R}$ sur $p^{-1}(U)$. On en déduit aisément que Y est séparé et que $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est son revêtement universel. On munit Y de l'unique structure différentielle faisant de ρ un isomorphisme local (§ 1, exemple 4).

L'étape suivante consiste à construire une section s de p, i.e. une application indéfiniment dérivable de X dans Y telle que

$$p \cdot s = 1_X$$ [1]).

On désigne par $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux recouvrements ouverts localement finis de X tels que U_n soit simplement connexe et V_n relativement compact dans U_n pour tout entier n. On construit alors par récurrence une section s_n de p indéfiniment dérivable au voisinage de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} \bar{V}_j$ et qui coïncide avec s_{n-1} sur $\bar{V}_n \cap \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \bar{V}_j$. Ceci est possible puisque l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_n) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "p"'] & & U_n \times \mathbf{R} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_n & \end{tikzcd}$$

[1]) On prendra garde que p n'est pas un fibré vectoriel sur X: les transitions sont linéaires affines et non linéaires.

L'application s s'obtient par recollement des s_n.

Remarquons maintenant que la forme différentielle dt sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est invariante par G. Par passage au quotient, elle définit une forme différentielle fermée u sur Y et l'on pose

$$v = s^*(u) .$$

Pour tout lacet c de X au point x_0 et tout point (x, t) de $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ se projetant sur $s(x_0)$, il existe un chemin $\tilde{c}$ et un seul relevant $s \cdot c$ et ayant (x, t) pour origine. Son extrémité est par définition le point $\big(c(x), \alpha(c) + t\big)$ et l'on a

$$\int_c v = \int_c s^*(u) = \int_{s \cdot c} u = \int_{\tilde{c}} dt = \alpha(c)$$

ce qui démontre finalement la surjectivité de $\bar{\omega}$.

Il reste à voir que les formes différentielles à périodes entières sont exactement les différentielles logarithmiques.

La première partie du théorème montre qu'une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ possède un logarithme sur tout ensemble ouvert simplement connexe. Puisque deux tels logarithmes diffèrent d'un entier, toutes les périodes de $\dfrac{1}{2i\pi} \dfrac{df}{f}$ sont des entiers.

Réciproquement, désignons par u une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$. Toujours en vertu de la première partie du théorème, la forme différentielle $\pi^*(u)$ est exacte sur le revêtement universel $\tilde{X}$. Désignons par f une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbf{R})$ dont la différentielle est $\pi^*(u)$. Si les périodes de u sont entières, la fonction $\exp(2i\pi f)$ est G-invariante ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 1. *Si X est simplement connexe, toute forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ est exacte et toute fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ possède un logarithme.*

Corollaire 2. *Si le groupe G est de génération finie, l'injection canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ induit un isomorphisme*

$$\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \text{ [1]} .$$

Le corollaire 2 s'applique en particulier si X est compacte (appendice II, proposition 1).

[1]) On peut exprimer ce fait en disant que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un *réseau de* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$, i.e. un sous-groupe libre dont le rang est égal à la dimension de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$.

Soit ϕ une carte orientée de X et soit D un disque de centre x relativement compact dans ϕ. Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, le nombre complexe

$$\text{Rés}(u, x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} u$$

où ∂D désigne le bord orienté de D ne dépend que de u: c'est une conséquence immédiate de la formule de Stokes. On l'appelle le *résidu de* u *au point* x.

Supposons X simplement connexe. Il résulte du théorème 1 appliqué à la surface différentielle $X\backslash\{x\}$ que u est exacte si et seulement si son résidu au point x est nul.

On identifie désormais $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire λ défini par

$$\lambda(x_1, x_2) = x_1 + ix_2 \quad \text{et} \quad \lambda^{-1}(z) = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\right).$$

En particulier, toute carte de X apparaît comme une fonction à valeurs complexes.

LEMME 3. *Soient* ϕ *et* ψ *deux cartes orientées de* X *centrées en un point* x, *ayant pour domaine le même ensemble simplement connexe* U.

(1) La différentielle logarithmique de ϕ *appartient à* $L^1_{\text{loc}}(U, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. *Son résidu au point* x *est égal à* 1.

(2) Tout logarithme de $\phi^{-1}\psi$ *demeure borné au voisinage de* x.

La première assertion résulte immédiatement des définitions: il suffit d'introduire des coordonnées polaires dans la carte ϕ. Démontrons la seconde. Dans un voisinage ouvert convexe V de l'origine, le changement de cartes γ de ϕ dans ψ s'écrit

$$\gamma_1 = u_1x_1 + u_2x_2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = v_1x_1 + v_2x_2$$

(§ 3, lemme 2). Le jacobien de γ à l'origine est positif. Il est donné par la formule

$$\text{jac}(\gamma)(0) = u_1(0)v_2(0) - u_2(0)v_1(0).$$

On définit des fonctions h_1 et h_2 de $\mathscr{C}^\infty(V, \mathbf{C})$ en posant

$$h_1 = \frac{1}{2}(u_1+v_2) + \frac{1}{2i}(u_2-v_1) \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{2}(u_1-v_2) - \frac{1}{2i}(u_2+v_1).$$

On a alors

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = h_1 z + h_2 \bar{z} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{jac}(\gamma)(0) = |h_1(0)|^2 - |h_2(0)|^2 .$$

Il existe par conséquent deux nombres réels ε et η strictement positifs tels que

$$|h_1(z) - h_1(0)| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |h_2(z)| + 2\eta \leqslant |h_1(0)|$$

pour tout nombre complexe z de module inférieur ou égal à ε. On en déduit que

$$\left| h_1(z) + \frac{\bar{z}}{z} h_2(z) - h_1(0) \right| \leqslant \eta + |h_2(z)| \leqslant |h_1(0)| - \eta .$$

En particulier, la fonction $z^{-1}\gamma$ qui n'est autre que l'expression de $\phi^{-1}\psi$ dans la carte ϕ possède un logarithme borné dans la couronne

$$\{ z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leqslant \varepsilon \} ,$$

ce qui démontre l'assertion.

Proposition 1. *Pour tout chemin c d'origine x et d'extrémité y dans X, il existe une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) La différentielle logarithmique de h appartient à $L^1_c(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

(2) La restriction de h (resp. h^{-1}) à un voisinage convenable de x (resp. y) est une carte orientée de X centrée en x (resp. y).

(3) Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u .$$

Si de plus c est un lacet, on peut supposer que h appartient à $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C}^*)$.

Nous démontrerons tout d'abord une propriété d'additivité que nous utiliserons plusieurs fois par la suite. Supposons que l'on ait

$$c = c_1 c_2$$

et qu'il existe des fonctions h_1 et h_2 vérifiant les conditions de la proposition pour les chemins c_1 et c_2. Désignons par a l'extrémité de c_1 (qui est aussi l'origine de c_2). La fonction $h_1 h_2$ possède toutes les propriétés requises, sauf qu'elle est peut être singulière au point a. Sur un voisinage ouvert convenable U de a, la fonction $h_1 h_2$ possède un logarithme f et ce logarithme demeure borné au voisinage de a (lemme 3). Désignons par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(U, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de a et posons

$$h = h_1 h_2 \exp(-2i\pi\alpha f).$$

La fonction h appartient à $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ et l'on a pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u - \int_X d(\alpha f) \wedge u .$$

De plus, si l'on désigne par D_ε le disque de centre a et de rayon ε dans une carte orientée de centre a, on a

$$\int_X d(\alpha f) \wedge u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \backslash D_\varepsilon} d(\alpha f) \wedge u = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} \alpha f u = 0 .$$

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{C}$ et que c est donné par la formule

$$c(t) = (2t - 1, 0)$$

pour t compris entre 0 et 1. Désignons par X' le complémentaire de l'image de c. Il résulte du théorème 1 que la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

possède un logarithme sur X' et l'on pose

$$\begin{cases} h(z) = \exp\big(2i\pi\alpha(z) \log g(z)\big) & \text{si } z \in X' \\ h(z) = g(z) & \text{si } z \in X \backslash X' \end{cases}$$

en désignant par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de l'image de c. Vérifions la condition (3). Toute forme différentielle fermée sur X est exacte (lemme de Poincaré) et l'on a pour toute fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$,

$$\begin{aligned} \int_X \frac{dh}{h} \wedge df &= \lim_{\varepsilon \to 0} - \int_{X \backslash (D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon)} d\left(f \frac{dh}{h}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D'_\varepsilon} f \frac{dh}{h} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D''_\varepsilon} f \frac{dh}{h}, \end{aligned}$$

où D'_ε (resp. D''_ε) désigne le disque de centre x (resp. y) et de rayon ε. En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément que l'on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D''_\varepsilon} f\frac{dh}{h} = 2i\pi\, f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D'_\varepsilon} f\frac{dh}{h} = -2i\pi\, f(x)$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 1.

On appelle *chemin joignant un point x à l'infini dans X* toute application propre et continue c de $\mathbf{R}_+$ dans X qui envoie l'origine sur x. Un tel chemin existe toujours si X est ouverte (exercice pour le lecteur). On définit de manière évidente l'intégrale d'une forme fermée de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ le long de c et l'on vérifie aisément qu'il existe une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) La différentielle logarithmique de h appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$.

(2) La restriction de h à un voisinage convenable de x est une carte orientée de X centrée en x.

(3) Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X u \wedge \frac{dh}{h} = \int_c u\,.$$

On peut de plus supposer que le support de h est contenu dans un voisinage arbitraire de l'image de c.

La formule de Stokes montre que la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \times \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \to \mathbf{R}$$

définie par

$$\Delta(u,v) = \textstyle\int_X u \wedge v$$

induit par restriction et passage aux quotients une forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,.$$

THÉORÈME 2. *Les formes bilinéaires*

$$\Delta : \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \quad \textit{et} \quad \Delta : \mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$$

sont non dégénérées.

Soit v une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(\ ,v)$ soit nulle. Pour tout lacet c, il existe une fonction h de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\int_c v = \frac{1}{2i\pi}\int_X \frac{dh}{h} \wedge v = 0\,.$$

En particulier, toutes les périodes de v sont nulles et par conséquent v est exacte (théorème 1). Ceci montre que la première forme est non dégénérée.

Soit u une forme différentielle fermée de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(u, \ )$ soit nulle. Il résulte de ce qui précède que u est la différentielle d'une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et tout revient à montrer que l'on peut choisir f à support compact. Soit K un voisinage compact du support de u dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte (appendice II, lemme 5). Il est clair que f est constante sur chaque composante connexe de $X \backslash K$. Montrons qu'elle est constante sur $X \backslash K$.

Soient U et V les composantes connexes de deux points x et y de $X \backslash K$. On désigne par α un chemin joignant x à l'infini dans U, par β un chemin joignant y à l'infini dans V et par c un chemin joignant x à y dans X. Il existe des fonctions h_α et h_β dans $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x\}, \mathbf{C}^*)$ et $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{y\}, \mathbf{C}^*)$ respectivement dont le support est contenu dans le complémentaire de K, vérifiant les conditions de la remarque 1 pour les chemins α et β, et une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X \backslash \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le chemin c. Comme dans la proposition 1, on voit que l'on peut supposer la fonction $h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}$ indéfiniment dérivable. On a alors

$$f(y) - f(x) = \int_c u = \frac{1}{2i\pi} \int_X u \wedge \frac{d(h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1})}{h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}} = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

Corollaire 1. *La forme bilinéaire canonique*

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

est non dégénérée.

Corollaire 2. *Si le groupe G est de génération finie, la forme bilinéaire Δ induit des isomorphismes*

$$\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})^* \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R})^* .$$

Remarque 2.

Le corollaire 2 du théorème 2 s'applique en particulier si X est compacte (appendice II, proposition 1). On voit alors que l'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ est de dimension paire puisque la forme bilinéaire Δ est non dégénérée et alternée.

L'ensemble G' défini par

$$G' = \{ c \in G \mid \textstyle\int_c u = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \}$$

est un sous-groupe contenant le groupe des commutateurs. Le quotient $\tilde{G}$ est donc un groupe abélien dont on vérifie aisément qu'il est sans torsion. Il résulte par ailleurs du théorème 1 que $\bar{\omega}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathrm{Hom}(\tilde{G}, \mathbf{Z})$.

Tout lacet c de X possède une image naturelle dans $\tilde{G}$, à savoir la classe du lacet $\alpha c \alpha^{-1}$ où α est un chemin joignant x_0 à un point de l'image de c. En particulier, toute courbe compacte orientée de X possède une image naturelle dans $\tilde{G}$ (appendice IV, théorème 1). D'autre part, si h désigne une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le lacet c, la classe dans $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$ de la différentielle logarithmique de h ne dépend que de la classe de c dans $\tilde{G}$. C'est une conséquence immédiate des définitions et du théorème 2. On a donc un homomorphisme canonique

$$\theta : \tilde{G} \to \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}) .$$

THÉORÈME 3. *L'homomorphisme θ est un isomorphisme.*

L'injectivité de θ résulte immédiatement des définitions.

Soit h une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{U})$. Pour toute valeur régulière z de h différente de 1, l'ensemble $h^{-1}(z)$ est une courbe compacte de X. C'est donc une réunion finie de courbes isomorphes à $\mathbf{U}$. Nous allons munir cette courbe d'une orientation naturelle. Désignons par f l'unique isomorphisme de $\mathbf{U}\backslash\{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U}\backslash\{1\}}$$

et par t l'image de z par cet isomorphisme. L'ensemble $(f \cdot h)^{-1}(]0, t])$ est une pièce de la surface différentielle $(f \cdot h)^{-1}(]0, 1[)$ dont le bord est précisément $h^{-1}(z)$. On munit ce bord de l'orientation induite.

Soient t' et t'' deux valeurs régulières de $f \cdot h$ avec t' strictement inférieur à t''. L'ensemble

$$Y(t', t'') = (f \cdot h)^{-1}([t', t''])$$

est une pièce compacte de X et l'on a pour toute forme différentielle fermée u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\int_{(f \cdot h)^{-1}(t'')} u - \int_{(f \cdot h)^{-1}(t')} u = \int_{Y(t', t'')} du = 0 .$$

En particulier, la classe c de $h^{-1}(z)$ dans $\tilde{G}$ est indépendante de la valeur régulière z. D'autre part, sur l'ensemble ouvert $h^{-1}(\mathbf{U}\backslash\{1\})$, on a la relation

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h} = d(f \cdot h) .$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{Y(t',t'')}\frac{dh}{h}\wedge u = t''\int_{(f\cdot h)^{-1}(t'')} u - t'\int_{(f\cdot h)^{-1}(t')} u\,.$$

Le théorème de Sard (§ 1, théorème 2) montre qu'il existe des valeurs régulières de $f \cdot h$ arbitrairement voisines de 0 et de 1. On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{X}\frac{dh}{h}\wedge u = \lim_{\substack{t'\to 0\\ t''\to 1}}\frac{1}{2i\pi}\int_{Y(t',t'')}\frac{dh}{h}\wedge u = \int_{c} u\,.$$

Autrement dit, l'image de c par l'application θ n'est autre que la classe de h dans $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$, ce qui démontre le théorème.

Remarque 3.

Si u et v sont des éléments de $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$ et $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ respectivement, on a

$$\int_X u \wedge v = \int_c v$$

où c désigne l'unique élément de $\tilde{G}$ défini par u. Ceci montre en particulier que Δ induit une forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{H}^1_c(X,\mathbf{Z}) & \times & \mathbf{H}^1(X,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\ \Delta\ } & \mathbf{Z}\\
{\scriptstyle\theta}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\omega}} & & \|\\
\tilde{G} & \times & \mathrm{Hom}(\tilde{G},\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\ <\,,\,>\ } & \mathbf{Z}
\end{array}$$

commutatif. La forme bilinéaire $<\ ,\ >$ étant non dégénérée par définition de $\tilde{G}$, il en est de même de Δ et l'on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})^*$. Si de plus $\tilde{G}$ est de type fini, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1_c(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})^*$.

La forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire Δ s'appelle la *forme d'intersection de* X. Nous allons essayer d'expliquer pourquoi.

Soient g et h deux fonctions de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{U})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ respectivement et soit u l'application produit (g, h) de X dans $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$.

L'application de $g^{-1}(\mathbf{U}\backslash\{1\})$ dans $(\mathbf{U}\backslash\{1\}) \times \mathbf{U}$ induite par u est propre. On désigne par ν son degré (§ 4, théorème 4). Notons que l'on a

$$\frac{-1}{4\pi^2}\int_X \frac{dg}{g}\wedge\frac{dh}{h} = \frac{-\nu}{4\pi^2}\int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}}\frac{dz}{z}\wedge\frac{dw}{w} = \nu\,.$$

Désignons par (z, w) une valeur régulière de u, avec z et w distincts de 1, par f l'unique isomorphisme de $\mathbf{U}\backslash\{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U}\backslash\{1\}}$$

et par (s_0, t_0) l'image de (z, w) par $f \times f$.

Les ensembles $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$ sont deux courbes de X naturellement orientées (démonstration du théorème 3), dont la première est compacte. Soit x un point de l'intersection de ces deux courbes. La restriction de $(f \times f) \cdot u$ à un voisinage convenable de x est une carte de X et l'image de $g^{-1}(z)$ (resp. $h^{-1}(w)$) par cette carte est la courbe

$$\{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s = s_0\} \quad (\text{resp. } \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid t = t_0\}).$$

Si la carte est orientée, on dit que le *nombre d'intersection de* $g^{-1}(z)$ *et* $h^{-1}(w)$ *au point* x *est* 1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la droite). Si la carte n'est pas orientée, on dit que le *nombre d'intersection de* $g^{-1}(z)$ *et* $h^{-1}(w)$ *au point* x *est* -1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la gauche). Ainsi le degré v apparaît comme le nombre de points d'intersection (avec signes) des deux courbes orientées $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$.

Nous allons maintenant calculer la classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X. On peut se limiter au cas où X est compacte: si X est ouverte, les deux groupes $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ et $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sont nuls (§ 2, corollaire du théorème 1 et § 4, théorème 3). On sait alors que l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$ (§ 4, théorème 3). La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X apparaît donc comme un nombre complexe.

Soit π un fibré en droites complexes sur X et soit x un point de X.

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π ayant pour domaine le même voisinage de x et par g la transition de Φ dans Ψ. Pour toute section s de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x\}, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g\, s_\Phi .$$

En particulier, si s ne s'annule pas, le résidu au point x de la différentielle logarithmique de s_Φ est indépendant de Φ. C'est un entier que l'on appelle *l'ordre de* s *au point* x et que l'on désigne par $0_x(s)$.

Soit A un ensemble fini de X et soit s une section partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash A, \pi)$. On appelle *ordre de* s l'entier défini par

$$0(s) = \sum_{x \in A} 0_x(s) .$$

Proposition 2. *On suppose* X *compacte et l'on désigne par* A *un ensemble fini de* X. *Pour toute section* s *partout non nulle de* $\mathscr{C}^\infty(X\backslash A, \pi)$, *on a*

$$0(s) = \mathrm{ch}(\pi).$$

Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de A. Il existe deux familles $(U_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ et $(V_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ d'ensembles ouverts de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'ensemble U_j est le domaine d'une carte Φ_j de π et le domaine d'une carte orientée ψ_j de X centrée au point x_j.

(2) L'ensemble V_j est un disque relativement compact de centre x_j dans ψ_j.

(3) Les ensembles $U_1, \ldots, U_n$ sont deux à deux disjoints.

Puisque la section s est partout non nulle sur $X\backslash A$, le fibré π est trivial sur l'ensemble

$$V_0 = X\backslash \bigcup_{1 \leqq j \leqq n} \overline{V}_j .$$

Choisissons une trivialisation Φ_0 et désignons par g_{kj} la transition de Φ_j dans Φ_k pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 0 et n. On a

$$s_k = g_{kj} s_j$$

où s_j désigne l'expression de s dans Φ_j. Choisissons pour tout entier j compris entre 1 et n une fonction α_j de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $X\backslash V_j$ et à 0 au voisinage de x_j. Les formes différentielles $\alpha_j \dfrac{ds_j}{s_j}$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(U_j, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$\frac{1}{2i\pi}\alpha_k \frac{ds_k}{s_k} - \frac{1}{2i\pi}\alpha_j \frac{ds_j}{s_j} = \frac{1}{2i\pi}\frac{dg_{kj}}{g_{kj}}$$

en tout point de $V_j \cap V_k$. Par définition de la classe de Chern, on a donc

$$\mathrm{ch}(\pi) = \int_X u$$

où u désigne la forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$ obtenue par recollement des $\dfrac{1}{2i\pi} d\alpha_j \wedge \dfrac{ds_j}{s_j}$. Par conséquent,

$$\mathrm{ch}(\pi) = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \frac{1}{2i\pi}\int_{U_j} d\alpha_j \wedge \frac{ds_j}{s_j} = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V_j} \frac{ds_j}{s_j} = 0(s)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur* X *est un entier.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et de l'existence de sections transverses (§ 2, lemme 5).

LEMME 4. *Soient* π *et* ρ *deux fibrés en droites complexes sur* X *et soient* s *et* t *deux sections transverses de* π *et* ρ *respectivement.*

(1) L'ordre de s *en un de ses zéros est égal à* 1 *ou* -1.

(2) Si l'ordre de s *est égal à l'ordre de* t *en tout point, alors* π *et* ρ *sont isomorphes.*

La première assertion résulte immédiatement des définitions. La démonstration de la seconde est laissée en exercice au lecteur (on procèdera comme dans la proposition 1 pour construire une section partout non nulle de $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi \otimes \rho^*)$).

Soit ϕ une carte orientée de X centrée en un point x. On désigne par U_0 son domaine et par U_1 l'ensemble $X \backslash \{x\}$. On définit un cocycle complexe de rang 1 subordonné au recouvrement (U_0, U_1) en posant

$$g_{1,0} = \phi^{-1} \quad \text{et} \quad g_{0,1} = \phi \,.$$

Désignons par π un fibré en droites complexes associé à ce cocycle. La fonction ϕ sur U_0 et la fonction constante 1 sur U_1 se recollent en une section transverse s de π et l'on a

$$\mathrm{ch}(\pi) = 0(s) = 0_x(s) = 1 \,.$$

Le lemme 4 montre que la classe ξ_x de π dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de x.

LEMME 5. *Le groupe* $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ *est engendré par les fibrés de la forme* ξ_x.

Soit ξ un fibré principal de groupe structural $\mathbf{C}^*$ sur X et soit π un fibré en droites complexes associé à ξ. On désigne par s une section transverse de π, par $x_1, \ldots, x_n$ les zéros d'ordre 1 de s et par $y_1, \ldots, y_m$ les zéros d'ordre -1 de s. On voit aisément à l'aide du lemme 4 que l'on a

$$\xi = \xi_{x_1} \cdots \xi_{x_n} \overline{\xi}_{y_1} \cdots \overline{\xi}_{y_m}$$

ce qui démontre l'assertion (§ 2, lemme 4).

THÉORÈME 4. *Si* X *est compacte, la classe de Chern induit un isomorphisme canonique de* $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ *sur* $\mathbf{Z}$.

En vertu de ce qui précède, il suffit de montrer que ch est injective, ou ce qui revient au même, que tout fibré principal de la forme

$$\xi = \xi_x \xi_y^{-1}$$

est trivial. Désignons par π (resp. ρ) un fibré en droites complexes associé à ξ_x (resp. ξ_y) et par s (resp. t) une section transverse de π (resp. ρ) possédant un seul zéro d'ordre 1 au point x (resp. y). Soit c un chemin joignant x à y dans X et soit h une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1. La section $h\dfrac{t}{s}$ de $\mathscr{C}^\infty(X\backslash\{x, y\}, \pi \otimes \rho^*)$ est partout non nulle. Elle est d'ordre 0 au point x et au point y. L'assertion résulte alors du lemme 4.