Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ÉQUIVALENCE FINIE DES POLYÈDRES

Autor: Châtelet, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47333

SUR L'ÉQUIVALENCE FINIE DES POLYÈDRES

par

F. Châtelet

Henri Lebesgue s'est intéressé à de nombreuses questions de géométrie et de topologie. Mais ses mémoires sont dispersés dans des périodiques dont plusieurs sont peu accessibles. L'édition de ses *Œuvres scientifiques* permet maintenant de les étudier plus facilement.

Je me propose d'exposer quelques aspects du problème de l'équivalence finie des polyèdres, en espérant que ce bref exposé donnera l'envie de lire ou de relire les mémoires de Lebesgue sur ce sujet.

Henri Lebesgue a consacré une partie importante de son cours au Collège de France pendant l'année 1937-1938 à ce sujet. Une conférence, faite à Cracovie en 1938, a été publiée aux Annales de la Société polonaise de mathématiques (*Œuvres*, tome V, pp. 65 et 99). Une note aux comptes rendus de l'Académie des sciences (*Œuvres*, tome V, p. 61) avait auparavant résumé les résultats. Sur un sujet voisin, une conférence, faite à Belgrade en 1937, avait paru aux Publications de l'Université de Belgrade (*Œuvres*, tome V, p. 55).

Les travaux d'Henri Lebesgue, et ceux de ses prédécesseurs dans cette question (Bricard, Sforza, Dehn) utilisent la conjonction de méthodes originales géométriques, algébriques et même arithmétiques. En outre Lebesgue signale plusieurs questions ouvertes. Hadwiger, par des méthodes toutes différentes, a étendu, en 1957, les résultats obtenus aux polyèdres d'un espace euclidien de dimension supérieure à 3; mais il n'a pas résolu les questions laissées ouvertes par Lebesgue. D'ailleurs, les méthodes de Lebesgue peuvent peut-être être utiles pour d'autres problèmes.

Deux polyèdres D et D' sont dits équivalents de façon finie au sens simple s'il est possible de partager l'intérieur de D en la réunion d'un nombre fini de polyèdres d_i (extérieurs les uns aux autres) et de partager l'intérieur de D' en la réunion d'un même nombre de polyèdres d_i' de telle manière que chaque polyèdre d_i' soit égal à un polyèdre d_i (c'est-à-dire s'en déduise par un déplacement euclidien).

Deux polyèdres D et D' sont dits équivalents de façon finie par différence s'il est possible de construire deux polyèdres Δ et Δ', équivalents de façon finie au sens simple, tels que les réunions $D \cup \Delta$ et $D' \cup \Delta'$ soient équivalents de façon finie au sens simple.

Deux polyèdres D et D' sont dits équivalents de façon finie par multiplication s'il est possible de construire un polyèdre comme réunion de n polyèdres égaux à D équivalent de façon finie au sens simple à un polyèdre construit comme réunion de n polyèdres égaux à D'.

Deux polyèdres D et D' sont équivalents de façon finie au sens large s'il est possible de combiner une suite d'équivalences précédentes entre D et D'.

L'équivalence finie des polygones plans se définit de façon analogue.

Ces définitions nécessitent toutefois de se limiter à des polyèdres (ou à des polygones) dont l'intérieur est bien défini, d'un seul tenant (connexe par ligne polygonale) et décomposable en la réunion d'un nombre fini de tétraèdres (ou de triangles). Ces polyèdres (ou polygones), appelés simples, peuvent aussi être caractérisés par des conditions ne portant que sur leurs surfaces (ou sur leurs bords).

Une ligne polygonale fermée (bord d'un polygone) est une succession de segments (ses côtés) tels que l'extrémité de chaque segment soit confondue avec l'origine du suivant: l'extrémité du dernier segment étant confondue avec l'origine du premier. Les extrémités des différents segments sont appelés les vrais sommets de la ligne. Si deux segments non consécutifs ont un point commun, ce point est appelé « faux sommet » de la ligne.

Une ligne polygonale fermée définit un polygone *simple* si et seulement si elle ne contient pas de faux sommet.

Une surface polyèdrale est un arrangement des intérieurs de polygones (ses faces) de l'espace euclidien, extérieurs les uns aux autres, mais dont chaque côté est commun à deux faces, de manière que la réunion des intérieurs de ces polygones soit d'un seul tenant (connexe par ligne polygonale) et que la section de cette surface par tout plan soit formée par des lignes polygonales fermées (cette section pouvant être vide). Si deux faces ont en commun un segment intérieur à chacune d'elles, ce segment est appelé « fausse arête ».

Une surface polyèdrale définit un polyèdre *simple* si et seulement si elle ne contient pas de fausse arête.

Hilbert a démontré que deux polygones plans simples de même aire sont équivalents de façon finie au sens large. On peut trouver la démonstration de cette propriété dans certains traités de géométrie élémentaire ainsi que dans l'article de H. Lebesque de Cracovie.

Les essais pour démontrer que deux polyèdres simples de même volume sont équivalents de façon finie ont échoué; il était indiqué de chercher des invariants de l'équivalence finie autres que le volume. Bricard, en s'inspirant du fait que l'aire d'un polygone sphérique ne dépend que de ses angles, a cherché un invariant de l'équivalence finie qui dépende des angles dièdres des polyèdres considérés. Pour cela, il a étudié le comportement des angles dièdres d'un polyèdre dans une équivalence finie.

Considérons un polyèdre simple D décomposé en polyèdres simples d_i. Chaque polyèdre d_i est extérieur aux autres polyèdres d_j; mais deux polyèdres d_i et d_j peuvent avoir une partie commune formée par des polygones intérieurs à une ou plusieurs faces de d_i et d_j.

Soit s un segment situé sur une seule arête d'un polyèdre d_i ou commun a plusieurs arêtes c_h de plusieurs polyèdres d_i; choisissons s de telle manière qu'il soit le plus grand segment commun à ces arêtes c_h.

Ce segment peut appartenir à une arête C_k de D, ou appartenir à une face de D, ou être complètement intérieur à D. Dans le premier cas, la somme des dièdres α_h dont l'arête c_h contient s est égale au dièdre A_k de D d'arête C_k; dans le second cas, cette somme est égale à π radians; dans le troisième cas, cette somme est égale à 2π radians. Ce que nous écrirons

$$\Sigma\alpha_h = A_k\,,\ \pi \text{ ou } 2\pi\,.$$

Bricard ajoutait toutes les relations ainsi obtenues pour obtenir une somme invariante dans une équivalence finie. Mais une difficulté provient du fait qu'un même dièdre α_h peut intervenir plusieurs fois dans cette somme et que nous ne savons pas à priori le nombre de fois où il apparaît.

Pour remédier à cette difficulté, Dehn multiplie la relation de Bricard par la longueur s_n du segment considéré:

$$s_n\,\Sigma\alpha_h = s_n A_k\,,\ s_n\pi \text{ ou } 2s_n\pi$$

et il ajoute toutes les relations obtenues; ce qui donne

$$\Sigma l_h \alpha_h = \Sigma L_k A_k + \pi \Sigma \xi_n s_n \tag{1}$$

où l_h est la longueur de l'arête du dièdre α_h, L_k est la longueur de l'arête du dièdre A_k et où ξ_n est égal à 0, 1 ou 2 suivant le cas de Bricard.

Si un polyèdre simple D' est équivalent de façon finie au sens simple à D, l'ensemble des longueurs l_h est le même que celui des longueurs l'_h des arêtes des polyèdres de la décomposition de D'; de même, l'ensemble des dièdres α_h est le même que celui des dièdres α'_h. D'où une relation analogue à (1)

$$(1') \qquad \Sigma l_h \alpha_h = \Sigma L'_k A'_k + \pi \Sigma \xi'_n s'_n$$

et par différence

$$\Sigma L_k A_k - \Sigma L'_k A'_k = N\pi ,$$

avec

$$N = \Sigma \xi'_n s'_n - \Sigma \xi_n s_n .$$

Mais on espérait une relation (homogène) à cœfficients entiers (ou rationnels) entre les dièdres A_k, A'_k et π. Il s'agit de montrer qu'on peut déduire de la relation à cœfficients réels obtenue une relation à cœfficients rationnels.

Un raisonnement approximatif utilise la densité du corps des nombres rationnels dans celui des nombres réels. On modifie légèrement les polyèdres D, d_i, D', d'_i de manière que les longueurs L_k, L'_k, s_n, s'_n deviennent rationnelles, sans que les angles A_k, A'_k, α_h, α'_h ne changent et sans que les configurations des polyèdres d_i et d'_i ne se modifient. Alors les relations (1) et (1') entre les A_k, A'_k et π conservent la même forme, mais leurs cœfficients deviennent rationnels. Toutefois, il est difficile de rendre rigoureux ce raisonnement, en raison du grand nombre de longueurs qu'il faut faire varier simultanément.

H. Lebesgue utilise alors un raisonnement plus algébrique. Il remarque que les longueurs s_n sont liées par les relations linéaires

$$L_k = \Sigma \eta_n s_n , \qquad l_h = \Sigma \theta_n s_n ,$$

où les cœfficients η_n, θ_n sont égaux à 1 ou 0 suivant que le segment s_n est contenu ou n'est pas contenu dans l'arête C_k de D ou dans l'arête c_h de d_i. Nous pouvons considérer ce système de relations comme un système linéaire en les variables s_n. H. Lebesgue démontre que ce système est déterminé par un raisonnement géométrique qu'il qualifie lui-même de minutieux et sur lequel il est revenu plusieurs fois. C'est-à-dire que les longueurs s_n s'expriment linéairement en fonction des longueurs L_k et l_h:

$$(2) \qquad s_n = \Sigma \xi_h l_h + \Sigma \tau_k L_k ,$$

où les cœfficients ξ_h et τ_k sont des entiers rationnels. Les longueurs L_k, l_h sont assujetties à vérifier un système linéaire homogène $(\mathscr{L}_1)$ à cœfficients rationnels.

En utilisant les expressions (2) dans la relation (1), nous obtenons une relation

$$\Sigma l_h \alpha_h = \Sigma L_k A_k + \pi (\Sigma L_k E_k - \Sigma l_h e_h) ,$$

où les cœfficients E_k, e_h sont des nombres rationnels. De même, pour le polyèdre D', décomposé en polyèdres d'_i égaux aux polyèdres d_i, nous obtenons un système linéaire et homogène $(\mathscr{L}'_1)$ entre les longueurs L'_k, l_h, à cœfficients rationnels et une relation

$$\Sigma l_h \alpha_h = \Sigma L'_k A'_k + \pi (\Sigma l'_k E'_k - \Sigma l_h e'_h),$$

où les cœfficients E'_k, e'_h sont des nombres rationnels. Par différence, nous obtenons

$$(3) \qquad \Sigma L_k A_k - \Sigma L'_k A'_k + \pi [\Sigma E_k L_k - \Sigma E'_k L'_k + \Sigma (e_h - e'_h) l_h] = 0 .$$

Cette dernière relation est donc une conséquence du système

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_h &= A_k , \pi \text{ ou } 2\pi , & \Sigma \alpha'_h &= A'_k , \pi \text{ ou } 2\pi , \\ L_k &= \Sigma \eta_n s_n , & l_h &= \Sigma \theta_n s_n , \\ L'_k &= \Sigma \eta'_n s'_n , & l'_h &= \Sigma \theta'_n s'_n . \end{aligned}$$

Mais la relation (3) ne contient ni les dièdres α_h, ni les longueurs s_n; c'est donc une conséquence du système $(\mathscr{L}_2)$, formé par les systèmes $(\mathscr{L}_1)$ et $(\mathscr{L}'_1)$, ou obtenu en éliminant les α_h et les s_n dans le système précédent.

Nous pouvons encore résoudre le système $(\mathscr{L}_2)$ par rapport aux longueurs l_h; ce système est en effet possible, puisqu'il a pour solution l'ensemble des longueurs effectives L_k, L'_k, l_h des polyèdres D, D', d_i, d'_i considérés. Mais il peut ne pas être déterminé. Les longueurs l_h s'expriment donc en fonctions linéaires et homogènes des longueurs L_k, L'_k et, éventuellement de paramètres arbitraires. Les longueurs L_k, L'_k sont assujetties à vérifier un système linéaire et homogène $(\mathscr{L})$ à cœfficients rationnels.

En utilisant les expressions précédentes des longueurs l_h dans la relation (3) et en identifiant les cœfficients des différents paramètres, nous obtenons notamment une relation de la forme

$$(4) \qquad \Sigma L_k (A_k - \pi r_k) = \Sigma L'_k (A'_k - \pi r'_k) ,$$

où les r_k, r'_k sont des nombres rationnels.

La relation (4) est une conséquence du système linéaire $(\mathscr{L})$ entre les L_k, L'_k; elle est encore vérifiée par toute solution $\bar{L}_k$, $\bar{L}'_k$ du système linéaire $(\mathscr{L})$. Comme ce système a ses cœfficients rationnels, on peut construire une base du module des solutions, formée par des systèmes de nombres rationnels $\bar{L}_k$, $\bar{L}'_k$. Chacune de ces solutions rationnelles donne lieu à une relation linéaire, homogène, à cœfficients rationnels entre les dièdres A_k, A'_k et π:

$$\Sigma \bar{L}_k (A_k - \pi r_k) = \Sigma \bar{L}'_k (A'_k - \pi r'_k) .$$

Si N est le nombre d'arêtes de D et D' et si le système ($\mathscr{L}$) contient p relations indépendantes, la base du module des solutions contient $N - p$ éléments. Ce qui donne $N - p$ relations linéaires, homogènes, à cœfficients rationnels entre les dièdres A_k, A'_k et π.

D'où le résultat:

Pour que deux polyèdres simples D et D' soient équivalents de façon finie simple, il faut qu'il existe $N - p$ relations linéaires, homogènes, indépendantes, à cœfficients rationnels entre les dièdres A_k, A'_k de D et D' et π et p relations linéaires, homogènes, indépendantes, à cœfficients rationnels entre les longueurs L_k, L'_k des arêtes de D et D', où N est le nombre d'arêtes de D et D'.

Ce résultat, ainsi établi pour l'équivalence finie au sens simple, peut être complété par un raisonnement simple pour être étendu au cas de l'équivalence finie au sens large.

H. Lebesgue a utilisé ces résultats pour montrer qu'il existe des polyèdres de même volume qui ne sont pas équivalents de façon finie. Ainsi, il remarque qu'il n'y a aucune relation ($\mathscr{L}$) entre les arêtes, ni aucune relation ($\mathscr{A}$) entre les dièdres du tétraèdre le plus général. D'où il déduit que:

« Le tétraèdre le plus général n'est pas équivalent de façon finie à un prisme.»

Il précise même que:

« Il faut écrire au moins trois relations ($\mathscr{L}$) et ($\mathscr{A}$) entre les longueurs d'arêtes et les grandeurs des dièdres du tétraèdre le plus général pour qu'il puisse être équivalent de façon finie à un prisme.»

D'autre part, il calcule les dièdres des cinq polyèdres réguliers concaves et montre qu'ils sont incommensurables deux à deux. D'où il déduit que:

« Deux polyèdres réguliers ne peuvent être équivalents de façon finie que s'ils sont égaux.»

Inversement, je vais montrer, sur un exemple simple, l'existence de relations entre les longueurs des arêtes et entre les dièdres de deux polyèdres équivalents de façon finie. Je choisis deux prismes droits, à bases triangulaires, de même hauteur, soit D et D'. D'après le résultat de Hilbert, D et D' sont équivalents de façon finie s'ils ont même volume. Ces prismes ont 18 arêtes au total. On trouve facilement 10 relations entre leurs arêtes et 14 relations entre leurs dièdres. Le total $10 + 14 = 24$ est bien supérieur au nombre $N = 18$ des arêtes.

Enfin, je cite l'opinion de Lebesgue sur l'intérêt de poursuivre ces recherches sur l'équivalence finie:

« Nous sommes entièrement dépourvus de moyens ayant quelque généralité pour décider si les équivalences que nos conditions nécessaires ne nous ont pas permis de déclarer impossibles, existent ou non. On ne connaît en effet, aucune condition suffisante d'équivalence, si restrictive soit-elle; on ne connaît que des exemples d'équivalence. C'est là une grave lacune de la théorie actuelle de l'équivalence finie, sur laquelle j'appelle l'attention des jeunes chercheurs.»

(Reçu le 4 avril 1975)

F. Châtelet

Mathématiques
Université de Besançon
Route de Gray
F-25030 — Besançon